Examen de Estadística I. 08-06-2007.

1. X, lluvia en Valencia en l/m^2.

a) Calculamos el índice de Gini de X.

$[L_{i-1}, L_i)$	x_i	n_i	N_i	$x_i n_i$	$\sum_{j=1}^{i} x_j n_j$	$p_i = \frac{N_i}{N} 100$	$q_i = \frac{\sum_{j=1}^{i} x_j n_j}{N\overline{x}} 100$
$[300, 380)$	340	4	4	1360	1360	$22.\widehat{2}$	17.0854
$[380, 460)$	420	7	11	2940	4300	$61.\widehat{1}$	54.0201
$[460, 540)$	500	5	16	2500	6800	$88.\widehat{8}$	85.4271
$[540, 620)$	580	2	18	1160	7960	100	100

$I_G = \frac{\sum_{i=1}^{I}(p_i - q_i)}{\sum_{i=1}^{I-1} p_i} = \frac{(22.\widehat{2}-17.0854)+(61.\widehat{1}-54.0201)+(88.\widehat{8}-85.4271)+(100-100)}{22.\widehat{2}+61.\widehat{1}+88.\widehat{8}} = \underline{0.0911}$, que como resulta muy cercano a cero, indica que los litros de lluvia por metro cuadrado en Valencia están casi igualmente distribuidos entre las distintas estaciones meteorológicas.

b) Y, lluvia en Alicante en l/m^2.
Z, lluvia en Castellón en l/m^2.
W, lluvia en la Comunidad Valenciana en l/m^2.
$\overline{y} = 445, n_y = 10, \overline{z} = 513, n_z = 6$
$\overline{w} = \frac{1}{n_x+n_y+n_z}(\overline{x}n_x + \overline{y}n_y + \overline{z}n_z) = \frac{7960+(445)(10)+(513)(6)}{18+10+6} = \underline{455.5294}$

c) $y_0 = 492, z_0 = 415$
$\frac{y_0 - \overline{y}}{s_y} = 0.198, \frac{z_0 - \overline{z}}{s_z} = -1.782$
De donde $s_y = \frac{492-445}{0.198} = 237.\widehat{37} > 54.9944 = \frac{415-513}{-1.782} = s_z$. Por lo tanto, podemos afirmar que en Castellón fue más regular la lluvia en el año 2006.

2. Y, salario anual en euros.
$y_1 = 30000, y_2 = 32000$, $IPC_{06}^{02} = 130$, $IPC_{07}^{02} = 134$

El salario real del año 2006 en euros de 2006 es, obviamente, $\underline{30000}$. El IPC del año 2007 con base el año 2006 puede ser obtenido mediante una sencilla regla de tres, $IPC_{07}^{06} = \frac{IPC_{07}^{02} IPC_{06}^{06}}{IPC_{06}^{02}} = \frac{(134)(100)}{130} = 103.0769$, luego la estimación de los salarios del año 2007 en euros constantes de 2006 es $\hat{y}_2 = \frac{y_2}{IPC_{07}^{06}/100} = \underline{31044.7761}$.

El salario ha aumentado un $\frac{32000-30000}{30000} 100 = 6.\widehat{6}$ % en el último año, mientras que el IPC ha aumentado un 3.0769 % en el mismo período, es decir, el trabajador no ha perdido poder adquisitivo.

3. Y_t, ventas en el período t en miles de euros.

	t	y_t	t^2	$t\,y_t$
	0	3596	0	0
	1	3496	1	3496
	2	3671	4	7342
	3	3858	9	11574
	4	4200	16	16800
$\sum_{i=1}^{5}$	10	18821	30	39212
$\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}$	2	3764.2	6	7842.4

a) $y_t^* = a + bt$

$b = \frac{s_{ty}}{s_t^2} = \frac{7842.4-(2)(3764.2)}{6-2^2} = \frac{314}{2} = 157$, $a = \overline{y} - b\overline{t} = 3764.2 - (157)(2) = 3450.2$

$\underline{y_t^* = 3450.2 + 157\,t \text{ (t, años; origen, 2002)}}$.

Las ventas tienen una componente fija de 3450.2 euros, independiente del período temporal, y un incremento anual de 157 euros.

b) $IVE(1C) = 1.1,\ IVE(3C) = 1.3$

$y_t^* = \frac{3450.2}{3} + \frac{157}{3^2}\,t = 1150.0\widehat{6} + 17.\widehat{4}\,t$ (t, cuatrimestres; origen, segundo cuatrimestre de 2002).

Del segundo cuatrimestre de 2002 al tercero de 2007 hay $(5)(3) + 1 = 16$ cuatrimestres.

$y_{16}^* = 1150.0\widehat{6} + (17.\widehat{4})(16) = 1429.1\widehat{7}$

$\hat{y}_{3C07} = y_{16}^*\,IVE(3C) = \underline{1857.93\widehat{1}}$

4. X, vida de un pequeño electrodoméstico en años.

$\mu = 5$

a) $X \sim Ex(\mu = 5),\ f(x) = \frac{1}{5}\exp\left(-\frac{1}{5}x\right),\ x > 0$

$p(X > \mu = 5) = \int_5^{+\infty} \frac{1}{5}\exp\left(-\frac{1}{5}x\right)\,dx = -\left[\exp\left(-\frac{1}{5}x\right)\right]_5^{+\infty} = \underline{0.3679}$.

b) $X \sim N(\mu, \sigma)$

$p(X > \mu) = 0.5$, dado que la distribución Normal es simétrica con respecto a su media y consecuentemente la probabilidad sería mayor que en el caso Exponencial.

c) Y, número de productos, de entre 10, que duran menos de tres años.

$Y \sim Bi(10, 0.05),\ f(y) = \binom{10}{y}(0.05)^y(1-0.05)^{10-y},\ y = 0, \ldots, 10$

$p(Y > 8) = p(Y = 9) + p(Y = 10) = \binom{10}{9}(0.05)^9(0.95)^1 + \binom{10}{10}(0.05)^{10} = \underline{1.9 \times 10^{-11}}$

5. X, presupuesto de la marató i mitja en miles de euros.

Y, subvención de la marató i mitja en miles de euros.

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} 40 \\ 18 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0.5 \\ 0.5 & 2 \end{pmatrix}\right)$$

a) $T = X - 2Y$, presupuesto menos el doble de la subvención en miles de euros.

$T \sim N(\mu_t = \mu_x - 2\mu_y = 40 - (2)(18) = 4, \sigma_t^2 = \sigma_x^2 + (-2)^2\sigma_y^2 + (2)(-2)\sigma_{xy} = 3 + (4)(2) + (2)(-2)(0.5) = 9)$

$p(X > 2Y) = p(T > 0) = p(Z_t > \frac{0-4}{\sqrt{9}}) = p(Z_t > -1.\widehat{3}) = p(Z_t < 1.\widehat{3}) = \underline{0.909}$, donde

$Z_t = \frac{T-\mu_t}{\sigma_t} \sim N(0,1)$.

b) V_1, número de atletas, de entre los 10, pertenecientes a la categoría $A_1 = \{$abandono en Les Useres$\}$, $p(A_1) = 0.1$.

V_2, número de atletas, de entre los 10, pertenecientes a la categoría $A_2 = \{$abandono en Sant Miquel de les Torrecelles$\}$, $p(A_2) = 0.17$.

V_3, número de atletas, de entre los 10, pertenecientes a la categoría $A_3 = \{$llegado a meta$\}$, $p(A_3) = 1 - 0.1 - 0.17 = 0.73$.

Admitiendo independencia en cuanto a la clasificación en las tres categorías de los 10 atletas de carreraspopulares.com, se tiene que el vector aleatorio cuyas componentes recogen el número de atletas en cada una de las posibles categorías sigue una distribución de probabilidad Multinomial.

$(V_1, V_2, V_3)' \sim Mn(n = 10, \boldsymbol{\theta} = (0.1, 0.17, 0.73)')$

$p(V_1 = 1, V_2 = 1, V_3 = 8) = \frac{10!}{1!\,1!\,8!}(0.1)^1(0.17)^1(0.73)^8 = \underline{0.1234}$