Examen de Estadística I. 08-06-2010.

1. X, número de automóviles del modelo A vendidos mensualmente.
Y, número de automóviles del modelo B vendidos mensualmente.
$\mu_x = 12$, $\sigma_x = 9$, $p_x = 15000$, $\mu_y = 20$, $\sigma_y = 10$, $p_y = 10000$

a) $U = p_x X = 15000\, X$, ingresos mensuales por las ventas del modelo A en euros.
$\mu_u = 15000\, \mu_x = \underline{180000}$, $\sigma_u = 15000\, \sigma_x = \underline{135000}$

b) $V = p_y Y = 10000\, Y$, ingresos mensuales por las ventas del modelo B en euros.
$T = U + V$, ingresos mensuales por las ventas de ambos modelos en euros.
U y V independientes.
$\mu_t = \mu_u + \mu_v = 180000 + (10000)(20) = \underline{380000}$
$\sigma_t^2 = \sigma_u^2 + \sigma_v^2 = (135000)^2 + (10000)^2(10)^2 = 28225000000 \Rightarrow \sigma_t = \underline{168002.9762}$

c) $\rho_{xy} = \rho_{uv} = 0.6 \Rightarrow \sigma_{uv} = \rho_{uv}\, \sigma_u\, \sigma_v = (0.6)(135000)(100000) = 8100000000$
$\mu_t = \mu_u + \mu_v = \underline{380000}$
$\sigma_t^2 = \sigma_u^2 + \sigma_v^2 + 2\sigma_{uv} = 28225000000 + (2)(8100000000) = 44425000000 \Rightarrow \sigma_t = \underline{210772.3891}$

2. X, superficie en metros cuadrados.
Y, precio en euros.
$\overline{x} = 100$, $s_x = 20$, $\overline{y} = 240000$, $s_y = 50000$, $r_{xy} = 0.9$

a) $x_0 = 80$
$y^* = a + b\, x$
$b = \frac{s_{xy}}{s_x^2} = \frac{r_{xy}\, s_y}{s_x} = \frac{(0.9)(50000)}{20} = 2250$, $a = \overline{y} - b\overline{x} = 240000 - (2250)(100) = 15000$, luego $y^* = 15000 + 2250\, x$
$y_0^* = a + b\, x_0 = 15000 + (2250)(80) = \underline{195000}$, es decir, debería pedirse 195000 euros.

b) $R^2 = r_{xy}^2 = (0.9)^2 = 0.81$, que por su cercanía a uno indica que el ajuste realizado es razonablemente bueno. Entonces, la estimación lineal para el precio correspondiente a una vivienda de 110 metros cuadrados sería $15000 + (2250)(110) = 262500$ euros, cantidad bastante alejada de los 450000 que pide por lo que <u>la información que maneja el vendedor resulta poco creíble</u>.

3. Y_t, presupuesto en el período t en millones de euros.

	t	y_t	t^2	$t\, y_t$
	-2	300	4	-600
	-1	310	1	-310
	0	320	0	0
	1	360	1	360
	2	400	4	800
	3	450	9	1350
$\sum_{i=1}^{6}$	3	2140	19	1600
$\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}$	0.5	$356.\hat{6}$	$3.1\hat{6}$	$266.\hat{6}$

a) $y_t^* = a + b\, t$

$b = \frac{s_{ty}}{s_t^2} = \frac{266.\widehat{6}-(0.5)(356.\widehat{6})}{3.1\widehat{6}-(0.5)^2} = \frac{88.\widehat{3}}{2.91\widehat{6}} = 30.2857$, $a = \overline{y} - b\overline{t} = 356.\widehat{6} - (30.2857)(0.5) = 341.5238$
$\underline{y_t^* = 341.5238 + 30.2857\, t}$ (t, años; origen, 2007).

b) $IVE(1T) = 1.2,\ IVE(2T) = 0.6,\ IVE(4T) = 1.2$
$y_t^* = \frac{341.5238}{4} + \frac{30.2857}{4^2}\, t = 85.381 + 1.8929\, t$ (t, trimestres; origen, trimestre central de 2007).
Del trimestre central de 2007 al tercero de 2011 hay $(4)(4) + 0.5 = 16.5$ trimestres.
$y_{16.5}^* = 85.381 + (1.8929)(16.5) = 116.6131$
$IVE(3T) = 4 - IVE(1T) - IVE(2T) - IVE(4T) = 1$, luego
$\hat{y}_{3T11} = y_{16.5}^*\, IVE(3T) = \underline{116.6131}$

c) $y'_{-2} = \frac{y_{-2}}{IPC_{2005}^{2006}} 100 = \frac{300}{0.966} = 310.559$, presupuesto en el año 2005 en euros constantes de 2006.
$y'_2 = \frac{y_2}{IPC_{2009}^{2006}} 100 = \frac{400}{1.067} = 374.8828$, presupuesto en el año 2009 en euros constantes de 2006.
$\frac{y'_2 - y'_{-2}}{y'_{-2}} 100 = \underline{20.7122\%}$

4. X, desnivel positivo de una carrera de montaña en Castellón.
$X \sim U(500, 2000),\ f(x) = \frac{1}{1500},\ x \in [500, 2000]$

a) $p(X > k) = 0.95 \Leftrightarrow \int_k^{+\infty} f(x)\, dx = 0.95 \Leftrightarrow \int_k^{2000} \frac{1}{1500}\, dx = 0.95 \Leftrightarrow \frac{2000-k}{1500} = 0.95 \Leftrightarrow k = \underline{575}$

b) Y, carreras de montaña, de entre las 5 de junio, que superan el kilómetro de desnivel positivo.
$Y \sim Bi(n = 5, \theta),\ f(y) = \binom{5}{y} \theta^y (1-\theta)^{5-y},\ y = 1, \ldots, 5$
$\theta = p(X > 1000) = \int_{1000}^{2000} \frac{1}{1500}\, dx = 0.\widehat{6}$
$p(Y \geq 3) = p(Y = 3) + p(Y = 4) + p(Y = 5) = \binom{5}{3} (0.\widehat{6})^3 (0.\widehat{3})^2 + \binom{5}{4} (0.\widehat{6})^4 (0.\widehat{3})^1 +$
$(0.\widehat{6})^5 = \underline{0.7901}$

5. X, ventas diarias de libros en euros.
Y, ventas diarias de discos en euros.

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} 1400 \\ 900 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 60^2 & 3000 \\ 3000 & 80^2 \end{pmatrix} \right)$$

a) $\gamma_0(X) = \frac{\sigma_x}{\mu_x} = \frac{60}{1400} = \underline{0.0429 < 0.0\hat{8}} = \frac{80}{900} = \frac{\sigma_y}{\mu_y} = \gamma_0(Y)$, es decir, los ingresos por ventas de libros presentan mayor regularidad que los correspondientes a los discos.

b) $D = 0.1X - 0.15Y$, diferencia de beneficios diarios entre las ventas de libros y discos en euros.
$D \sim N(\mu_d, \sigma_d^2)$
$\mu_d = 0.1\mu_x - 0.15\mu_y = (0.1)(1400) - (0.15)(900) = 5$
$\sigma_d^2 = (0.1)^2\sigma_x^2 + (0.15)^2\sigma_y^2 - (2)(0.1)(0.15)\sigma_{xy} = (0.1)^2(60)^2 + (0.15)^2(80)^2 - (2)(0.1)(0.15)(3000)$
$= 90$
$p(D < 0) = p\left(Z_d < \frac{0-5}{\sqrt{90}} = -0.527\right) = p(Z_d > 0.527) = \underline{0.3083}$, donde $Z_d = \frac{D-\mu_d}{\sigma_d} \sim N(0, 1)$.

c) Las ventas de libros durante seis días, admitiendo independencia entre las mismas, puede considerarse una variable aleatoria suma de Normales independientes y por tanto con distribución de probabilidad también Normal. Por consecuente y por la simetría de la distribución Normal con respecto a la media, la probabilidad de que supere su valor medio es $\underline{0.5}$.