Examen de Estadística I. 06-09-2010.

1. X, número de miembros por familia.

	$[L_{i-1}, L_i)$	x_i	n_i	$x_i\, n_i$	$x_i^2\, n_i$
	$[0, 2)$	1	110	110	110
	$[2, 4)$	3	200	600	1800
	$[4, 6)$	5	90	450	2250
	$[6, 8)$	7	75	525	3675
	$[8, 10)$	9	25	225	2025
$\sum_{i=1}^{5}$			N=500	1910	9860
$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{5}$				3.82	19.72

a) $\overline{x} = \underline{1.82}$
$s_x^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{5} x_i^2\, n_i - \overline{x}^2 = 19.72 - (3.82)^2 = \underline{5.1276}$

b) $Y = 100X + 500$, ayuda familiar en euros.
$\overline{y} = 100\overline{x} + 500 = (100)(3.82) + 500 = \underline{882}$
$s_y = 100 s_x = (100)\sqrt{5.1276} = \underline{226.442}$

2. X, ingresos en euros.

Calculamos el índice de Gini de X.

	n_i	N_i	$x_i n_i$	$\sum_{j=1}^{i} x_j n_j$	$p_i = \frac{N_i}{N}\ 100$	$q_i = \frac{\sum_{j=1}^{i} x_j n_j}{N\overline{x}}\ 100$
A	200	200	14000	14000	40	34.1463
B	180	380	15000	29000	76	70.7317
C	120	500	12000	41000	100	100

$I_G = \frac{\sum_{i=1}^{I-1}(p_i - q_i)}{\sum_{i=1}^{I-1} p_i} = \frac{(40-34.1463)+(76-70.7317)}{40+76} = \underline{0.0959}$, que como resulta muy cercano a cero, indica que los ingresos procedentes de las personas alojadas están similarmente distribuidos entre los tres establecimientos de la cadena.

3. X_t, gasto farmacéutico en el período t en cientos de unidades.
Y_t, número de recetas en el período t en cientos de unidades.

	t	x_t	y_t	t^2	$t\, y_t$
	0	1200	120	0	0
	1	2047.5	195	1	195
	2	2592	216	4	432
	3	2750	220	9	660
	4	2937	235	16	940
$\sum_{i=1}^{5}$	10		986	30	2227
$\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}$	2		197.2	6	445.4

a) $IVE(1T) = 0.4$, $IVE(2T) = 1.2$, $IVE(4T) = 0.4$

$y_t^* = a + bt$

$b = \frac{s_{ty}}{s_t^2} = \frac{445.4-(2)(197.2)}{6-2^2} = \frac{51}{2} = 25.5$, $a = \overline{y} - b\overline{t} = 197.2 - (25.5)(2) = 146.2$

$y_t^* = 146.2 + 25.5\,t$ (t, años; origen, 2005).

$y^* = \frac{146.2}{4} + \frac{25.5}{4^2}\,t = 36.55 + 1.5938\,t$ (t, trimestres; origen, trimestre central 2005).

Del trimestre central de 2005 al tercero de 2011 hay $(6)(4) + 0.5 = 24.5$ trimestres.

$y_{24.5}^* = 36.55 + (1.5938)(24.5) = 75.5969$

$IVE(3T) = 4 - IVE(1T) - IVE(2T) - IVE(4T) = 2$, luego $\hat{y}_{3T11} = y_{24.5}^*\, IVE(3T) = (75.5969)(2) = \underline{151.1938}$

b) $y_0' = \frac{y_0}{IPC_{2005}^{2006}}100 = \frac{1200}{0.966} = 1242.236$, presupuesto en el año 2005 en euros constantes de 2006.

$y_4' = \frac{y_4}{IPC_{2009}^{2006}}100 = \frac{2937}{1.067} = 2752.5773$, presupuesto en el año 2009 en euros constantes de 2006.

$\frac{y_4'-y_0'}{y_0'}100 = \underline{121.5825\%}$

4. X, número de días de exposición de un cierto producto.

$X \sim Ex(\mu = 6),\ f(x) = \frac{1}{6}\exp\left(-\frac{1}{6}x\right),\ x > 0$

a) $p(6 < X < 10) = \int_6^{10} \frac{1}{6}\exp\left(-\frac{1}{6}x\right)\,dx = -\left[\exp\left(-\frac{1}{6}x\right)\right]_6^{10} = \underline{0.179}$

b) $p(X > k) = 0.85 \Leftrightarrow \int_k^{+\infty} \frac{1}{6}\exp\left(-\frac{1}{6}x\right)\,dx = 0.85 \Leftrightarrow -\left[\exp\left(-\frac{1}{6}x\right)\right]_k^{+\infty} = 0.85 \Leftrightarrow \exp\left(-\frac{k}{6}\right) = 0.85 \Leftrightarrow k = -6\log 0.85 \Leftrightarrow k = \underline{0.9751}$

c) Y, número de escaparates, de entre 4, en los que el producto se expone menos de cinco días.

$p(X < 5) = \int_0^{5} \frac{1}{6}\exp\left(-\frac{1}{6}x\right)\,dx = -\left[\exp\left(-\frac{1}{6}x\right)\right]_0^{5} = 0.5654$

$Y \sim Bi(4, 0.5654),\ f(y) = \left(\begin{array}{c} 4 \\ y \end{array}\right)(0.5654)^y(1-0.5654)^{10-y},\ y = 0, \ldots, 4$

$p(Y = 3) = \left(\begin{array}{c} 4 \\ 3 \end{array}\right)(0.5654)^3(0.4346)^1 = \underline{0.3142}$

5. X, ventas mensuales de librería y prensa en miles de euros.

Y, ventas mensuales de artículos básicos de alimentación e higiene en miles de euros.

Z, ventas mensuales de cafetería en miles de euros.

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} 30 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 64 & 12 & 24 \\ 12 & 9 & -3 \\ 24 & -3 & 25 \end{pmatrix}\right)$$

a) $T = X + Y$, ventas mensuales de librería y prensa y de artículos básicos de alimentación e higiene en miles de euros.

$T \sim N(\mu_t = \mu_x + \mu_y = 30 + 10 = 40, \sigma_t^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 2\sigma_{xy} = 64 + 9 + (2)(12) = 97)$

$p(T > 63) = p(Z_t > \frac{63-40}{\sqrt{97}}) = p(Z_t > 2.3353) = \underline{0.0097}$, donde $Z_t = \frac{T-\mu_t}{\sigma_t} \sim N(0,1)$.

b) $B = 0.1Y + 0.3Z - 4$, beneficio mensual de artículos básicos de alimentación e higiene y de cafetería en miles de euros.

$B \sim N(\mu_b = 0.1\mu_y + 0.3\mu_z - 4 = (0.1)(10) + (0.3)(20) - 4 = 3, \sigma_b^2 = (0.1)^2\sigma_y^2 + (0.3)^2\sigma_z^2 + 2(0.1)(0.3)\sigma_{yz} = (0.1)^2(9) + (0.3)^2(25) + (2)(0.1)(0.3)(-3) = 2.16)$

$p(B > k) = 0.8 \Leftrightarrow p\left(\frac{B-\mu_b}{\sigma_b} > \frac{k-3}{\sqrt{2.16}}\right) = 0.8 \Leftrightarrow p\left(Z_b > \frac{k-3}{\sqrt{2.16}}\right) = 0.8 \Leftrightarrow p\left(Z_b < \frac{3-k}{\sqrt{2.16}}\right) = 0.8 \Leftrightarrow \frac{3-k}{\sqrt{2.16}} = 0.8418 \Leftrightarrow k = \underline{1.7628}$, donde $Z_b = \frac{B-\mu_b}{\sigma_b} \sim N(0,1)$