Examen de Estadística I. 07-09-2007.

1. X, gasto por estancia de un turista inglés en euros.
Y, gasto por estancia de un turista francés en euros.
$\overline{x} = 1000, s_x = 300, n_x = 200$
$\overline{y} = 600, s_y = 150, n_y = 100$

a) $g_0(X) = \frac{s_x}{\overline{x}} = \frac{300}{1000} = \underline{0.3 > 0.25} = \frac{150}{600} = \frac{s_y}{\overline{y}} = g_0(Y)$, es decir, <u>los turistas franceses presentan más homogeneidad en el gasto por estancia que los turistas ingleses</u>.

b) $x_0 = 950, y_0 = 550$
$\frac{x_0-\overline{x}}{s_x} = \frac{950-1000}{300} = \underline{-0.1\widehat{6} > -0.\widehat{3}} = \frac{550-600}{150} = \frac{y_0-\overline{y}}{s_y}$, por lo que podemos afirmar que <u>el turista inglés pagó una factura más elevada</u>.

c) W, gasto por estancia de un turista en euros.
$\overline{w} = \frac{1}{n_x+n_y}(\overline{x}n_x + \overline{y}n_y) = \frac{(1000)(200)+(600)(100)}{200+100} = \underline{866.\widehat{6}}$

2. Y_t, ventas en el período t en miles de euros.
$y_t = 3\,t + 180$ (t, años; origen, 2000).
$IVE(1T) = 1.2,\ IVE(2T) = 1,\ IVE(3T) = 0.4$

a) $s_t = 3, s_y = 9.487$
$y_7 = (3)(7) + 180 = \underline{201}$
$R^2 = r_{ty}^2 = \frac{b^2\,s_t^2}{s_y^2} = \frac{3^2\,3^2}{(9.487)^2} = \underline{0.9}$, coeficiente que por su proximidad a uno indica que la predicción realizada es <u>muy fiable</u>.

b) $y_t = \frac{3}{4^2}\,t + \frac{180}{4} = 0.1875\,t + 45$ (t, trimestres; origen, trimestre central 2000).
Del trimestre central de 2000 al cuarto de 2007 hay $(7)(4) + 1.5 = 29.5$ trimestres.
$\hat{y}_{4T07} = y_{29.5} = (0.1875)(29.5) + 45 = \underline{50.5313}$

c) $IVE(4T) = 4 - IVE(1T) - IVE(2T) - IVE(3T) = 1.4$
$\hat{y}_{4T07} = y_{29.5}\ IVE(4T) = (50.5313)(1.4) = \underline{70.7438}$

3. Y_t, beneficio en el período t en millones de euros.

a) $y_0 = 2, y_2 = 2.4$
$P_{06}^{04}(p) = \frac{\sum_{i=1}^k p_i q_i}{\sum_{i=1}^k p_0 q_i} = \frac{(1800)(1050)+(1200)(1300)+(1350)(1020)}{(1300)(1050)+(900)(1300)+(1000)(1020)}\,100 = 135.7806$, por lo tanto el beneficio real del año 2006 en euros de 2004 es $\hat{y}_2 = \frac{y_2}{P_{06}^{04}(p)/100} = \frac{2.4}{1.3578} = 1.7676$. Obviamente, el beneficio real del año 2004 en euros de 2004 es $\hat{y}_0 = \underline{2 > 1.7676} = \hat{y}_2$, por lo que el beneficio real <u>fue mayor en el año 2004</u>.

b) $\frac{\hat{y}_2-\hat{y}_0}{\hat{y}_0}\,100 = \frac{1.7676-2}{2}\,100 = -11.6221$
Realmente, el beneficio <u>ha disminuido un 11.6221 %</u> en el período $2004 - 2006$.

4. X, número de trabajadores fallecidos diariamente.

$X \sim Po(\lambda),\ \mu = \lambda = 1.1,\ f(x) = \exp(-\lambda)\frac{\lambda^x}{x!},\ x \in \mathbb{N}$

a) $p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \exp(-1.1)\frac{(1.1)^0}{0!} = 1 - 0.3329 = \underline{0.6671}$

b) Y, número de trabajadores fallecidos semanalmente.

Asumiendo que $Y = \sum_{i=1}^{6} X_i$ es suma de variables aleatorias Poisson independientes, se tiene que $Y \sim Po(6\lambda) = Po(6.6)$.

$p(Y = 0) = \exp(-6.6)\frac{(6.6)^0}{0!} = \underline{0.0014}$

c) W, número de días, de entre los 6 laborables, en los que no fallece ningún trabajador.

$W \sim Bi(n = 6, \theta = p(X = 0) = 0.3329),\ f(w) = \left(\begin{array}{c} 6 \\ w \end{array} \right) \theta^w (1-\theta)^{6-w},\ w = 0, \ldots, 6$

$p(W = 6) = \left(\begin{array}{c} 6 \\ 6 \end{array} \right) (0.3329)^6 (0.6671)^0 = \underline{0.0014}$

5. X, número mensual de artículos vendidos de tipo A.

Y, número mensual de artículos vendidos de tipo B.

$\rho_{xy} = -0.8, p_x = 50, p_y = 40$

$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} 1100 \\ 900 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 120^2 & s_{xy} \\ s_{xy} & 90^2 \end{pmatrix}\right)$

a) $T = 50X - 40Y$, diferencia de ingresos en unidades monetarias.

$\sigma_{xy} = \rho_{xy}\, \sigma_x\, \sigma_y = (-0.8)(120)(90) = -8640$

$T \sim N(\mu_t = 50\mu_x - 40\mu_y = (50)(1100) - (40)(900) = 19000, \sigma_t^2 = (50)^2\sigma_x^2 + (40)^2\sigma_y^2 - (2)(50)(40)\sigma_{xy} = (50)^2(120)^2 + (40)^2(90)^2 - (2)(50)(40)(-8640) = 83520000)$

$p(50X > 40Y) = p(T > 0) = p(Z_t > \frac{0-19000}{\sqrt{83520000}}) = p(Z_t > -2.079) = p(Z_t < 2.079) = \underline{0.9812}$, donde $Z_t = \frac{T-\mu_t}{\sigma_t} \sim N(0,1)$.

b) $p(X < k) = 0.9 \Leftrightarrow p\left(\frac{X-\mu_x}{\sigma_x} < \frac{k-1100}{120}\right) = 0.9 \Leftrightarrow p\left(Z_x < \frac{k-1100}{120}\right) = 0.9 \Leftrightarrow \frac{k-1100}{120} = 1.28 \Leftrightarrow k = \underline{1253.6}$, donde $Z_x = \frac{X-\mu_x}{\sigma_x} \sim N(0,1)$

c) V_1, número de hogares, de entre los 10, pertenecientes a la categoría $A_1 = \{$prefiere producto A$\}$, $p(A_1) = 0.4$.

V_2, número de hogares, de entre los 10, pertenecientes a la categoría $A_2 = \{$prefiere producto B$\}$, $p(A_2) = 0.3$.

V_3, número de hogares, de entre los 10, pertenecientes a la categoría $A_3 = \{$prefiere producto C$\}$, $p(A_3) = 1 - 0.4 - 0.3 = 0.3$.

Admitiendo independencia en cuanto a la clasificación en las tres categorías de los 10 hogares seleccionados, se tiene que el vector aleatorio cuyas componentes recogen el número de hogares en cada una de las posibles categorías sigue una distribución de probabilidad Multinomial.

$(V_1, V_2, V_3)' \sim Mn(n = 10, \boldsymbol{\theta} = (0.4, 0.3, 0.3)')$

$p(V_1 = 4, V_2 = 3, V_3 = 3) = \frac{10!}{4!\,3!\,3!}(0.4)^4(0.3)^3(0.3)^3 = \underline{0.0784}$