Examen de Estadística I. 01-09-2005.

1. X, número de mesas.
Y, ingresos diarios en euros.

a) Por ejemplo, $n_{11} = \underline{6 \neq \frac{(9)(10)}{23}} = \frac{n_{1\cdot}\, n_{\cdot 1}}{N}$, luego no se cumple la condición de independencia y las variables son dependientes.

b) $\overline{y}_{\,|\,X=8} = \frac{1}{n_{3\cdot}} \sum_{j=1}^{3} y_j\, n_{3j} = \frac{(100)(2)+(200)(3)+(300)(2)}{7} = \underline{200}$
$s^2_{y\,|\,X=8} = \frac{1}{n_{3\cdot}} \sum_{j=1}^{3} y_j^2\, n_{3j} - \overline{y}^2_{\,|\,X=8} = \frac{(100)^2(2)+(200)^2(3)+(300)^2(2)}{7} - 200^2 = \underline{5714.2857}$

c) $\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{4} x_i\, n_{i\cdot} = \frac{(4)(9)+(6)(4)+(8)(7)+(10)(3)}{23} = 6.3478$
$s^2_x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{4} x_i^2\, n_{i\cdot} - \overline{x}^2 = \frac{(4)^2(9)+(6)^2(4)+(8)^2(7)+(10)^2(3)}{23} - (6.3478)^2 = 4.9644$
$\overline{y} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{3} y_j\, n_{\cdot j} = \frac{(100)(10)+(200)(8)+(300)(5)}{23} = 178.2609$
$s^2_y = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{3} y_j^2\, n_{\cdot j} - \overline{y}^2 = \frac{(100)^2(10)+(200)^2(8)+(300)^2(5)}{23} - (178.2609)^2 = 6324.1107$
$g_0(X) = \frac{s_x}{\overline{x}} = \frac{\sqrt{4.9644}}{6.3478} = \underline{0.351 < 0.4461} = \frac{\sqrt{6324.1107}}{178.2609} = \frac{s_y}{\overline{y}} = g_0(Y)$, es decir, <u>los ingresos diarios tienen una menor regularidad que el número de mesas</u>.

2. Y, producto interior bruto a precios de mercado en miles de millones de euros.
X_1, exportaciones de bienes y servicios en miles de millones de euros.
X_2, importaciones de bienes y servicios en miles de millones de euros.
$\overline{y} = 556.6$, $\overline{x}_1 = 152.6$, $\overline{x}_2 = 156.8$, $s^2_y = 8569.5$, $s^2_{x_1} = 1460$, $s^2_{x_2} = 1931.1$, $s_{x_1x_2} = 1672.8$, $s_{x_1y} = 3489$, $s_{x_2y} = 3997.8$

a) $y^* = a + bx_1$
$b = \frac{s_{x_1y}}{s^2_{x_1}} = \frac{3489}{1460} = 2.3897$, $a = \overline{y} - b\overline{x}_1 = 556.6 - \frac{3489}{1460}(152.6) = 191.9278$
$\underline{y^* = 191.9278 + 2.3897\, x_1}$

b) $x_1^0 = 207$
$y_0^* = a + b\, x_1^0 = 191.9278 + (2.3897)(207) = \underline{686.5957}$
$R^2 = r^2_{x_1y} = \frac{s^2_{x_1y}}{s^2_{x_1}\, s^2_y} = \frac{(3489)^2}{(1460)(8569.5)} = \underline{0.973}$, coeficiente que por su gran proximidad a uno indica que el ajuste lineal realizado es <u>casi perfecto</u>.

c) $y_1 = 653.9$, $IPC_{03}^{01} = 106.68$
$\hat{y}_0 = \frac{y_0^*}{\frac{IPC_{03}^{01}}{100}} = \frac{686.5957}{1.0668} = 643.603$
$\frac{\hat{y}_0 - y_1}{y_1} = \frac{643.603 - 653.9}{653.9} = \underline{-0.0157}$, es decir, el producto interior bruto ha disminuido en términos reales poco más del 1.5% en el período 2001-2003, lo cual puede ser considerado como un <u>cierto estancamiento</u>.

d) $Z = X_1 - X_2$, saldo de intercambios exteriores de bienes y servicios en miles de millones de euros.
$\overline{z} = \overline{x}_1 - \overline{x}_2 = 152.6 - 156.8 = \underline{-4.2}$, $s^2_z = s^2_{x_1} + s^2_{x_2} - 2s_{x_1x_2} = 1460 + 1931.1 - (2)(1672.8) = \underline{45.5}$

3. Y_t, ventas anuales en el período t en millones de euros.

$y_t^* = 1.26 + 0.27\,t$ (t, años; origen, 2000).

a) $y_t^* = \frac{1.26}{3} + \frac{0.27}{3^2}\,t = \underline{0.42 + 0.03\,t}$ (t, cuatrimestres; origen, segundo cuatrimestre 2000).

b) $IVE(1C) = 0.5$ e $IVE(3C) = 0.6$
$IVE(2C) = 3 - IVE(1C) - IVE(3C) = 3 - 0.5 - 0.6 = 1.9$
Del segundo cuatrimestre de 2000 al segundo de 2006 hay $(6)(3) = 18$ cuatrimestres.
$y_{18}^* = 0.42 + (0.03)(18) = 0.96$
$\hat{y}_{2C06} = y_{18}^*\,IVE(2C) = \underline{1.824}$

4. X, número de visitas por minuto a carreraspopulares.com.
$X \sim Po(\lambda)$, $f(x) = \exp(-\lambda)\frac{\lambda^x}{x!}$, $x \in \mathbb{N}$, $\mu = \lambda = 2$

a) $p(X > 3) = 1 - p(X \leq 3) = 1 - \exp(-2)\left[\frac{2^0}{0!} + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!}\right] = 1 - \exp(-2)\left[1 + 2 + \frac{4}{2} + \frac{8}{6}\right] = \underline{0.1429}$

b) Y, número de minutos, de entre 5, en los que no se producen visitas.
$Y \sim Bi(5, \theta)$, $f(y) = \begin{pmatrix} 5 \\ y \end{pmatrix} \theta^y (1-\theta)^{5-y}$, $y = 0, 1, 2, 3, 4, 5$
$\theta = p(X = 0) = exp(-2) = 0.1353$
$p(Z = 2) = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} (0.1353)^2 (0.9647)^3 = \underline{0.1184}$

5. X, número de piezas de ropa vendidas semanalmente en la primera tienda.
Y, número de piezas de ropa vendidas semanalmente en la segunda tienda.
$U = 90X - 1000$, beneficio semanal de la primera tienda en euros.
$V = 90Y - 890$, beneficio semanal de la segunda tienda en euros.

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} 35 \\ 27 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}\right)$$

a) $T = U - V = 90(X - Y) - 110 \sim N(\mu_t = 90(\mu_x - \mu_y) - 110 = 610, \sigma_t^2 = (90)^2(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\sigma_{xy}) = 275400)$

$p(U > V) = p(T > 0) = p\left(Z > \frac{0-610}{\sqrt{275400}}\right) = p(Z > -1.1624) = p(Z < 1.1624) = \underline{0.877}$, donde $Z = \frac{T - \mu_t}{\sigma_t} \sim N(0,1)$. Se tiene que más del 87 % de las semanas el beneficio de la primera tienda es mayor que el de la segunda, por lo tanto no es aceptable afirmar que los beneficios semanales de ambas tiendas son prácticamente iguales.

b) $p(X > 30) = p\left(Z_x > \frac{30-35}{5}\right) = p(Z_x > -1) = p(Z_x < 1) = 0.8413$, donde $Z_x = \frac{X - \mu_x}{\sigma_x} \sim N(0,1)$.

$p(Y < 20) = p\left(Z_y < \frac{20-27}{3}\right) = p(Z_y < -2.\hat{3}) = 1 - p(Z < 2.\hat{3}) = 0.0098$, donde $Z_y = \frac{Y - \mu_y}{\sigma_y} \sim N(0,1)$.

Como las variables X e Y están incorreladas y además en una distribución Binormal se tiene que incorrelación equivale a independencia, entonces $p(X > 30, Y < 20) = p(X > 30)p(Y < 20) = (0.8413)(0.0098) = \underline{0.0082}$.

c) $p(\mu_x - a < X < \mu_x + a) = p\left(\frac{-a}{5} < Z_x < \frac{a}{5}\right) = 0.8 \Leftrightarrow p\left(Z_x > \frac{a}{5}\right) = 0.1 \Leftrightarrow p\left(Z_x < \frac{a}{5}\right) = 0.9 \Leftrightarrow \frac{a}{5} = 1.28 \Leftrightarrow a = 6.4$, de modo que el intervalo centrado en la media que tiene una probabilidad del 80% de contener a las ventas de la primera tienda es $[35 - 6.4, 35 + 6.4] = \underline{[28.6, 41.4]}$.