Examen de Estadística I. 02-09-2009.

1. X, potencia de un coche en caballos de vapor.
Y, impuesto sobre el vehículo en euros.
$\overline{x} = 100$, $s_x = 20$, $y^* = 2x + 10$, $x^* = 0.5y - 5$

a) $b\,b' = r_{xy}^2 \Rightarrow r_{xy}^2 = (2)(0.5) = 1 \Rightarrow r_{xy} = \underline{1}$

b) $\overline{y} = 2\,\overline{x} + 10 = 2(100) + 10 = \underline{210}$
$s_{xy} = b\,s_x^2 = (2)(20)^2 = 800$, $b' = \frac{s_{xy}}{s_y^2} \Rightarrow s_y^2 = \frac{800}{0.5} = 1600 \Rightarrow s_y = \underline{40}$

c) $R^2 = r_{xy}^2 = \underline{1}$, que indica que el ajuste realizado es perfecto.

2.

a) $V_t' = \sum_{i=1}^3 q_{it}p_{i0}$, valor de los ingresos globales de aceites en euros constantes de 2004.
$V_0' = \sum_{i=1}^3 q_{i0}p_{i0} = (2.04)(16) + (0.84)(14) + (1.24)(17) = 65.48$
$V_1' = \sum_{i=1}^3 q_{i1}p_{i0} = (2.04)(15) + (0.84)(16) + (1.24)(18) = 66.36$
$\frac{V_1' - V_0'}{V_0'}100 = \underline{1.3439\%}$

b) $y^* = 59 + 2\,t$ (t, años; origen, 2000).
$IVE(2C) = 0.8$, $IVE(3C) = 1.2$
$y^* = \frac{59}{3} + \frac{2}{3^2}\,t = 19.\hat{6} + 0.\hat{2}\,t$ (t, cuatrimestres; origen, segundo cuatrimestre 2000).
Del segundo cuatrimestre de 2000 al primero de 2010 hay $(10)(3) - 1 = 29$ cuatrimestres.
$y_{29}^* = 19.\hat{6} + 0.\hat{2}(29) = 26.\hat{1}$
$IVE(1C) = 3 - IVE(2C) - IVE(3C) = 1$, luego $\hat{y}_{1C10} = y_{29} = \underline{26.\hat{1}}$, <u>dado que en el primer cuatrimestre no existe estacionalidad</u>.

3. X, salario de un trabajador de A en euros.
Y, salario de un trabajador de B en euros.
$\overline{x} = 14000$, $s_x = 500$, $x_0 = 15000$
$\overline{y} = 15000$, $s_y = 10000$, $y_0 = 20000$

a) $g_0(X) = \frac{s_x}{\overline{x}} = \frac{500}{14000} = \underline{0.0357 < 0.\hat{6}} = \frac{10000}{15000} = \frac{s_y}{\overline{y}} = g_0(Y)$, es decir, <u>la empresa A presenta mayor regularidad en los salarios de sus trabajadores que la empresa B</u>.

b) $\frac{x_0 - \overline{x}}{s_x} = \frac{15000 - 14000}{500} = \underline{2 > 0.5} = \frac{20000 - 15000}{10000} = \frac{y_0 - \overline{y}}{s_y}$, por lo que podemos afirmar que <u>la persona que trabaja en la empresa A tiene un mejor salario que el que trabaja en B</u>.

c) $Y = 1.1\,X$, salario del próximo año de un trabajador de A en euros.
$\overline{y} = (1.1)\overline{x} = \underline{15400}$, $s_y = (1.1)s_x = \underline{550}$

4. X, número de clientes diarios del restaurante.
$X \sim Po(\lambda_1)$, $\mu_x = \lambda_1 = 20$, $f(x) = \exp(-\lambda_1)\frac{\lambda_1^x}{x!}$, $x \in \mathbb{N}$

a) $\sigma = \sqrt{20} = \underline{4.4721}$

b) $p(X = 20) = \exp(-20)\frac{(20)^{20}}{20!} = \underline{0.0888}$

c) W, número de días, de entre los 5 laborables, que pueden ser considerados buenos.

$p(19 \leq X \leq 21) = p(X = 19) + p(X = 20) + p(X = 21) = \exp(-20)\left(\frac{(20)^{19}}{19!} + \frac{(20)^{20}}{20!} + \frac{(20)^{21}}{21!}\right) = 0.2623$

$W \sim Bi(n = 5, \theta = 0.2623)$, $f(w) = \left(\begin{array}{c} 5 \\ w \end{array}\right)\theta^w(1-\theta)^{5-w}$, $w = 0, \ldots, 5$

$p(W = 0) = (0.7377)^5 = \underline{0.2185}$

d) Y, número de clientes diarios del otro restaurante.

$Y \sim Po(\lambda_2)$, $\mu_y = \lambda_2 = 25$

Asumiendo que el número de clientes diarios de un restaurante nada tiene que ver con el del otro, esto es que las variables X e Y son independientes, entonces se tiene que su suma también seguirá una distribución Poisson con parámetro la suma de los parámetros, $X + Y \sim Po(\lambda_1 + \lambda_2 = 45)$.

$p(X + Y = 48) = \exp(-45)\frac{(45)^{48}}{48!} = \underline{0.0521}$

5. X, número mensual de automóviles vendidos de la marca A.

Y, número mensual de automóviles vendidos de la marca B.

$\rho_{xy} = -0.4$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3^2 & s_{xy} \\ s_{xy} & 5^2 \end{pmatrix}\right)$$

a) $T = Y - 2X$

$\sigma_{xy} = \rho_{xy}\,\sigma_x\,\sigma_y = (-0.4)(3)(5) = -6$

$T \sim N(\mu_t = \mu_y - 2\mu_x = 15 - (2)(10) = -5, \sigma_t^2 = \sigma_y^2 + (-2)^2\sigma_x^2 + (2)(-2)\sigma_{xy} = 5^2 + (-2)^2(3)^2 + (2)(-2)(-6) = 85)$

$p(Y > 2X) = p(T > 0) = p(Z_t > \frac{0-(-5)}{\sqrt{85}}) = p(Z_t > 0.5424) = \underline{0.2938}$, donde $Z_t = \frac{T-\mu_t}{\sigma_t} \sim N(0, 1)$.

b) $p(X > k) = 0.9 \Leftrightarrow p\left(\frac{X-\mu_x}{\sigma_x} > \frac{k-10}{3}\right) = 0.9 \Leftrightarrow p\left(Z_x > \frac{k-10}{3}\right) = 0.9 \Leftrightarrow p\left(Z_x < \frac{10-k}{3}\right) = 0.9 \Leftrightarrow \frac{10-k}{3} = 1.28 \Leftrightarrow k = \underline{6.16}$, donde $Z_x = \frac{X-\mu_x}{\sigma_x} \sim N(0, 1)$

c) V_1, número de clientes, de entre los 10, pertenecientes a la categoría $A_1 = \{$compra marca A$\}$, $p(A_1) = 0.3$.

V_2, número de hogares, de entre los 10, pertenecientes a la categoría $A_2 = \{$compra marca B$\}$, $p(A_2) = 0.45$.

V_3, número de hogares, de entre los 10, pertenecientes a la categoría $A_3 = \{$compra marca C$\}$, $p(A_3) = 0.25$.

Admitiendo independencia en cuanto a la clasificación en las tres categorías de los 10 compradores seleccionados, se tiene que el vector aleatorio cuyas componentes recogen el número de clientes en cada una de las posibles categorías sigue una distribución de probabilidad Multinomial.

$(V_1, V_2, V_3)' \sim Mn(n = 10, \boldsymbol{\theta} = (0.3, 0.45, 0.25)')$

$p(V_1 = 3, V_2 = 4, V_3 = 3) = \frac{10!}{3!\,4!\,3!}(0.3)^3(0.45)^4(0.25)^3 = \underline{0.0727}$