UNIVERSITAT DE VALÈNCIA

Primer curso de Ingeniería Informática

PROBLEMAS DE ANÁLISIS MATEMÁTICO

Curso 2001/02

Sucesiones

Ejercicio 1 Calcular los límites de las sucesiones siguientes:

$i)\dfrac{5n^3-8n^2+3}{4n^3+2n+4}$ $ii)\dfrac{4n^2-3n+4}{5n^4+2n^2-3}$

$iii)\dfrac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n+1}}$ $iv)\dfrac{2n+3}{n+\sqrt[3]{n}}$

$v)\dfrac{\sqrt{n^2-3}}{\sqrt[3]{n^3+1}}$ $vi)\dfrac{\ln(n^4+4n^3+6n^2-3n+2)}{\ln(6n^3+4n^2-5n+7)}$

$vii)\dfrac{(\sqrt{2n}+3)^3-n^3}{n^2-2\sqrt{n^5}}$ $viii)\dfrac{2^n+7}{3^n}$

$ix)\dfrac{5^n-3^n+1}{5^n+3^n+\frac{1}{n}}$ $x)\sqrt{4n-1}-\sqrt{3n}$

$xi)\sqrt[3]{n^3+1}-n$ $xii)\sqrt{5n+3}-\sqrt{3n}$

$xiii)\sqrt[3]{n^3+n^2}-\sqrt[3]{n^3-n^2}$ $xiv)\dfrac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2+n}}{\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt[3]{n^3+n^2+1}}$

$xv)(2+3n^4)^{\frac{1}{1+2\ln n}}$ $xvi)(5n^3+4n-1)^{\frac{1}{\ln(n^2+7n-5)}}$

$xvii)\ \sqrt[n^2]{n^2+n+1}$ $xviii)\ \left(\dfrac{n^2+1}{n^2}\right)^{\frac{2n^3}{n+1}}$

$xix)\ \left(\dfrac{n^2+3n-5}{n^2-4n+2}\right)^{\frac{n^2+5}{n+2}}$ $xx)\ \left(\dfrac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^{n\ln n}$

$xxi)\dfrac{1^p+2^p+3^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$ $xxii)\ \left(\dfrac{(2n)!}{n!}\right)^{1/n}$

$xxiii)\dfrac{n^2+3n}{2+6+10+\cdots+(4n-2)}$ $xxiv)\dfrac{1+4+7+\cdots+(3n-2)}{5+7+9+\cdots+(2n+3)}$

Ejercicio 2 Encontrar, si existe, una fórmula para las siguientes sucesiones recurrentes. Decir en cada caso si la sucesión es convergente y si no lo es encontrar una subsucesión que lo sea.

$i)a_1=1, a_{n+1}=(-1)^n+a_n$ $ii)a_1=1, a_{n+1}=-a_n$

$iii)a_1=1, a_{n+1}=-\dfrac{a_n}{2}$ $iv)a_1=1, a_{n+1}=(-1)^n a_n$

$v)a_1=1, a_{n+1}=\dfrac{a_n}{n+1}$

Ejercicio 3 Estudiar si las sucesiones siguientes son convergentes y, en caso afirmativo, calcular su límite.

$i) a_1 = \sqrt{2}, a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}$ $\quad$ $ii) a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + \dfrac{1 + a_n}{1 + 2a_n}$

$iii) a_1 > 0, a_{n+1} = -\dfrac{a_n + 1}{2a_n + \frac{1}{a_n} + 1}$ $\quad$ $iv) a_1 = 1, a_{n+1} = \sqrt{a_n + 1}$

$v) a_1 = 1, a_2 = 2, a_{n+2} = \dfrac{1}{3}(4a_{n+1} - a_n)$ $\quad$ $vi) a_1 = 2, a_{n+1} = 2 + \dfrac{1}{a_n}$

$vii) a_1 = 2, a_{n+1} = \dfrac{1}{2 + a_n}$ $\quad$ $viii) a_1 = 0, a_2 = 1, a_{n+2} = \dfrac{1}{3}a_{n+1} + \dfrac{2}{3}a_n$

Ejercicio 4 Estudiar el carácter de las series:

$i) \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$ $\qquad$ $ii) \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{a}-1)^p \quad a>1,\ p\in \mathbb{R}^+$

$iii) \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2+\cdots n}$ $\qquad$ $iv) \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{(\log n)}}$

$v) \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\log n}}{(\log n)^n}$ $\qquad$ $vi) \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$

$vii) \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \cos^{2n}(\frac{n\pi}{2n+4})$ $\qquad$ $viii) \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}}$

$ix) \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{(n-1)!}}{(1+1)(1+\sqrt{2})\cdots(1+\sqrt{n})}$ $\qquad$ $x) \displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}}$

$xi) \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{\sqrt{n}}{n+100}$ $\qquad$ $xii) \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{\sqrt{n}(n+1)}+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}})$

$xiii) \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n^2]{2}-1)$ $\qquad$ $xiv) \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{\log n}}$ (Comparar con $\frac{1}{n^2}$)

$xv) \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} p^n n^q, \quad p,q\in \mathbb{R}$ $\qquad$ $xvi) \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{(n-1)!}}{(1+1)(1+\sqrt{2})\cdots(1+\sqrt{n})}$

$xvii) \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-3}{2n-2}\frac{2n-1}{2n}$ $\qquad$ $xviii) \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 4^n}{(2n)!}$

$xix) \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)}{=2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-1)}$ $\qquad$ $xx) \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log 2\cdots\log n}{n!}$

Ejercicio 5 Sumar las series siguientes:

Descomposición en fracciones simples.

$$i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} \qquad ii) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{5n-6}{n^3-3n^2+2n}$$

Series telescópicas.

$$i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}} \qquad ii) \frac{\log(\frac{n+2}{n+1})}{\sqrt{\log^2(n+1)\log(n+2)}+\sqrt{\log(n+1)\log^2(n+2)}}$$

Series aritmético-geométricas.

$$i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3^n} \qquad ii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+5}{6^n}$$

Series de Euler.

$$i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2(n+1)}{n!} \qquad ii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)}{(n+1)!} 2^n.$$

Ejercicio 6 Sumar las series siguientes:

$$i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4+n^2+1} \qquad ii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{(1+2^n)(1+2^{n-1})}$$

$$iii) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log((1+\frac{1}{n})^n(1+n))}{n \log n \log(n+1)^{n+1}} \qquad iv) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n+2}{5^n}$$

$$v) \sum_{n=p}^{\infty} \frac{1}{\binom{n}{p}} \qquad vi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+1}{n!}$$

Continuidad

Ejercicio 7 Demostrar, utilizando la definición de límite, que $\lim_{x\to 2}(5x-1)=9$ y $\lim_{x\to 1}(3x-2)=1$.

Ejercicio 8 Calcular los límites siguientes:

(a).- $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2+1}{x^2+2}$

(b).- $\displaystyle\lim_{x\to 1}(x-1)x^2\mathrm{sen}(\frac{1}{1-x})$.

(c).- $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{2x^3+2x^2-10x+6}$.

(d).- $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x^2}}$

(e).- $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x^2-1}{4x^2}\right)^{\frac{x^3}{x-1}}$

Ejercicio 9 Estudiar la continuidad de las funciones:

(a).- $f(x)=\begin{cases} 0 & x=0 \\ \dfrac{1+e^{\frac{1}{x}}}{1-e^{\frac{1}{x}}} & x\neq 0 \end{cases}$

(b).- $f(x)=|x|e^{-|x-1|}$.

(c).-$f(x)=\begin{cases} 2 & x=0 \\ \dfrac{x^2\mathrm{sen}(\frac{1}{x})}{\mathrm{sen}x} & x\neq 0 \end{cases}$

Ejercicio 10 Probar que el polinomio $x^7+x^4+x^3+x-1$ tiene una raíz real en $[0,1]$.

Ejercicio 11 Probar que todo polinomio de grado impar tiene una raíz real.

Ejercicio 12 Estudiar la derivabilidad de las funciones siguientes en los puntos dados:
a)

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0, \\ x^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2x-1, & x \geq 1, \end{cases}$$

en $x = 0,\ x = 1/2,\ x = 1.$
b)

$$f(x) = \begin{cases} max\{x^2, 1/x\}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

en $x = 0,\ x = 1.$

Ejercicio 13 Calcular hasta qué orden es derivable la función

$$f(x) = \begin{cases} e^x - x - 1, & x \geq 0, \\ x^3, & x < 0. \end{cases}$$

Ejercicio 14 Demostrar que la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 sen\ 1/x, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

es derivable en toda la recta real y calcular su derivada.

Ejercicio 15 Calcular las derivadas n-ésimas de las funciones
a) $f(x) = \log(kx)$. (Por qué da lo mismo que si fuera $\log x$?)
b) $f(x) = \sin(kx)$.
d) $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x-2)}$. (Descomponer en suma de fracciones.)
e) $f(x) = \sin(4x)\cos(2x)$. (Expresar como suma)

Ejercicio 16 (*Funciones hiperbólicas*) Dado que

$$sh\ x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \text{(seno hiperbólico)},$$

$$ch\ x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \text{(coseno hiperbólico)},$$

demostrar:
a) $ch^2 x - sh^2 x = 1.$
b) $(sh\ x)' = ch\ x, \quad (ch\ x)' = sh\ x.$

Ejercicio 17 Calcular cuántas raices reales tiene la ecuación:

$$4x^5 - 5x^4 + 2 = 0.$$

Ejercicio 18 Estudiar la variación (crecimiento, decrecimiento, extremoos, concavidad, convexidad e inflexiones) de les funciones siguientes:
a) $f(x) = x^3 + x + 1$
b) $f(x) = (x-1)^3 x^2$
c) $f(x) = x^2 \log x$.

Ejercicio 19 Demostrar las desigualdades siguientes:
a) $e^x \geq \frac{1}{1+x}, \quad x > 0.$
b) $\tan x \geq x, \quad 0 \leq x < \pi/2.$

Ejercicio 20 Calcular los límites siguientes:
a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1 + x - e^x}{x^2}$
b) $\lim_{x\to 0} (cos\ x)^{1/x^2}$
c) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x - sen\ x}{x + sen\ x}.$

Ejercicio 21 Escribir los desarrollos de McLaurin de las funciones

$$e^x,\ \log(1+x),\ \operatorname{sen} x,\ \cos x,\ sh\ x,\ ch\ x.$$

Ejercicio 22 Calcular aproximaciones cúbicas de los valores siguientes acotando el error cometido:
a) $e^{0.4}$
b) $\cos\ 0.2 \quad \text{(rad)}$
c) $\log 2$.

Ejercicio 23 Calcular el valor de $\log 3$ con un error menor que dos centésimas.

Ejercicio 24 Usando el desarrollo de Taylor de la función $\log(1+x)$, demostrar que

$$\log 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Cuántos términos de esta serie son necesarios para obtener una aproximación de $\log 2$ con seis cifras decimales exactas?

Ejercicio 25 Hallar en cada uno de los siguientes casos la derivada de la función F.

$(a)\;\; F(x) = \int_1^x x\frac{\text{sen } t}{t}\, dt$ $\qquad (b)\;\; F(x) = \int_x^3 (u+2)^4\, du$

$(c)\;\; F(x) = \int_x^1 e^{-t^2}\, dt$ $\qquad (d)\;\; F(x) = \int_1^{x^2} \frac{e^t}{t}\, dt$

$(e)\;\; F(x) = \int_1^x \Big(\int_0^y \frac{t}{\sqrt{1+t^2+t^4}}\, dt\Big)\, dy$ $\qquad (f)\;\; F(x) = \cos\Big(\int_1^{x^2} \sqrt[3]{t^2+t+1}\, dt\Big)$

$(g)\;\; F(x) = \int_0^{\text{sen } x} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(2-t^2)}}$ $\qquad (h)\;\; F(x) = \int_0^{\int_2^{x^2} \frac{\log t}{t-1}\, dt} \cos t^2\, dt.$

Ejercicio 26 Calcular los valores de las siguientes integrales definidas.

(a) $\int_{-2}^4 (x-1)(x-2)\, dx.$

(b) $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\, dx.$

(c) $\int_1^5 e^x \cos x\, dx.$

(d) $\int_0^2 f(x)\, dx$ donde $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \le x \le 1; \\ 2-x & \text{si } 1 < x \le 2. \end{cases}$

(e) $\int_0^1 f(x)\, dx$ donde $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \le x \le c; \\ c\frac{1-x}{1-c} & \text{si } c < x \le 1; \end{cases}$ siendo c un número real tal que $0 < c < 1$.

Ejercicio 27 Probar que si $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}]$, entonces

$$\frac{1}{4} \le \text{sen}^4 x \le \frac{9}{16}$$

y haciendo uso de estas desigualdades, estimar

$$\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{1}{3+\text{sen}^4 x} dx$$

Ejercicio 28 Estimar, con dos cifras decimales exactas,

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx.$$

Ejercicio 29 Calcular el área limitada por las gráficas de las funciones f y g en el intervalo que se indica.

(a) $f(x) = \cos x, \quad g(x) = \text{sen } x \quad \text{en} \quad [0, \pi/4].$

(b) $f(x) = x^3, \quad g(x) = x\sqrt{x^2+2} \quad \text{en} \quad [0, 1].$

(c) $f(x) = e^x, \quad g(x) = e^{-x} \quad \text{en} \quad [-1, 1].$

(d) $f(x) = \frac{1}{2}\text{sen } 2x, \quad g(x) = \text{sen } x$ entre el origen y el menor punto de corte positivo.

Ejercicio 30 Calcular el área de un círculo de radio R y de una elipse desemiejes a y b.

Ejercicio 31 Calcular el área común a los círculos

$$x^2 + y^2 = 9 \quad \text{y} \quad (x-3)^2 + y^2 = 9.$$

Ejercicio 32 Hallar el área limitada por un bucle de la lemniscata de Bernouilli de ecuación

$$\rho^2 = a^2 \cos(2\omega).$$

Ejercicio 33 Hallar el area limitada por la cardioide de ecuación

$$\rho = a(1 + \cos \omega).$$

Ejercicio 34 Hallar el area limitada por un lazo de la cicloide de ecuación

$$\begin{cases} x = a(t - \text{sen } t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

y la longitud del mismo lazo.

Ejercicio 35 Longitud de la primera espira de la espiral de Arquímedes $\rho = k\omega$.

Ejercicio 36 Hallar la longitud de un paso de la hélice

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \,\text{sen } t \\ z = kt \end{cases}$$

Ejercicio 37 Volumen del cuerpo limitado por la superficie que genera un arco de cicloide al girar alrededor de su base.

Ejercicio 38 El recinto limitado por

$$\begin{cases} y = xe^x \\ x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

gira alrededor del eje de abcisas. Hallar el volumen del cuerpo generado.

Ejercicio 39 Las secciones transversales de un sólido por planos transversales al eje X son cuadrados con centro dicho eje. Si al cortar por el plano perpendicular en el punto de abcisa x se obtiene un cuadrado de lado $2x^2$, cuál será el volumen del sólido limitado por $x = 0$ y $x = a$?

Ejercicio 40 La base de un sólido es un triángulo de vértices $(0, 0), (0, 1), (1, 1)$ en el plano XY. Sus secciones por planos perpendiculares al eje X son cuadrados. Calcular el volumen del sólido.

Ejercicio 41 La base de un sólido es el círculo de centro $(0, 0)$ y radio 1 en el plano XY. Sus secciones por planos perpendiculares al eje X son cuadrados. Calcular el volumen del sólido.

Ejercicio 42 Establecer por qué las integrales siguientes son impropias, estudiar si son convergentes o divergentes, y calcular las que sean convergentes.

$$
\begin{array}{lll}
i) \displaystyle\int_0^1 \log x dx & ii) \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x \log x} dx & iii) \displaystyle\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}} dx \\
iv) \displaystyle\int_0^1 x \log x dx & v) \displaystyle\int_0^\infty e^{-x} dx & vi) \displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{e^x}} dx \\
vii) \displaystyle\int_2^\infty \frac{\log x}{x} dx & viii) \displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x(\log x)^2} dx & ix) \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\
x) \displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-x} dx & xi) \displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^2} dx & xii) \displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{(x+4)\sqrt{x}} dx
\end{array}
$$

Ejercicio 43 *Calcular aproximaciones a los valores de las integrales siguientes usando el método de Simpson.*

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{5+x^3}}$

(b) $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\, dx$

(c) $\displaystyle\int_0^2 \frac{\operatorname{sen} x^2}{e^x}\, dx$

(d) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$

(e) $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{2+x^4}\, dx$

Ejercicio 44 Hallar el dominio de definición de las siguientes funciones:

i) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$

ii) $f(x,y) = \log(xy)$

iii) $f(x,y) = \sqrt{x+3y}$

iv) $f(x,y)\dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Ejercicio 45 Hallar la gráfica y curvas de nivel de las siguientes funciones:

i) $f(x,y) = 2x+3y$.

ii) $f(x,y) = x^2+y^2$.

iii) $f(x,y) = 2xy$.

Ejercicio 46 Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

i) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(0,0) = 0$.

ii) $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(0,0) = 0$.

iii) $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(0,0) = 0$.

iv) $f(x,y) = \log(x^2+y^2)$ si $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(0,0) = 0$.

Ejercicio 47 Calcular las parciales de las siguientes funciones en el origen:

i) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(0,0) = 0$.

ii) $f(x,y) = \dfrac{x^4-y^4}{x^2+xy+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(0,0) = 0$.

Ejercicio 48 Calcular el vector gradiente de las siguientes funciones en el punto que se indica:

i) $f(x,y,z) = 2x \log y - z^2y^2$ en $(1,1,0)$.

ii) $f(x,y,z) = \dfrac{xz}{\sqrt{x^2+y^2}}$ en $(1,-1,1)$.

iii) $f(x,y) = x^2 + \log\sqrt{xy}$ en $(2,1)$.

iv) $f(x,y) = \log\dfrac{1}{xy}$ en $(5,\sqrt{2})$.

v) $f(x,y) = \log(x^2+2y+1) + \displaystyle\int_0^x \cos(t^2)dt$ en $(1,1)$.

Ejercicio 49 La temperatura de cada uno de los puntos de una placa cuadrada viene determinada por la función $T(x,y) = (x-1)^3(y-2)^2$. Se desea conocer cuáles son, en el punto $(0,0)$, las direcciones de mayor crecimiento y decrecimiento de la temperatura.

Ejercicio 50 Denotemos por $z = 2e^{-x^2} + e^{-3y^2}$ la altura de una montaña en la posición (x,y). ¿En qué dirección desde $(1,0)$ deberíamos comenzar a caminar para escalar lo más rápidamente posible?

Ejercicio 51 Hallar el plano tangente a las gráficas de las funciones:

i) $f(x,y) = 2xy^2 + x^2y$ en el punto $(1,-1,1)$.

ii) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x^2y + 3xy^2$ en el punto $(1,1,2)$.

Ejercicio 52 Calcular los extremos relativos de las funciones:

i) $f(x,y) = xye^{x+2y}$.

ii) $f(x,y) = y^2 + x^2y + x^4$.

iii) $f(x,y) = xy^2(1-x-y)$.

iv) $f(x,y) = (x-y^2)(x-y^3)$.

v) $f(x,y) = 2x^2 + y + 3$.

vi) $f(x,y) = 3x^3 + y^2 + 3xy$.

vii) $f(x,y) = y^2e^{4x+1}$.

Ejercicio 53 Calcular los extremos absolutos de las siguientes funciones en los recintos indicados:

i) $f(x,y) = x^2 + y^2$ en $\{(x,y) : 4x^2 + 9y^2 = 1\}$.

ii) $f(x,y,z) = 2x^2 + yz$ en $\{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

iii) $f(x,y,z) = 3x^2 + y^2 + xz$ en $\{(x,y,z) : x^2 + y^2 \leq 1, 2x + z = 0\}$.

iv) $f(x,y) = 3x^2y + 2y^3$ en $\{(x,y) : 2x^2 + y^2 \leq 1, y + x \geq 0\}$.