Examen de Estadística II. Módulo teórico. 13-02-2001.

1. $X \sim N(\mu = 20, \sigma^2 = 25)$.
$(x_1, \cdots, x_n)$ m.a.s. de tamaño $n = 100$.

a) Utilizando el teorema de Cochran se tiene que $\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) = N(20, 0.25)$.
b) Si σ^2 es desconocida, $n = 10$ y $s^2 = 22$, podemos utilizar el mismo teorema anterior para deducir que $\sqrt{n-1}\,\frac{\overline{X}-\mu}{S} \sim t_{n-1}$, luego $\frac{3(\overline{X}-20)}{\sqrt{22}} \sim t_9$.
c) Si se desconoce la varianza poblacional pero se dispone de la varianza, $s^2 = 20$, de una m.a.s. de tamaño $n = 300$, como éste es suficientemente grande, podemos estimar la varianza poblacional con la muestral y calcular la probabilidad requerida con la distribución aproximada $\overline{X} \approx N\left(\mu, \frac{s^2}{n}\right) = N(20, 0.2)$.

2. No sería válida la muestra para obtener conclusiones referentes al gasto anual realizado por todos los clientes de los grandes almacenes pues no toda la población estaría representada en la muestra, sólo aquellos clientes con tarjeta de crédito. Sí que cabría sospechar algún tipo de sesgo en los resultados inferenciales, en el sentido de obtener un mayor gasto del esperado, al estar basado el análisis en una muestra de clientes con un mayor potencial de gasto al disponer de tarjeta de crédito.

3. Para la comparación de estimadores se utiliza el error cuadrático medio, $E.C.M._{\hat{\theta}}(\theta) = Var(\hat{\theta}) + b^2(\theta)$, donde $b(\theta) = E(\hat{\theta}) - \theta$, es el sesgo del estimador. Debemos escoger aquel estimador que tenga menor error cuadrático medio. En este caso, el estimador insesgado tiene un error cuadrático medio igual a su varianza, 25, mayor que el del segundo que es $20 = 16 + 2^2$; por tanto nos quedaríamos con éste último.

4. $\hat{\theta}_4 \succ \hat{\theta}_2 \succ \hat{\theta}_1 \succ \hat{\theta}_3$.
Como primer criterio a la hora de elegir un estimador utilizaría el hecho de conocer su error cuadrático medio. Así, $\hat{\theta}_4$ y $\hat{\theta}_2$ son preferibles a $\hat{\theta}_1$ y $\hat{\theta}_3$. Entre los dos primeros, elegiría $\hat{\theta}_4$ pues al ser eficiente es el estimador insesgado óptimo. Y entre $\hat{\theta}_1$ y $\hat{\theta}_3$, me quedaría con $\hat{\theta}_1$ pues al menos es insesgado.

5. a) $n = z^2_{\frac{\alpha}{2}} \frac{0.25}{\epsilon^2} = (1.645)^2 \frac{0.25}{(0.03)^2} = 751.6736 \simeq 752$.
b) $n = z^2_{\frac{\alpha}{2}} \frac{(0.15)(1-0.15)}{\epsilon^2} = (1.645)^2 \frac{0.1275}{(0.03)^2} = 383.3535 \simeq 384$.
La única diferencia entre ambos tamaños muestrales es la estimación de la varianza poblacional, $\theta(1-\theta)$, utilizada. En los dos se utiliza una cota superior para la misma; en el primero sin restricciones y en el segundo teniendo presente que $\theta \leq 0.15$.

6. a) X, igual a 1 si el tratamiento A es satisfactorio y 0 en caso contrario, $X \sim Br(\theta_1)$.
Y, igual a 1 si el tratamiento B es satisfactorio y 0 en caso contrario, $Y \sim Br(\theta_2)$.
Propondría un contraste unilateral de proporciones para decidir qué tratamiento tiene un comportamiento medio mejor.
b) X, igual a 1 si el tratamiento A es satisfactorio, 2 si es indiferente y 3 si es insatisfactorio.
Y, igual a 1 si el tratamiento B es satisfactorio, 2 si es indiferente y 3 si es insatisfactorio.
En este caso propondría un contraste de homogeneidad para estas dos poblaciones categóricas. En el caso de rechazar la hipótesis de igualdad de tratamientos, compararía la primera categoría de ambos (satisfactorio) para inclinarme por un tratamiento u otro.

7. a) FALSO. Si se rechaza la hipótesis nula para $\alpha = 0.025$, también se rechaza para cualquier nivel de significación mayor.
b) VERDAD. Si los tests son diferentes sí que es posible rechazar H_0 al 2.5% y aceptarla al 5%.
c) FALSO. El nivel de significación es una cota superior para el riesgo de tipo I, esto es, para la probabilidad de rechazar H_0 siendo cierta.
d) FALSO. El nivel de significación crítico es el nivel hasta el cual acepto la hipótesis nula y a partir de él la rechazo. Por consiguiente, valores grandes del mismo motivarán la aceptación de la hipótesis nula y viceversa.