Examen de Estadística II. Módulo práctico. 13-02-2001.

1. X, número de kilos levantados por la grúa en cada elevación.
$\mu = 100,\ \sigma = 25.$

$Y = \sum_{i=1}^{3000} X_i$, número de kilos levantados por la grúa en 300 días.

Aplicando el teorema central del límite se tiene que $Y \dot\sim N(3000 \cdot 100, 3000 \cdot 25^2) = N(300000, 1875000)$, de donde $p(Y > 305000) = p\left(Z > \frac{305000-300000}{\sqrt{1875000}}\right) = p(Z > 3.6515) = \underline{0.0001}$, con $Z = \frac{Y-\mu_y}{\sigma_y} \dot\sim N(0,1)$.

2. X, igual a 1 si el soldado está afectado de cáncer y 0 en caso contrario.
$X \sim Br(\theta)$.
$(x_1, \cdots, x_{225})$ m.a.s. tal que $\sum_{i=1}^{225} x_i = 2$.

$H_0:\ \theta \leq \theta_0 = 0.0045$
$H_1:\ \theta > \theta_0 = 0.0045$

Como el tamaño muestral es suficientemente grande, $\overline{X} \dot\sim N\left(\theta, \frac{\theta(1-\theta)}{n}\right)$, y el test que se propone para resolver el contraste planteado es:

rechazar $H_0 \Leftrightarrow \overline{x} \geq \theta_0 + z_\alpha \sqrt{\frac{\theta_0(1-\theta_0)}{n}}$, donde z_α es el cuantil de la distribución $N(0,1)$ que deja a su derecha una probabilidad igual a α.

Como $\overline{x} = \frac{2}{225} = 0.00\hat{8} < 0.0118 = 0.0045 + 1.645\sqrt{\frac{0.0045(1-0.0045)}{225}}$, la decisión es $\underline{\text{ACEPTAR}\ H_0}$ para un nivel de significación $\alpha = 0.05$.

3. X, comisión de la gestora en tanto por ciento.
Y, rentabilidad de la gestora en porcentaje.
$(x_1, \cdots, x_{15})$ m.a.s. tal que $\overline{x} = 3.5$ y $s_x = 1$.
$(y_1, \cdots, y_{15})$ m.a.s. tal que $s_y^2 = 98.55$.

a) Suponiendo que $X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$, se tiene que $\sqrt{n-1}\ \frac{\overline{X}-\mu_x}{S_x} \sim t_{n-1}$ y, consecuentemente, el intervalo de confianza $(1-\alpha)$ para μ_x es:

$\left[\overline{x} - t_{n-1,\frac{\alpha}{2}}\ \frac{s_x}{\sqrt{n-1}},\ \overline{x} + t_{n-1,\frac{\alpha}{2}}\ \frac{s_x}{\sqrt{n-1}}\right]$, donde $t_{n-1,\frac{\alpha}{2}}$ es el cuantil de la distribución t_{n-1} que deja a su derecha una probabilidad igual a $\frac{\alpha}{2}$.

Para $1-\alpha = 0.9$, $t_{14,0.05} = 1.761$, y el intervalo de confianza del 90% para μ_x resulta $\underline{[3.0293, 3.9706]}$.

b) $H_0:\ \sigma_y^2 \geq \sigma_0^2 = 15^2$
$H_1:\ \sigma_y^2 < \sigma_0^2 = 15^2$

Suponiendo que $Y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$, se tiene que $\frac{nS_y^2}{\sigma_y^2} \sim \chi_{n-1}^2$ y el test que resuelve el contraste anterior es:

rechazar $H_0 \Leftrightarrow \frac{ns_y^2}{\sigma_0^2} \leq \chi_{n-1,1-\alpha}^2$, donde $\chi_{n-1,1-\alpha}^2$ es el cuantil de la distribución χ_{n-1}^2 que deja a su derecha una probabilidad igual a $1-\alpha$.

$\frac{ns_y^2}{\sigma_0^2} = \chi^2_{n-1,1-\alpha} \Leftrightarrow \chi^2_{n-1,1-\alpha} = \frac{(15)(98.55)}{15^2} = 6.57$, y se tiene que el nivel de significación crítico es $\underline{\alpha = 0.05}$, de modo que la decisión es RECHAZAR H_0 a partir de un nivel del 5%.

4. X, grado de aceptación del producto.
Y, categoría de edad.

a) $H_0:$ X e Y independientes
$H_1:$ no H_0
Bajo ciertas condiciones genéricas y para un tamaño muestral grande se tiene que:

$$Q = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} \frac{\left(n_{ij} - \frac{n_{i.}\, n_{.j}}{n}\right)^2}{\frac{n_{i.}\, n_{.j}}{n}} \dot{\sim} \chi^2_{n-1}\,.$$

El test que resuelve el contraste de independencia es:
rechazar $H_0 \Leftrightarrow q \geq \chi^2_{(r-1)(s-1),\alpha}$, donde $\chi^2_{(r-1)(s-1),\alpha}$ es el cuantil de la distribución $\chi^2_{(r-1)(s-1)}$ que deja a su derecha una probabilidad igual a α.

$$\begin{aligned} q \;&=\; \frac{\left(20 - \frac{(70)(29)}{100}\right)^2}{\frac{(70)(29)}{100}} + \frac{\left(27 - \frac{(70)(40)}{100}\right)^2}{\frac{(70)(40)}{100}} + \frac{\left(23 - \frac{(70)(31)}{100}\right)^2}{\frac{(70)(31)}{100}} + \\ &+ \frac{\left(9 - \frac{(30)(29)}{100}\right)^2}{\frac{(30)(29)}{100}} + \frac{\left(13 - \frac{(30)(40)}{100}\right)^2}{\frac{(30)(40)}{100}} + \frac{\left(8 - \frac{(30)(31)}{100}\right)^2}{\frac{(30)(31)}{100}} = 0.3934, \end{aligned}$$

y como se tiene que el estadístico es menor que el cuantil, $q = 0.3934 < 5.991 = \chi^2_{2,0.05} = \chi^2_{(2-1)(3-1),0.05}$, la decisión es $\underline{\text{ACEPTAR } H_0}$ para un nivel de significación $\alpha = 0.05$.

b) $H_0:$ $\pi_{11} = \pi^*_{11} = \frac{1}{3}$, $\pi_{12} = \pi^*_{12} = \frac{1}{3}$, $\pi_{13} = \pi^*_{13} = \frac{1}{3}$
$H_1:$ no H_0
El estadístico χ^2 de Pearson cumple que:

$$Q = \sum_{j=1}^{3} \frac{\left(n_{1j} - n_{1.}\, \pi^*_{1j}\right)^2}{n_{1.}\, \pi^*_{1j}} \dot{\sim} \chi^2_{s-1}\,,$$

y el test que resuelve el contraste de bondad de ajuste es:
rechazar $H_0 \Leftrightarrow q \geq \chi^2_{s-1,\alpha}$, con $\chi^2_{s-1,\alpha}$ el cuantil de la distribución χ^2_{s-1} que deja a su derecha una probabilidad igual a α.

$$q = \frac{\left(20 - 70\,\frac{1}{3}\right)^2}{70\,\frac{1}{3}} + \frac{\left(27 - 70\,\frac{1}{3}\right)^2}{70\,\frac{1}{3}} + \frac{\left(23 - 70\,\frac{1}{3}\right)^2}{70\,\frac{1}{3}} = 1.0571,$$

que es menor que el cuantil, $\chi^2_{2,0.05} = 5.991$, luego la decisión es $\underline{\text{ACEPTAR } H_0}$ para un nivel de significación $\alpha = 0.05$.