Examen de Estadística I. 01-09-2005.

1. X, número de mesas.
Y, ingresos diarios en euros.

a) Por ejemplo, $\underline{n_{11} = 6 \neq \frac{(9)(10)}{23}} = \frac{n_{1\cdot}\,n_{\cdot 1}}{N}$, luego no se cumple la condición de independencia y las variables son dependientes.

b) $\overline{y}_{\,|\,X=8} = \frac{1}{n_{3\cdot}} \sum_{j=1}^{3} y_j\, n_{3j} = \frac{(100)(2)+(200)(3)+(300)(2)}{7} = \underline{200}$
$s^2_{y\,|\,X=8} = \frac{1}{n_{3\cdot}} \sum_{j=1}^{3} y_j^2\, n_{3j} - \overline{y}^2_{\,|\,X=8} = \frac{(100)^2(2)+(200)^2(3)+(300)^2(2)}{7} - 200^2 = \underline{5714.2857}$

c) $\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{4} x_i\, n_{i\cdot} = \frac{(4)(9)+(6)(4)+(8)(7)+(10)(3)}{23} = 6.3478$
$s_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{4} x_i^2\, n_{i\cdot} - \overline{x}^2 = \frac{(4)^2(9)+(6)^2(4)+(8)^2(7)+(10)^2(3)}{23} - (6.3478)^2 = 4.9644$
$\overline{y} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{3} y_j\, n_{\cdot j} = \frac{(100)(10)+(200)(8)+(300)(5)}{23} = 178.2609$
$s_y^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{3} y_j^2\, n_{\cdot j} - \overline{y}^2 = \frac{(100)^2(10)+(200)^2(8)+(300)^2(5)}{23} - (178.2609)^2 = 6324.1107$
$g_0(X) = \frac{s_x}{\overline{x}} = \frac{\sqrt{4.9644}}{6.3478} = \underline{0.351 < 0.4461} = \frac{\sqrt{6324.1107}}{178.2609} = \frac{s_y}{\overline{y}} = g_0(Y)$, es decir, <u>los ingresos diarios tienen una menor regularidad que el número de mesas</u>.

2. Y, producto interior bruto a precios de mercado en miles de millones de euros.
X_1, exportaciones de bienes y servicios en miles de millones de euros.
X_2, importaciones de bienes y servicios en miles de millones de euros.
$\overline{y} = 556.6$, $\overline{x}_1 = 152.6$, $\overline{x}_2 = 156.8$, $s_y^2 = 8569.5$, $s_{x_1}^2 = 1460$, $s_{x_2}^2 = 1931.1$, $s_{x_1x_2} = 1672.8$, $s_{x_1y} = 3489$, $s_{x_2y} = 3997.8$

a) $y^* = a + bx_1$
$b = \frac{s_{x_1y}}{s_{x_1}^2} = \frac{3489}{1460} = 2.3897$, $a = \overline{y} - b\overline{x}_1 = 556.6 - \frac{3489}{1460}(152.6) = 191.9278$
$\underline{y^* = 191.9278 + 2.3897\, x_1}$

b) $x_1^0 = 207$
$y_0^* = a + b\, x_1^0 = 191.9278 + (2.3897)(207) = \underline{686.5957}$
$R^2 = r_{x_1y}^2 = \frac{s_{x_1y}^2}{s_{x_1}^2\, s_y^2} = \frac{(3489)^2}{(1460)(8569.5)} = \underline{0.973}$, coeficiente que por su gran proximidad a uno indica que el ajuste lineal realizado es <u>casi perfecto</u>.

c) $y_1 = 653.9$, $IPC_{03}^{01} = 106.68$
$\hat{y}_0 = \frac{y_0^*}{\frac{IPC_{03}^{01}}{100}} = \frac{686.5957}{1.0668} = 643.603$
$\frac{\hat{y}_0 - y_1}{y_1} = \frac{643.603-653.9}{653.9} = \underline{-0.0157}$, es decir, el producto interior bruto ha disminuido en términos reales poco más del 1.5% en el período 2001-2003, lo cual puede ser considerado como un <u>cierto estancamiento</u>.

d) $Z = X_1 - X_2$, saldo de intercambios exteriores de bienes y servicios en miles de millones de euros.
$\overline{z} = \overline{x}_1 - \overline{x}_2 = 152.6 - 156.8 = \underline{-4.2}$, $s_z^2 = s_{x_1}^2 + s_{x_2}^2 - 2s_{x_1x_2} = 1460 + 1931.1 - (2)(1672.8) = \underline{45.5}$

3. Y_t, ventas anuales en el período t en millones de euros.

$y_t^* = 1.26 + 0.27\,t$ (t, años; origen, 2000).

a) $y_t^* = \frac{1.26}{3} + \frac{0.27}{3^2}\,t = \underline{0.42 + 0.03\,t}$ (t, cuatrimestres; origen, segundo cuatrimestre 2000).

b) $IVE(1C) = 0.5$ e $IVE(3C) = 0.6$
$IVE(2C) = 3 - IVE(1C) - IVE(3C) = 3 - 0.5 - 0.6 = 1.9$
Del segundo cuatrimestre de 2000 al segundo de 2006 hay $(6)(3) = 18$ cuatrimestres.
$y_{18}^* = 0.42 + (0.03)(18) = 0.96$
$\hat{y}_{2C06} = y_{18}^*\,IVE(2C) = \underline{1.824}$

4. X, número de visitas por minuto a carreraspopulares.com.
$X \sim Po(\lambda)$, $f(x) = \exp(-\lambda)\frac{\lambda^x}{x!}$, $x \in \mathbb{N}$, $\mu = \lambda = 2$

a) $p(X > 3) = 1 - p(X \leq 3) = 1 - \exp(-2)\left[\frac{2^0}{0!} + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!}\right] = 1 - \exp(-2)\left[1 + 2 + \frac{4}{2} + \frac{8}{6}\right] = \underline{0.1429}$

b) Y, número de minutos, de entre 5, en los que no se producen visitas.
$Y \sim Bi(5, \theta)$, $f(y) = \left(\begin{array}{c} 5 \\ y \end{array}\right)\theta^y(1-\theta)^{5-y}$, $y = 0, 1, 2, 3, 4, 5$
$\theta = p(X = 0) = exp(-2) = 0.1353$
$p(Z = 2) = \left(\begin{array}{c} 5 \\ 2 \end{array}\right)(0.1353)^2(0.9647)^3 = \underline{0.1184}$

5. X, número de piezas de ropa vendidas semanalmente en la primera tienda.
Y, número de piezas de ropa vendidas semanalmente en la segunda tienda.
$U = 90X - 1000$, beneficio semanal de la primera tienda en euros.
$V = 90Y - 890$, beneficio semanal de la segunda tienda en euros.
$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} 35 \\ 27 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}\right)$$

a) $T = U - V = 90(X - Y) - 110 \sim N(\mu_t = 90(\mu_x - \mu_y) - 110 = 610, \sigma_t^2 = (90)^2(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\sigma_{xy}) = 275400)$
$p(U > V) = p(T > 0) = p\left(Z > \frac{0-610}{\sqrt{275400}}\right) = p(Z > -1.1624) = p(Z < 1.1624) = \underline{0.877}$, donde $Z = \frac{T - \mu_t}{\sigma_t} \sim N(0,1)$. Se tiene que más del 87 % de las semanas el beneficio de la primera tienda es mayor que el de la segunda, por lo tanto <u>no es aceptable</u> afirmar que los beneficios semanales de ambas tiendas son prácticamente iguales.

b) $p(X > 30) = p\left(Z_x > \frac{30-35}{5}\right) = p(Z_x > -1) = p(Z_x < 1) = 0.8413$, donde $Z_x = \frac{X - \mu_x}{\sigma_x} \sim N(0,1)$.
$p(Y < 20) = p\left(Z_y < \frac{20-27}{3}\right) = p(Z_y < -2.\hat{3}) = 1 - p(Z < 2.\hat{3}) = 0.0098$, donde $Z_y = \frac{Y - \mu_y}{\sigma_y} \sim N(0,1)$.
Como las variables X e Y están incorreladas y además en una distribución Binormal se tiene que incorrelación equivale a independencia, entonces $p(X > 30, Y < 20) = p(X > 30)p(Y < 20) = (0.8413)(0.0098) = \underline{0.0082}$.

c) $p(\mu_x - a < X < \mu_x + a) = p\left(\frac{-a}{5} < Z_x < \frac{a}{5}\right) = 0.8 \Leftrightarrow p\left(Z_x > \frac{a}{5}\right) = 0.1 \Leftrightarrow p\left(Z_x < \frac{a}{5}\right) = 0.9 \Leftrightarrow \frac{a}{5} = 1.28 \Leftrightarrow a = 6.4$, de modo que el intervalo centrado en la media que tiene una probabilidad del 80% de contener a las ventas de la primera tienda es $[35 - 6.4, 35 + 6.4] = \underline{[28.6, 41.4]}$.