Examen de Estadística II. Módulo práctico. 07-09-2001.

1. X, número de accidentes laborales semanales en la primera provincia.
Y, número de accidentes laborales en la segunda provincia.
$X \sim Po(5)$, $\mu_x = 5 \to \lambda_x = 5$; $\mu_y = 8 \to Y \sim Po(8)$.

Suponiendo independencia entre X e Y, es decir, que no existe relación alguna entre el número de accidentes laborales ocurridos en una y otra provincia, se tiene que $X+Y \sim Po(5+8 = 13)$. Además, si consideramos que $n = 52$ es un tamaño muestral suficientemente grande y que no existe relación entre el número de accidentes laborales en el conjunto de las dos provincias ocurridos en una semana con los ocurridos en cualquier otra semana, entonces puede aplicarse el teorema central del límite y $W = \sum_{i=1}^{52}(X_i + Y_i) \dot\sim N((52)(13) = 676, (52)(13) = 676)$. Denotando por k al número de accidentes requerido que es superado con unas garantías del 95% y por $Z = \frac{W-\mu_w}{\sigma_w} \dot\sim N(0,1)$, se tiene que:

$$p(W > k) = 0.95 \Leftrightarrow p\left(Z > \frac{k-676}{\sqrt{676}}\right) = 0.95 \Leftrightarrow \frac{k-676}{\sqrt{676}} = -1.645 \Leftrightarrow \underline{k = 633.23}.$$

2. X, tiempo diario de mantenimiento y limpieza en minutos.
$X \sim N(\mu, \sigma^2)$.
$(x_1, \cdots, x_{15})$ m.a.s. tal que $\overline{x} = 180$ y $s = 50$.

a) Se tiene que $\sqrt{n-1}\,\frac{\overline{X}-\mu}{S} \sim t_{n-1}$ y, consecuentemente, el intervalo de confianza $(1-\alpha)$ para μ es $\left[\overline{x} - t_{n-1,\frac{\alpha}{2}}\,\frac{s}{\sqrt{n-1}},\ \overline{x} + t_{n-1,\frac{\alpha}{2}}\,\frac{s}{\sqrt{n-1}}\right]$, donde $t_{n-1,\frac{\alpha}{2}}$ es el cuantil de la distribución t_{n-1} que deja a su derecha una probabilidad igual a $\frac{\alpha}{2}$.

Para $1-\alpha = 0.95$ y $n = 15$, $t_{14,0.025} = 2.145$, y el intervalo de confianza del 95% para μ resulta $\underline{[151.3362, 208.6638]}$.

b) $n = z^2_{\frac{\alpha}{2}}\,\frac{s^2}{\epsilon^2} = (1.96)^2\,\frac{50^2}{10^2} = \underline{96.04}$.

3. X_1, opinión de los hombres acerca de la construcción de la autovía.
X_2, opinión de las mujeres acerca de la construcción de la autovía.

a) $H_0:$ X_1 y X_2 homogéneas
$H_1:$ no H_0
Bajo ciertas condiciones genéricas y para un tamaño muestral grande se tiene que:

$$Q = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\frac{\left(n_{ij} - \frac{n_i\, n_{\cdot j}}{n}\right)^2}{\frac{n_i\, n_{\cdot j}}{n}} \dot\sim \chi^2_{(r-1)(s-1)}.$$

El test que resuelve el contraste de homogeneidad es:

rechazar $H_0 \Leftrightarrow q \geq \chi^2_{(r-1)(s-1),\alpha}$, donde $\chi^2_{(r-1)(s-1),\alpha}$ es el cuantil de la distribución $\chi^2_{(r-1)(s-1)}$ que deja a su derecha una probabilidad igual a α.

$$\begin{aligned} q \;&=\; \frac{\left(41-\frac{(100)(81)}{210}\right)^2}{\frac{(100)(81)}{210}}+\frac{\left(39-\frac{(100)(82)}{210}\right)^2}{\frac{(100)(82)}{210}}+\frac{\left(20-\frac{(100)(47)}{210}\right)^2}{\frac{(100)(47)}{210}}+ \\ &+\frac{\left(40-\frac{(110)(81)}{210}\right)^2}{\frac{(110)(81)}{210}}+\frac{\left(43-\frac{(110)(82)}{210}\right)^2}{\frac{(110)(82)}{210}}+\frac{\left(27-\frac{(110)(47)}{210}\right)^2}{\frac{(110)(47)}{210}}=0.7756, \end{aligned}$$

y como se tiene que el estadístico es menor que el cuantil, $q = 0.7756 < 4.605 = \chi^2_{2,0.1} = \chi^2_{(2-1)(3-1),0.1}$, la decisión es <u>ACEPTAR H_0</u> para un nivel de significación $\alpha = 0.1$ y, por consiguiente, para cualquiera de los habituales.

b) $H_0:\ \pi_{11} = \pi^*_{11} = \frac{1}{3},\ \pi_{12} = \pi^*_{12} = \frac{1}{3},\ \pi_{13} = \pi^*_{13} = \frac{1}{3}$
$H_1:$ no H_0

El estadístico χ^2 de Pearson cumple que:

$$Q = \sum_{j=1}^{s} \frac{\left(n_{1j} - n_1\,\pi^*_{1j}\right)^2}{n_1\,\pi^*_{1j}} \dot{\sim}\, \chi^2_{s-1}\,,$$

y el test que resuelve el contraste de bondad de ajuste es:

rechazar $H_0 \Leftrightarrow q \geq \chi^2_{s-1,\,\alpha}$, con $\chi^2_{s-1,\,\alpha}$ el cuantil de la distribución χ^2_{s-1} que deja a su derecha una probabilidad igual a α.

$$q = \frac{\left(41 - 100\,\frac{1}{3}\right)^2}{100\,\frac{1}{3}} + \frac{\left(39 - 100\,\frac{1}{3}\right)^2}{100\,\frac{1}{3}} + \frac{\left(20 - 100\,\frac{1}{3}\right)^2}{100\,\frac{1}{3}} = 8.06,$$

que es mayor que el cuantil $\chi^2_{2,0.05} = 5.991$, luego la decisión es <u>RECHAZAR H_0</u> para un nivel de significación $\alpha = 0.05$. Ha de tomarse con prudencia esta decisión pues para un nivel de significación $\alpha = 0.01$, $\chi^2_{2,0.01} = 9.21$ y la decisión es justamente la contraria.