VARIABLE COMPLEJA

Oscar Blasco

Contenido

Capítulo 1

El cuerpo de los números complejos

1.1 Consideraciones algebráicas de $\mathbb{C}$

Existen varias maneras de llegar a la definición del mismo. Una forma elegante de hacerlo viene de la mano de la teoría de cuerpos cocientes, puesto es el mínimo cuerpo algebraicamente cerrado que contiene a $\mathbb{R}$. Denotemos $P[x]$ el anillo de los polinomios en una variable con coeficientes reales y (x^2+1) el ideal maximal generado por el polinomio x^2+1.

Proposición 1.1.1 *(i) $P[x]/(x^2+1)$ es un cuerpo conmutativo.*
(ii) La ecuación $x^2+1=0$ tiene solución en $P[x]/(x^2+1)$.
(iii) Contiene un subcuerpo isomorfo a $\mathbb{R}$.
(iv) $P[x]/(x^2+1)$ es el mínimo cuerpo que cumple (ii) y (iii).

Nota 1.1.1 *Dado $q(x) \in P[x]/(x^2+1)$ podemos escribir*

$$q(x) = p(x)(x^2+1) + bx + a,$$

y por tanto $q(x) \approx bx + a$. Esto permite identificar $P[x]/(x^2+1) = \mathbb{R}^2$.

Observar que si $q_1(x) = p_1(x)(x^2+1) + bx + a$, y $q_2(x) = p_2(x)(x^2+1) + b'x + a'$ entonces

$$q_1(x) + q_2(x) = (p_1(x) + p_2(x))(x^2+1) + (b+b')x + (a+a'),$$

$$q_1(x)q_2(x) = q(x)(x^2+1) + (ab' + b'a)x + (aa' - bb')$$

Proposición 1.1.2 *En $\mathbb{R}^2$ definimos las operaciones*

$$(a,b)+(a',b')=(a+a',b+b'),$$

$$(a,b)(a',b')=(aa'-bb',a'b+ab').$$

Entonces $P[x]/(x^2+1)=\mathbb{R}^2$ es un isomorfismo de cuerpos.

Proposición 1.1.3 *Sea $M_2(\mathbb{R})=\{A=(a_{i,j}):a_{i,j}\in\mathbb{R},j\in\{1,2\}\}$.*

Considerar $\mathcal{C}=\{A=(a_{i,j})\in M_2(\mathbb{R}):a_{1,1}=a_{2,2},\quad a_{1,2}=-a_{2,1}\}$.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b' \\ -b' & a' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} aa'-bb' & ab'+a'b \\ -ab'-a'b & aa'-bb' \end{pmatrix}$$

Entonces $P[x]/(x^2+1)=\mathcal{C}$ isomorfismo de cuerpos.

Nota 1.1.2 *El elemento $(0,1)=[x]=D$ donde $D=(a_{i,j})$ con $a_{1,1}=a_{2,2}=0$, $a_{1,2}=1$ y $a_{2,1}=-1$ se denota por i.*

Todos estos cuerpos se denotan por

$$\mathbb{C}=\{z=x+iy:x,y\in\mathbb{R}\}.$$

Definición 1.1.4 *Dado $z=x+iy\in\mathbb{C}$ se definen:*

$Re(z)=x, Im(z)=y$,

$\bar{z}=x-iy$ el conjugado de z,

$|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ el módulo de z.

Proposición 1.1.5 *(i) $\mathbb{C}$ es un espacio vectorial de dimensión 2 sobre $\mathbb{R}$.*

(ii) $\mathbb{C}$ no tiene una estructura de orden compatible con la estructura de cuerpo, ya que $i^2=-1$.

(iii) La aplicación $z\to\bar{z}$ es un automorfismo de $\mathbb{C}$ con las siguientes propiedades:

$\bar{\bar{z}}=z$, $z\bar{z}=|z|^2$ y $z=\bar{z}\Leftrightarrow z\in\mathbb{R}$.

Además $Re(z)=\frac{z+\bar{z}}{2}, Im(z)=\frac{z-\bar{z}}{2i}$.

(iv) La aplicación $z\to|z|$ es una norma sobre $\mathbb{C}$ verificando:

$|\bar{z}|=|z|$, $max\{|Re(z)|,|Im(z)|\}\leq|z|$.

1.2 Consideraciones topológicas: Conexión.

Obsérvese que la propiedad (iv) de la última proposición permite dar a $\mathbb{C}$ una estructura de espacio de Banach (normado y completo), en particular de espacio métrico, y que la distancia que se genera corresponde con la euclidea. En este sentido $(\mathbb{C}, |.|)$ es homeomorfo a $(\mathbb{R}^2, d_2)$, siendo $d_2((x,y),(x',y')) = |z - z'|$ para $z = x + iy$ y $z' = a' + ib'$.

Denotaremos por $\mathcal{G}(\mathbb{C})$ y $\mathcal{K}(\mathbb{C})$ el conjunto de abiertos y de compactos de $\mathbb{C}$.

Dados $z_0 \in \mathbb{C}$ y $r > 0$, escribiremos $D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ y $\bar{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$. D corresponde a $D(0,1)$.

Definición 1.2.1 *Una aplicación continua de un intervalo en* $\mathbb{C}$, $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ *se denomina* curva.

$\gamma(a), \gamma(b)$ *son los puntos inicial y final de la misma.*

Denotamos $\gamma^* = \{\gamma(t) : t \in [a,b]\}$ *el rango de la curva.*

Una curva se dice cerrada *si* $\gamma(a) = \gamma(b)$,

simple (o arco) *si* γ *es inyectiva y*

cerrada simple *cuando es inyectiva sobre* $[a,b)$ *y* $\gamma(a) = \gamma(b)$.

(Notar que estas definiciones tienen sentido en un espacio topológico general).

Una curva se dice diferenciable *en* $[a,b]$ *si* γ *es derivable en* (a,b) *y existen* $\gamma'(a^+), \gamma'(b^-)$ *y además* γ' *es contínua.*

Una curva se dice camino cuando es existe una partición $t_0 = a < t_1 < ...t_n = b$ *tal que* $\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$ *es diferenciable.*

(Nota: En un camino las derivadas laterales en los puntos t_i *existen pero no tienen porque coincidir.)*

Nota 1.2.1 *Un* segmento $[z,w]$ *es el conjunto de puntos resultante de unir ambos con una recta, es decir* $[z,w] = \{(1-t)z + tw : 0 \leq t \leq 1\}$.

Una poligonal *es un camino formado por segmentos.*

Una circunferencia $\{\gamma(t) = cost + isent : t \in [0, 2\pi]\}$ *es un camino cerrado simple.*

Definición 1.2.2 *Sea* Ω *un subconjunto de* $\mathbb{C}$.

Se dice conexo *si no existen dos abiertos (relativos) no vacíos disjuntos cuya unión da* Ω, *es decir no existen* $A, B \in \mathcal{G}(\mathbb{C})$ *tales que* $A_1 = A \cap \Omega$ *y* $B_1 = B \cap \Omega$ *cumplen que* $A_1 \cap B_1 = \varnothing$ *y* $A_1 \cup B_1 = \Omega$.

Se dice conexo por arcos *si cada par de puntos puede unirse por un arco.*

Se dice convexo *si para todo par de puntos $z, z' \in \Omega$ el segmento $[z, z'] \in \Omega$.*

Se dice estrellado *si existe $z_0 \in \Omega$ tal que para todo $z \in \Omega$ el segmento $[z_0, z] \in \Omega$.*

Se dice región *si es un abierto no vacío y conexo.*

Definición 1.2.3 *Sea $\varnothing \neq \Omega \subset \mathbb{C}$ $\Omega_1 \subset \Omega$ se dice "componente conexa" de Ω si es un subconjunto conexo maximal.*

Proposición 1.2.4 *Sea $\varnothing \neq \Omega \subset \mathbb{C}$.*

(i) Toda componente conexa de Ω es relativamente cerrado.

(ii) Componentes conexas distintas son disjuntas.

(iii) Todo conexo de Ω está en una y sólo una componente conexa.

(iv) Ω es unión (disjunta) de sus componentes conexas.

(v) Si Ω es acotado entonces existe una única componente no acotada en $\mathbb{C} \setminus \Omega$.

(vi) Si $\Omega \in \mathcal{G}(\mathbb{C})$ entonces sus componentes conexas son abiertas y además tiene un número contable (finito o numerable) de ellas.

Proposición 1.2.5 *Sea $\varnothing \neq \Omega \subset \mathbb{C}$ y $z_0 \in \Omega$.*

(i) Ω es conexo por arcos $\Leftrightarrow$ todo $z \in \Omega$ puede unirse a z_0 por un arco contenido en Ω.

(ii) Si Ω es conexo por arcos entonces también es conexo.

Demostración (i) $\Rightarrow$ Obvio.

$\Leftarrow$ Sean $z, z' \in \Omega$ y γ_1, γ_2 arcos parametrizados en $[0, 1]$ tales que $\gamma_1(0) = z$, $\gamma_1(1) = z_0$, $\gamma_2(0) = z_0$ y $\gamma_2(1) = z'$. Es claro que si definimos

$$\gamma(t) = \gamma_1(2t), \quad t \in [0, 1/2],$$

$$\gamma(t) = \gamma_2(2t - 1), \quad t \in [1/2, 1],$$

entonces tenemos una curva que une los puntos z y z'. Consideremos

$$A = \{t \in [0, 1/2] : \text{existe } s \in [1/2, 1], \gamma_1(2t) = \gamma_2(2s - 1)\}.$$

Si $A = \varnothing$ entonces γ es un arco.

Caso contrario sea $t_0 = infA$. Es fácil ver que $t_0 = minA$. Entonces existe un único $s_0 \in [1/2, 1]$ tal que $\gamma_1(2t_0) = \gamma_2(2s_0 - 1)$. Por tanto

$$\tilde{\gamma}(t) = \gamma_1(2t), \quad t \in [0, t_0],$$

$$\tilde{\gamma}(t) = \gamma_2(2s-1), \quad s \in [s_0, 1],$$

es un arco que une z y z'.

(ii) Sea $z \in X$. Escribimos γ_z un arco contenido en Ω que une z_0 y z. Al ser $\Omega = \cup\gamma_z$ es conexo, por ser unión de conexos con un punto en común.

∎

Teorema 1.2.6 *Sea $\varnothing \neq \Omega \in \mathcal{G}(\mathbb{C})$. Ω es conexo si y sólo si Ω es conexo por poligonales (que pueden ser elegidas, en particular, con segmentos paralelos a los ejes coordenados).*

Demostración. Si es conexo por poligonales, lo es por arcos, y por tanto conexo según (ii) de Proposición 1.2.5.

Sea $z_0 \in \Omega$. Definimos A el conjunto de los $z \in \Omega$ tales que pueden unirse por poligonales (de segmentos paralelos a los ejes) con z_0. Es claro que $A \neq \varnothing$. Si comprobamos que A es abierto y cerrado, como Ω es conexo, entonces $A = \Omega$.

Si $z \in A$ existe $D(z,r) \subset \Omega$, y por tanto $D(z,r) \subset A$. Luego A es abierto.

Si $z \in \Omega \setminus A$ entonces existe $D(z,r) \subset \Omega$ (por ser Ω un abierto) y ha de cumplirse que $D(z,r/2) \subset \Omega \setminus A$, pues en otro caso existiría $z' \in D(z,r/2) \cap A$, es decir que puede unirse con poligonales paralelas a los ejes con z_0, lo que implica que $z \in A$. Por tanto A es cerrado y se concluye la demostración.

∎

1.3 Consideraciones topológicas: Compacidad

Definición 1.3.1 *Un espacio topológico se dice compacto si de todo cubrimiento abierto se puede extraer un subrecubrimiento finito.*

Nota 1.3.1 *Es claro que $\mathbb{C}$ no es compacto. (Usar $G_n = D(0,n)$ como cubrimiento de abiertos sin subrecubrimientos finitos). Vamos a considerar la compactificación de Aleksandrov (o de un punto).*

Consideremos un punto $\infty \notin \mathbb{C}$, y definamos $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Sea $\mathcal{G}_\infty = \mathcal{G}(\mathbb{C}_\infty) = \mathcal{G} \cup \mathcal{O}_\infty$ donde

$$\mathcal{O}_\infty = \{\mathbb{C}_\infty \setminus K : K \in \mathcal{K}(\mathbb{C})\}$$

es la familia de entornos de ∞.

Teorema 1.3.2 *(i)* $\mathcal{G}_\infty$ *es una topología en* $\mathbb{C}_\infty$*.*
(ii) $(\mathbb{C}, \mathcal{G}(\mathbb{C}))$ *es un subespacio denso de* $(\mathbb{C}_\infty, \mathcal{G}_\infty)$*.*
(iii)$(\mathbb{C}_\infty, \mathcal{G}_\infty)$ *es un espacio topológico compacto.*
(iv) La topología anterior es la única que cumple (ii) y (iii) salvo homeomorfismos.

Demostración
(i) Es claro que $\varnothing, \mathbb{C}_\infty \in \mathcal{G}_\infty$.
Sean $\{G_i\}_{i\in I} \in \mathcal{G}_\infty$. Pongamos $I_1 = \{i \in I : G_i \in \mathcal{G}\}$ e $I_2 = \{i \in I : G_i \in \mathcal{O}_\infty\}$. Se tiene que

$$\cup_{i\in I} G_i = (\cup_{i\in I_1} G_i) \cup (\cup_{i\in I_2} G_i) = G \cup (\mathbb{C}_\infty \setminus \cap K_i).$$

Dados $G_1, G_2 \in \mathcal{G}_\infty$. Entonces $G_1 \cap G_2 \in \mathcal{G}$ si $G_1, G_2 \in \mathcal{G}$, $G_1 \cap G_2 = G_1 \setminus K_2$ si $G_1 \in \mathcal{G}$ y $G_2 = \mathbb{C}_\infty \setminus K_2$, y finalmente $G_1 \cap G_2 = \mathbb{C}_\infty \setminus (K_1 \cup K_2)$ cuando $G_i = \mathbb{C}_\infty \setminus K_i$ para $i = 1, 2$.
(ii) Es obvio
(iii) Sea $\mathbb{C}_\infty = \cup G_i$. Tomar $G_{i_0} = \mathbb{C}_\infty \setminus K_0$ tal que $\infty \in G_{i_0}$ y observemos que $\mathbb{C}_\infty = \cup_{i\neq i_0} G_i \cup G_{i_0}$.
Como $K_0 \subset \cup_{i\neq i_0}(G_i \cap \mathbb{C})$ usamos la compacidad en $\mathbb{C}$ para extraer un subrecubrimiento finito y se combina con lo anterior.
(iv) Supongamos que tenemos $(\mathbb{C}_\infty, \tau)$ espacio topológico con las dos propiedades anteriores. Basta ver que si $\infty \notin G \in \tau$ entonces existe $K \in \mathcal{K}(\mathbb{C})$ con $G = \mathbb{C}_\infty \setminus K$. Sea $K = \mathbb{C} \setminus G$. Es claramente compacto en $\mathbb{C}_\infty$ (cerrado en compacto) pero no es difícil ver que de hecho es compacto en $\mathbb{C}$.

∎

Nota 1.3.2 $\mathbb{C}_\infty$ *es metrizable, pues es* T_2*, regular y tiene base contable, pero no existe ninguna métrica sobre* $\mathbb{C}_\infty$ *extensión de la euclidea sobre* $\mathbb{C}$*. En otras palabras el plano complejo no es una representación fiel del trozo* $\mathbb{C}$ *en* $\mathbb{C}_\infty$*.*
En efecto: Supongamos $\rho : \mathbb{C}_\infty \times \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{R}^+$ *con* $\rho(z, z') = |z - z'|$ *si* $z, z' \in \mathbb{C}$*.*
Entonces $n = \rho(n, 0) \leq \rho(n, \infty) + \rho(\infty, 0)$*. Como* $\lim n = \infty$ *entonces* $\rho(n, \infty) \to 0$*, lo que lleva a contradicción.*

Un posible modelo de $\mathbb{C}_\infty$ viene dado por la *"Esfera de Riemann"*

$$S_2 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_i \in \mathbb{R}, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}.$$

El homeomorfismo viene dado por la llamada *"Proyección estereográfica"* que consiste en asignar a cada punto de la esfera el número complejo resultante $z = x + iy$ donde $(x, y, 0)$ es el punto de corte de la recta en el espacio que pasa por el polo norte $N = (0, 0, 1)$ y el punto dado $P = (x_1, x_2, x_3)$.

Es claro que el polo sur $S = (0, 0, -1)$ corresponde al origen $z = 0$ y que el polo norte no tiene ningún correspondiente en $\mathbb{C}$ sino que se le asigna ∞.

Teorema 1.3.3 *La aplicación $\pi : S_2 \to \mathbb{C}_\infty$ es un homeomorfismo que viene dado por la siguiente fórmula:*

$$\pi((x_1, x_2, x_3)) = \frac{1}{1 - x_3}(x_1 + ix_2) \qquad (x_3 \neq 1),$$

$$\pi((0, 0, 1)) = \infty.$$

Además la aplicación inversa $\pi^{-1} : \mathbb{C}_\infty \to S_2$ viene dada por:

$$\pi^{-1}(z) = (\frac{2Rez}{1 + |z|^2}, \frac{2Imz}{1 + |z|^2}, \frac{|z|^2 - 1}{1 + |z|^2}) \qquad (z = x + iy),$$

$$\pi^{-1}(\infty) = (0, 0, 1).$$

Demostración Sea $P = (x_1, x_2, x_3) \in S_2$ con $x_3 \neq 0$, $N = (0, 0, 1)$, $z = x + iy$ y $Z = (x, y, 0)$.

La ecuación de la recta que pasa por N y P viene dada por:

$$\{((1 - t)x_1, (1 - t)x_2, t + (1 - t)x_3) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Con ésto le punto $\pi(P)$ es el punto de corte de dicha recta con el plano $z = 0$. La solución es $t' = \frac{-x_3}{1-x_3}$, lo que determina

$$\pi((x_1, x_2, x_3)) = \frac{1}{1 - x_3}(x_1 + ix_2) \qquad (x_3 \neq 1).$$

Asignando $\pi(N) = \infty$ tenemos la definición de la proyección estereográfica.

Para el cálculo de la inversa. La ecuación de la recta que pasa por N y Z viene dada por:

$$\{((1 - t)x, (1 - t)y, t) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Con ésto le punto $\pi^{-1}(z)$ es el punto de corte de dicha recta con la esfera S_2. La solución válida es $t'' = \frac{1-|z|^2}{1+|z|^2}$, lo que determina

$$\pi^{-1}(x + iy) = (\frac{2x}{1 + |z|^2}, \frac{2y}{1 + |z|^2}, \frac{|z|^2 - 1}{1 + |z|^2}) \qquad (z = x + iy).$$

Definiendo $\pi^{-1}(\infty) = N$ tenemos la inversa. Es una comprobación que $\pi(\pi^{-1}(z)) = z$ y $\pi^{-1}(\pi(P)) = P$.

La continuidad de π puede probarse por sucesiones (por ser metrizable). Sea $P_n = (x_i^n, x_2^n, x_3^n) \in S_2 \to P = (x_1, x_2, x_3) \in S_2$. Veamos que $\pi(P_n) = z_n \to \pi(P) = z$.

Si $P \neq N$, es decir $x_3 < 1$, podemos suponer $x_3^n < 1$ para todo $n \geq n_0$. Entonces $z_n \to z$ equivale a $\frac{2x_i^n}{1-x_3^n} \to \frac{2x_i}{1-x_3}$ para $i = 1, 2$.

Si $P = N$, es decir $x_3 = 1$, podemos suponer también $x_3^n < 1$ para todo $n \geq n_0$. Entonces $z_n \to \infty$ equivale a $|z_n| \to \infty$ y se tiene que $|z_n|^2 = \frac{1+x_3^n}{1-x_3^n} \to \infty$.

Queda como ejercicio al lector la demostración de la continuidad de π^{-1}.

■

El homeomorfismo anterior permite de nuevo ver que $\mathbb{C}_\infty$ es metrizable, pero aún mas se puede ver una métrica que consiste en trasplantar la métrica euclidea de S_2 a $\mathbb{C}_\infty$ por la aplicación π.

Definición 1.3.4 *Dados $z, z' \in \mathbb{C}_\infty$, y denotando por $P = \pi^{-1}(z) = (x_1, x_2, x_3)$ y $Q = \pi^{-1}(z') = (x_1', x_2', x_3')$ definimos la "distancia cordal" entre ellos al valor*

$$d_c(z, z') = \sqrt{(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2 + (x_3 - x_3')^2}.$$

Proposición 1.3.5 *Sean $z, z' \in \mathbb{C}_\infty$. Entonces*

$$d_c(z, z') = \frac{2|z - z'|}{\sqrt{1+|z|^2}\sqrt{1+|z'|^2}} \quad (z, z' \in \mathbb{C})$$

$$d_c(\infty, z) = \frac{2}{\sqrt{1+|z|^2}} \quad z \in \mathbb{C}.$$

Demostración Es claro que si $z, z' \in \mathbb{C}$

$$d_c(z, z') = \sqrt{2 - 2(x_1x_1' + x_2x_2' + x_3x_3')}.$$

Por tanto

$$\begin{aligned} d_c^2(z, z') &= 2 - \frac{2}{(1+|z|^2)(1+|z'|^2)}((z+\bar{z})(z'+\bar{z}') \\ &- (z-\bar{z})(z'-\bar{z}') + (|z|^2-1)(|z'|^2-1)) \\ &= 2 - \frac{2}{(1+|z|^2)(1+|z'|^2)}(2\bar{z}z' + 2z\bar{z}' + (|z|^2-1)(|z'|^2-1)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{4}{(1+|z|^2)(1+|z'|^2)}(|z|^2+|z'|^2+\bar{z}z'+z\bar{z'}) \\ &= \frac{4|z-z'|^2}{(1+|z|^2)(1+|z'|^2)}. \end{aligned}$$

El caso $z=\infty$ queda como ejercicio. ∎

Proposición 1.3.6 *(i) π^{-1} transforma rectas del plano en circunferencias en S_2 que pasan por el polo norte.*

(ii) π^{-1} transforma circunferencias del plano en circunferencias en S_2 que no pasan por el polo norte.

1.4 Problemas propuestos

1.- Demostrar las siguientes propiedades:
a) $|Rez| \leq |z|; |Imz| \leq |z|$
b) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$
c) $|z_1+z_2|^2 = |z_1|^2+|z_2|^2+2Re(z_1\bar{z_2})$
d)$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2 = 2|z_1|^2+2|z_2|^2$. Interpretar geométricamente este resultado

2.- Dado un número complejo $a \neq 0$, hallar todos los números complejos $z \neq a$ para los cuales $w=\frac{z+a}{z-a}$ es:
a) real
b) imaginario puro

3.- Sean z_1 y z_2 números complejos tales que $\frac{z_1+z_2}{z_1-z_2}$ es imaginario puro.
Probar que $|z_1|=|z_2|$.

4.- a) Hallar la ecuación compleja de la circunferencia cuyo centro es el afijo del número complejo w y cuyo radio es r .

Probar que la ecuación puede expresarse en la forma $z\bar{z}+\bar{a}z+a\bar{z}+b=0$, determinando a y b .

b) Comprobar que $|z+a|^2+|z-a|^2=4|a|^2$, donde $a \in \mathbb{C}$ es un número dado, es la ecuación de una circunferencia. Hallar el centro y el radio.

5.- Demostrar que si $|z_1|=|z_2|=|z_3|$ y $z_1+z_2+z_3=0$ entonces los afijos de los números complejos z_1, z_2, z_3 son los vértices de un triángulo equilátero.

6.- a) Demostrar que si $a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-1}$ son números reales y $a + bi$ (a y b reales) satisface la ecuación $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0 = 0$, entonces $a - bi$ satisface también esta ecuación. Por tanto las raíces no reales de una ecuación de este tipo se presentan siempre por pares.

b) Concluir que $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0 = 0$ es divisible por $z^2 - 2az + (a^2 + b^2)$, cuyos coeficientes son reales.

7.- Demostrar que los afijos de las raíces de la ecuación $(z+1)^n + z^n = 0$ están situados sobre la recta $x = -\frac{1}{2}$.

8.- Sea $a \in \mathbb{C}$ tal que $|a| < 1$. Demostrar:
$|z| \leq 1$ si y sólo si $|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}| \leq 1$

9.- Determinar en qué conjunto se transforma cada una de las regiones siguientes al aplicarles la transformación $w = z^2$:
a) Primer cuadrante del plano z.
b) Región limitada por $Rez + Imz = 1, Rez = 1, Imz = 1$.

10.- Demostrar que $f(z) = \frac{z-i}{z+i}$ realiza una biyección del conjunto

$$M = \{z|Imz > 0\}$$

sobre el conjunto

$$D = \{w||w| < 1\}$$

y de $\mathbb{R}$ sobre el conjunto $U = \{w||w| = 1, w \neq 1\}$.

11.- Se considera la ecuación $a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + ... + a_{n-1} z + a_n = 0$, con $a_i \in \mathbb{C}$ y $a_0 \neq 0$. Sean $z_1, z_2, ..., z_n$ las n raíces de esta ecuación.

Establecer las fórmulas de Cardano: $z_1 + z_2 + ... + z_n = -\frac{a_1}{a_0}$
$z_1 z_2 + z_2 z_3 + ... + z_{n-1} z_n = \frac{a_2}{a_0}$
$z_1 z_2 z_3 + z_2 z_3 z_4 + ... + z_{n-2} z_{n-1} z_n = -\frac{a_3}{a_0}$
....
$z_1 z_2 ..... z_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}$

12.- a) Probar que

$$lim_{z_1 \to z} \frac{d_c(z_1, z)}{d(z_1, z)} = \frac{2}{1 + |z|^2}.$$

b) Sea $\gamma : [a, b] \to \mathbf{C}$ una curva de clase $\mathcal{C}^{(1}$. Sea α su imagen en la esfera de Riemann. Probar que se cumple

$$\ell(\alpha) = \int_a^b \frac{2|\gamma'(s)|}{1 + |\gamma(s)|^2} ds$$

c) Hallar la longitud de la anteimagen de una recta por la proyección estereográfica.

13.- a) Probar que
$d_c(z_1, z_2) = d_c(\overline{z_1}, \overline{z_2}) = d_c(-z_1, -z_2) = d_c(\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2})$ y $d_c(z, \frac{-1}{\overline{z}}) = 2$.
b) Demostrar que $d_c(z_1, z_2) = 2$ sí y sólo si $z_1\overline{z_2} = -1$.

14.- Probar que π^{-1} transforma rectas en circunferencias que pasan por el norte.

15.- Probar que π^{-1} transforma circunferencias en circunferencias que no pasan por el norte.

16.- Sean a y b números complejos. Hallar el supremo y el ínfimo de

$$\{d_c(a + z, b + z);\ z \in \mathbb{C}\}.$$

Capítulo 2

Holomorfía y nociones asociadas

2.1 Funciones holomorfas

Definición 2.1.1 *Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega \cap \Omega'$ y $f : \Omega \to \mathbb{C}$. f se dice continua en z_0 si $\forall \varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|z - z_0| < \delta$ entonces $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.*

Denotamos por $C(\Omega)$ el espacio vectorial de las funciones continuas en todo punto de Ω.

Definición 2.1.2 *Sean $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$, $\infty \in \Omega \cap \Omega'$ y $f : \Omega \to \mathbb{C}_\infty$. f se dice continua en ∞ si*

Caso $f(\infty) \in \mathbb{C}$:

Si $\forall \varepsilon > 0$ existe $K > 0$ tal que si $|z| > K$ entonces $|f(z)| < \varepsilon$.

Caso $f(\infty) = \infty$:

Si $\forall R > 0$ existe $K > 0$ tal que si $|z| > K$ entonces $|f(z)| > R$.

Nota 2.1.1 *La aplicación $j : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ dada por $j(z) = 1/z$ $(z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$, $j(0) = \infty$ y $j(\infty) = 0$, es una isometría.*

Según ésto $f(z)$ es continua en $z = \infty$ si y sólo si $f(1/z)$ es continua en $z = 0$.

Ejemplos:

Polinomios $P(z)$ son continuas en $\mathbb{C}_\infty$ asignando $P(\infty) = \infty$.

Funciones racionales $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ con $P(z), Q(z)$ polinomios, son continuas en $\mathbb{C}_\infty$ asignando $R(z_k) = \infty$ para $\{z_k : Q(z_k) = 0\}$ y $R(\infty) = lim_{n\to\infty} R(z)$.

Definición 2.1.3 *Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$, $f_n, f : \Omega \to \mathbb{C}$.*

Se dice que f_n converge puntualmente a f en Ω si $\forall z \in \Omega$,

$$lim_{n\to\infty}|f_n(z) - f(z)| = 0.$$

Se dice que f_n converge uniformemente en Ω a f si

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{z\in\Omega} |f_n(z) - f(z)| = 0.$$

Se dice que f_n converge uniformemente sobre compactos de Ω a f si para todo compacto $K \in \mathcal{K}(\Omega)$,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{z\in K} |f_n(z) - f(z)| = 0.$$

Lema 2.1.4 *Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$ $f_n, f : \Omega \to \mathbb{C}$. Si existe $R > 0$ tal que f_n converge uniformemente en $D(z_0, R)$ y f_n son continuas en z_0, entonces f es continua en z_0.*

Demostración Dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$

$$sup_{|z-z_0|<R}|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon/3.$$

Existe $\delta > 0$ tal que si $|z - z_0| < \delta$

$$|f_{n_0}(z) - f_{n_0}(z_0)| < \varepsilon/3.$$

Por tanto si $|z - z_0| < min(\delta, R)$

$$|f(z) - f(z_0)| \leq |f(z) - f_{n_0}(z)| + |f_{n_0}(z) - f_{n_0}(z_0)| + |f_{n_0}(z_0) - f(z_0)|.$$

De aquí

$$|f(z) - f(z_0)| \leq 2sup_{|z-z_0|<R}|f(z) - f_{n_0}(z)| + |f_{n_0}(z) - f_{n_0}(z_0)| < \varepsilon.$$

∎

Proposición 2.1.5 *Sea Ω un abierto y $f_n \in C(\Omega)$ una sucesión que converge uniformenente en compactos de Ω a f. Entonces $f \in C(\Omega)$.*

Definición 2.1.6 *Sea Ω un abierto en $\mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$ y $f : \Omega \to \mathbb{C}$. f se dice derivable en z_0 si existe*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} \in \mathbb{C}.$$

A dicho valor se le llama derivada de f en z_0 y se denota $f'(z_0)$.

Proposición 2.1.7 *Sea Ω un abierto en $\mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ y $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$.*

(i) Si f es derivable en z_0 entonces f es continua en z_0.

(ii) Si f, g son derivables en z_0 entonces $\alpha f + \beta g$, fg y f/g (si $g(z_0) \neq 0$) son derivables en z_0.

Además

$(f+g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$,

$(fg)'(z_0) = g(z_0)f'(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$ *y*

$(f/g)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0)-g'(z_0)f(z_0)}{g(z_0)^2}$.

(iii) Sea Ω_1, Ω_2 abiertos en $\mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega_1$, $f : \Omega_1 \to \Omega_2$, $g : \Omega_2 \to \mathbb{C}$. Si f es derivable en z_0 y g es derivable en $w_0 = f(z_0)$ entonces $g(f)(z) = g(f(z))$ es derivable en z_0. Además

$(g(f))'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0)$.

2.2 Ecuaciones de Cauchy-Riemann

Definición 2.2.1 *Sea Ω un abierto en $\mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$ y $f : \Omega \to \mathbb{C}$. f se dice diferenciable compleja en z_0 si existe $L \in \mathcal{L}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ tal que*

$$\lim_{z\to 0} \left| \frac{f(z_0+z)-f(z_0)-L(z)}{z} \right| = 0.$$

Observar que $L(z) = zL(1)$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

Definición 2.2.2 *Sea Ω un abierto en $\mathbb{R}^2$, $z_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$ y $f : \Omega \to \mathbb{R}^2$. f se dice diferenciable real en z_0 si existe $Df_{z_0} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ tal que*

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \left| \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - Df_{z_0}(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} \right| = 0.$$

Nota 2.2.1 *Si $f : \Omega \to \mathbb{R}^2$ y escribimos $f(x_1, x_2) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$ entonces $Df_{z_0} = (a_{i,j})_{i,j=1}^2$ con $a_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0, y_0)$.*

Si $u : \Omega \to \mathbb{R}$ es diferenciable real, escribimos indistintamente $\frac{\partial u}{\partial x} = u_x = D_x u$.

Teorema 2.2.3 *(Ecuaciones de Cauchy-Riemann) Sea Ω un abierto en $\mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$ y $f : \Omega \to \mathbb{C}$, donde $f = u + iv$. Son equivalentes*

(i) f es derivable en z_0.

(ii) f es diferenciable compleja en z_0.

(iii) f es diferenciable real en z_0 con $Df_{z_0} = (a_{i,j})$ tal que $a_{1,1} = u_x(z_0) = v_y(z_0) = a_{2,2}$ y $a_{1,2} = u_y(z_0) = -v_x(z_0) = -a_{2,1}$.

Además $f'(z_0) = L(1) = u_x(z_0) + iv_x(z_0) = u_x(z_0) - iu_y(z_0)$.

Demostración

$(i) \Longleftrightarrow (ii)$. Sea $L(z) = zf'(z_0)$. Claramente

$$\lim_{z\to 0} \frac{f(z_0+z) - f(z_0) - zf'(z_0)}{z} = 0.$$

$(ii) \Longleftrightarrow (iii)$. Si $z = h+ik, h, k \in \mathbb{R}$ y $L(z) = (a+ib)(h+ik)$ y escribimos $Df_{z_0}(h,k) = (ah - bk, ak + bh)$ entonces se tiene (iii) con $a_{1,1} = a_{2,2} = a = u_x(z_0)$ y $u_y(z_0) = a_{1,2} = -a_{2,1} = -v_x(z_0) = -b$.

$(iii) \Longleftrightarrow (i)$. Se define $f'(z_0) = a_{1,1} + ia_{2,1}$. Entonces

$$\begin{aligned} f(z_0+z) - f(z_0) &= u(z_0+z) - u(z_0) + i(v(z_0+z) - v(z_0)) \\ &= u_x(z_0)h - v_x(z_0)k + |z|E_1(z) + i(v_x(z_0)h + u_x(z_0)k + |z|E_2(z)) \\ &= (u_x(z_0) + iv_x(z_0))(h+ik) + |z|\xi(z) \\ &= (f'(z_0)z + z\xi(z) \qquad (\xi(z) \to 0, z \to 0). \end{aligned}$$

■

Definición 2.2.4 *Sea Ω un abierto en $\mathbb{C}$ y $f = u + iv : \Omega \to \mathbb{C}$. f se dice holomorfa en Ω si es derivable en todos los puntos de Ω. Se denota por $\mathcal{H}(\Omega)$ el conjunto de funciones holomorfas en Ω.*

Dado $A \subset \mathbb{C}$ f se dice holomorfa en A si para cada punto $a \in A$ existe una bola $D(a,R)$ de manera que $f \in \mathcal{H}(D(a,R))$.

f se dice entera si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

Proposición 2.2.5 *Sea Ω un abierto convexo, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $f'(z) = 0$ $\forall z \in \Omega$ entonces f es constante.*

Demostración Sean $z_0, z_1 \in \Omega$. Si $f = u + iv$ definimos $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ por $g(t) = u((1-t)z_0 + tz_1)$. Es continua en $[0,1]$ y derivable en $(0,1)$. Además

$g'(t) = Re(z_1 - z_0)\frac{\partial u}{\partial x}(z_0 + t(z_1 - z_0)) + Im(z - z_0)\frac{\partial u}{\partial y}(z_0 + t(z - z_0)) = 0.$

Por tanto, utizando el teorema de variable real, existe $K \in \mathbb{R}$ tal que $g(t) = K, t \in [0,1]$. Por tanto $u(z_1) = u(z_0)$.

Similarmente $v(z_1) = v(z_0)$. Lo que da f es constante. ■

Corolario 2.2.6 *Sea Ω una región, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $f'(z) = 0$ $\forall z \in \Omega$ entonces f es constante.*

Demostración Sea $z_0 \in \Omega$ y

$$A = \{z \in \Omega : f(z) = f(z_0)\}.$$

Es un cerrado no vacío. Sea $z \in A$ y $D(z,r) \subset \Omega$. Usando el teorema anterior f es constante en $D(z,r)$ y por tanto $D(z,r) \subset A$. Luego A es abierto. Por conexión $A = \Omega$, de lo que se deduce que f es constante. ■

Proposición 2.2.7 *Sea Ω una región, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.*

(i) Si $|f|$ es constante $\Longleftrightarrow$ f es constante.

(ii) Si $Re(f)$ ó $Im(f)$ es constante $\Longleftrightarrow$ f es constante.

Demostración

(i) Si suponemos $u^2 + v^2 = K$ con $K > 0$ (pues $K = 0$ es trivial) entonces podemos derivar y obtendremos

$$uu_x + vv_x = 0 = uu_y + vv_y.$$

Es decir, $uu_x = -vv_x$ y $uu_y = -vv_y$. Ahora usando las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$u^2 u_x = -uvv_y = -v^2 u_x.$$

De donde $u_x = 0$. Análogamente $v_x = 0$. Por tanto $f' = 0$ y así f es constante.

(ii) Si $u_x = u_y = 0$ entonces también $v_x = v_y = 0$. ■

Proposición 2.2.8 *Sea Ω una región, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.*

Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $\bar{f} \in \mathcal{H}(\Omega)$ entonces f es constante.

Demostración Si $f = u + iv$ entonces $\bar{f} = u - iv$. Por (CR) $u_x = v_y = -v_y$ y $u_y = -v_x = v_x$. Así v es constante y por consiguiente también f. ■

2.3 Funciones armónicas

Definición 2.3.1 *Sea Ω un abierto de $\mathbb{C}$, $u : \Omega \to \mathbb{R}$ se dice armónica en Ω si $u \in C^2(\Omega)$ y verifica la ecuación de Laplace*

$$\Delta u(x,y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = u_{xx}(z) + v_{yy}(z) = 0$$

para todo $z = x + iy \in \Omega$.

Denotamos $\mathcal{H}ar(\Omega)$ el espacio vectorial de funciones armónicas en Ω.

Nota 2.3.1 *Sea $f = u + iv \in \mathcal{H}(\Omega)$ donde $u, v \in C^2(\Omega)$, entonces $u = Re(f) \in \mathcal{H}ar(\Omega)$.*

En efecto, usando el Teorema de Schwarz sobre las derivadas cruzadas, $u_{xy} = u_{yx}$ y $v_{xy} = v_{yx}$. Por tanto

$$u_{xx} + u_{yy} = (v_y)_x + (-v_x)_y = v_{yx} - v_{xy} = 0.$$

■

Nota 2.3.2 *Sea $f = u+iv \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $u, v \in C^2(\Omega)$ y $f(z) \neq 0$ para $z \in \Omega$. Entonces $U(z) = log(|f(z)|) \in \mathcal{H}ar(\Omega)$.*

En efecto, $U(z) = \frac{1}{2}log(u^2(z) + v^2(z))$. Luego

$$U_x = \frac{uu_x + vv_x}{u^2 + v^2}, U_y = \frac{uu_y + vv_y}{u^2 + v^2}$$

$$U_{xx} = \frac{((u_x)^2 + uu_{xx} + (v_x)^2 + vv_{xx})(u^2 + v^2) - 2(uu_x + vv_x)^2}{(u^2 + v^2)^2}$$

$$= \frac{-(u_x)^2u^2 - (v_x)^2v^2 - 4uvu_xv_x + (uu_{xx} + vv_{xx})(u^2 + v^2) + v^2(u_x)^2 + u^2(v_x)^2}{(u^2 + v^2)^2},$$

Análogamente

$$U_{yy} = \frac{-(u_y)^2u^2 - (v_y)^2v^2 - 4uvu_yv_y + (uu_{yy} + vv_{yy})(u^2 + v^2) + v^2(u_y)^2 + u^2(v_y)^2}{(u^2 + v^2)^2}.$$

Por tanto, usando que $u, v \in \mathcal{H}ar(\Omega)$ y las ecuaciones de Cauchy-Riemann es fácil comprobar que $U_{xx} + U_{yy} = 0$. ■

Proposición 2.3.2 *Sean Ω un abierto de $\mathbb{C}$, $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$ funciones en $C^2(\Omega)$.*

$f = u + iv \in \mathcal{H}(\Omega) \Longleftrightarrow u, v \in \mathcal{H}ar(\Omega)$ *y satisfacen* $u_x = v_y, u_y = -v_x$.

Demostración Inmediata. ∎

Definición 2.3.3 *Dada $u \in \mathcal{H}ar(\Omega)$ se llama armónica conjugada de u a una función $\tilde{u} \in \mathcal{H}ar(\Omega)$ tal que $f = u + i\tilde{u} \in \mathcal{H}(\Omega)$.*

Proposición 2.3.4 *Sea $\Omega = D$ ó $\Omega = \mathbb{C}$. Si $u \in \mathcal{H}ar(\Omega)$ entonces existe $\tilde{u}$ ármonica conjugada de u en Ω.*

Demostración Sea $z = x + iy \in \Omega$ consideramos

$$v(x, y) = \int_0^y u_x(x, t)dt + \phi(x).$$

Usando la armonicidad se tiene

$$v_x(x, y) = \int_0^y u_{xx}(x, t)dt + \phi'(x) =$$

$$-\int_0^y u_{yy}(x, t)dt + \phi'(x) = -u_y(x, y) + u_y(x, 0) + \phi'(x).$$

Como pretendemos que se cumpla (CR) ponemos $\phi'(x) = -u_y(x, 0)$, es decir $\phi(x) = -\int_0^x u_y(s, 0)ds + C$ y definimos

$$\tilde{u}(x, y) = \int_0^y u_x(x, t)dt - \int_0^x u_y(s, 0)ds.$$

Es una comprobación que $u + i\tilde{u}$ verifica (CR) ∎

Definición 2.3.5 *Dada $f : \Omega \to \mathbb{C}$ se llama primitiva de f a una función $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $g'(z) = f(z)$ para todo $z \in \Omega$.*

Proposición 2.3.6 *Sea u una función armónica en una región Ω. u admite armónica conjugada en Ω sí y solo si $f = u_x - iu_y$ admite primitiva en Ω.*

Demostración $\Rightarrow$ Tomar $g = u + iv$, donde v es una armónica conjugada de u. Es claro que es la primitiva de $u_x - iu_y = u_x + iv_x = f$.

$\Leftarrow$ Sea $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $g'(z) = f(z)$. Poniendo $g = U + iV$ tenemos $U_x = u_x, U_y = -u_y$. Por tanto, de la primera condición $U = u + \phi(y)$ y, de la segunda, $\phi'(y) = 0$. De aquí $U = u + C$ con $C \in \mathbb{R}$ y por tanto u admite como armónica conjugada la función V. ∎

2.4 Problemas propuestos

1(*) Probar con un ejemplo que, en general, las funciones holomorfas no satisfacen la propiedad del valor medio. Sin embargo, se tiene el siguiente sustituto : Sea f una función holomorfa en una región convexa D. Dados $\alpha, \beta \in D$ con $\alpha \neq \beta$, probar que existen $\lambda, \mu \in [\alpha, \beta]$ tales que

$$f(\alpha) - f(\beta) = (\alpha - \beta)[Ref'(\lambda) + iImf'(\mu)]$$

2.- Sean u_1, u_2, ..., u_n, $u_1^2 + ... + u_n^2$ funciones armónicas sobre una región D. Probar que cada u_k es constante sobre D.

3.- Hallar todas las funciones de la forma $u(x) + iv(y)$ que sean enteras.

4.- Hallar el polinomio armónico más general de la forma $ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$. Determinar la armónica conjugada.

5.- Sea Ω un dominio simétrico respecto del eje real. Probar que las funciones $f(z)$ y $\overline{f}(\overline{z})$ son simultáneamente holomorfas en Ω.

6.- Determinar en qué puntos satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann las funciones: $f(z) = \overline{z}$, $g(z) = |z|^2$, $h(z) = zrmRe\, z$.

7.- Demostrar que $f(z) = |RezImz|^{1/2}$ satisface en $z = 0$ las condiciones de Cauchy- Riemann, pero no es derivable en dicho punto.

8.- Encontrar funciones armónicas, no constantes, de la forma: i) $g(xy)$; ii) $g(x^2+y^2)$; iii) $g(\frac{y}{x})$ donde g es una función real de variable real suficientemente derivable.

9.- Verificar que $f(z) = f(x + iy) = x(x^2 + y^2)^{-1} - iy(x^2 + y^2)^{-1}$ es holomorfa en $\mathbf{C} - \{0\}$.

Capítulo 3

Series de potencias y nociones asociadas

3.1 Series de funciones y de potencias

Comenzaremos este capítulo con varios resultados previos ya conocidos sobre series:

Definición 3.1.1 *Dada una serie (formal) de números complejos, denotada* $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$*, viene dada por un par de sucesiones* (z_n, s_n) *de manera que* $s_n = \sum_{k=0}^{n} z_k$.

Se dice convergente si existe $lim_{n\to\infty} s_n$*. Al valor de dicho límite se le llama suma de la serie.*

Se dice absolutamente convergente si $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ *es convergente.*

Nota 3.1.1 *Sea* $z_n = x_n + iy_n$.

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ *es convergente si y sólo si* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *y* $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ *son convergentes.*

Además $\sum_{n=0}^{\infty} z_n = \sum_{n=0}^{\infty} x_n + i\sum_{n=0}^{\infty} y_n$.

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ *es absolutamente convergente si y sólo si* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *y* $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ *son absolutamente convergentes.*

(c) Si $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ *converge si y sólo si* $\forall\varepsilon > 0$ *existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $|\sum_{k=n}^{m} z_k| < \varepsilon \ \forall m \geq n \geq n_0$.

(d) Si $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ *converge entonces* $lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} z_k = 0$ *y* $lim_{n\to\infty} z_n = 0$.

(e) Sean $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ *y* $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$ *dos series de números complejos. Denotamos* $c_n = \sum_{k=0}^{n} z_k w_{n-k}$.

Si $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$ son absolutamente convergentes entonces $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ es absolutamente convergente.

Además $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = (\sum_{n=0}^{\infty} z_n)(\sum_{n=0}^{\infty} w_n)$.

Cuando la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ converge se llama el Producto de Cauchy de las dos series $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$.

Definición 3.1.2 *Una serie (formal) de funciones, denotada $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$, viene dada por un par de sucesiones (f_n, s_n) de manera que $s_n = \sum_{k=0}^{n} z_k$.*

Se dice convergente en $A \subset \Omega$ si existe

$$lim_{n\to\infty} s_n(z)$$

para todo $z \in A$. Al valor de dicho límite se le llama suma de la serie.

Se dice uniformemente convergente en $A \subset \Omega$ si $lim_{n\to\infty} s_n(z) = s(z)$ es uniforme en A.

Se dice que converge uniformemente en compactos de Ω si existe $lim_{n\to\infty} s_n(z) = s(z)$ uniformemente en compactos de Ω.

Se dice absolutamente convergente si $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(z)|$ es convergente.

Teorema 3.1.3 *(Criterio M-de Weierstrass) Sea $A \subset \mathbb{C}$ y sean $f_n : A \to \mathbb{C}$. Supongamos que existe $x_n \geq 0$ tal que $\sup_{z\in A} |f_n(z)| \leq x_n$ con $\sum_{n=0}^{\infty} x_n < \infty$. Entonces $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ converge absolutamente y uniformente en A.*

Demostración Veamos que la sucesión de sumas parciales es de Cauchy (tanto en valor absoluto como uniforme en A).

$$\sum_{n=N}^{M} |f_n(z)| \leq \sum_{n=N}^{M} x_n.$$

$$sup_{z\in A} |\sum_{n=N}^{M} f_n(z)| \leq \sum_{n=N}^{M} x_n.$$

Aplicando el criterio de Cauchy a la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ se tiene el resultado.

∎

Definición 3.1.4 *Una serie de potencias es una serie de funciones donde $f_n(z) = a_n(z - z_0)^n$ para cierta sucesión $(a_n) \subset \mathbb{C}$ y $z_0 \in \mathbb{C}$, es decir es de la siguiente forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$.*

Analicemos para que valores de $z \in \mathbb{C}$ converge dicha serie. El conjunto de tales valores se llama dominio de convergencia de la serie. Nótese que es no vacío pues z_0 está en dicho conjunto.

Es útil recordar el concepto de límite superior de una sucesión de números reales.

Definición 3.1.5 *Dada una sucesión de números reales $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ se definen los límites superior e inferior respectivamente como*

$$\overline{lim}(x_n) = \inf_{n\geq 0} sup\{x_k : k \geq n\},$$

$$\underline{lim}(x_n) = \sup_{n\geq 0} inf\{x_k : k \geq n\}.$$

Algunas formulaciones equivalentes son las siguientes:

Nota 3.1.2 *Dada $(x_n)_{n=0}^{\infty}$.*

(a) $\overline{lim}(x_n)$ es "el mayor " de los límites de todas las subsucesiones de $(x_n)_{n=0}^{\infty}$. (Deben considerarse los valores $+\infty$ y $-\infty$ como posibles límites).

(b) $\overline{lim}(x_n) = l \in \mathbb{R}$ si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe una subsucesión x_{n_k} tal que $l - \varepsilon < x_{n_k}$ y existe n_0 tal que $x_n < l + \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$.

La propiedades básicas de dicha noción vienen reflejadas en la siguiente observación.

Nota 3.1.3 *Dadas $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ y $(y_n)_{n=0}^{\infty}$.*

(a) Si $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ es convergente entonces $\overline{lim}(x_n y_n) = lim(x_n)\overline{lim}(y_n)$.

(b) $\underline{lim}\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} \leq \underline{lim}|x_n|^{1/n} \leq \overline{lim}|x_n|^{1/n} \leq \overline{lim}\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}$.

Teorema 3.1.6 *(Abel) Dada una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, consideremos $R \in [0, \infty]$ dado por*

$$R^{-1} = \overline{lim}|a_n|^{1/n}.$$

(a) Si $R > 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ converge absolutamente y uniformemente sobre compactos de $D(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$.

(b) Si $R < \infty$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ no converge en $(\bar{D}(z_0, R))^c = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| > R\}$.

(c) Existe un único R verificando las propiedades (a) y (b).

El este único valor R se le llama el radio de convergencia de la serie y la fórmula del mismo se conoce por fórmula de Cauchy-Hadamard.

Demostración

(a) Es suficiente probar que la serie $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n||z-z_0|^n$ converge uniformemente en todo compacto $K\subset D(z_0,R)$.

Dado un compacto K existe $0<\delta<R$ con $K\subset \bar{D}(z_0,\delta)$. Es claro que existe n_0 tal que $|a_n|^{1/n}\leq \frac{1}{2R}+\frac{1}{2\delta}$ para todo $n\geq n_0$.

Entonces existe $C>0$ tal que

$$sup_{z\in K}|a_n||z-z_0|^n\leq |a_n|\delta^n\leq C(\frac{1}{2}(1+\frac{\delta}{R}))^n.$$

Aplicando el criterio M-de Weierstrass tenemos la convergencia uniforme en K.

(b) Sea $z\in\mathbb{C}$ tal que $\delta=|z-z_0|>R$. Si la serie $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ converge entonces el término general tiende a cero. Por tanto existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que $|a_n|\delta^n<1/2$ para todo $n>n_0$. Esto implica que $\frac{1}{R}=\overline{lim}|a_n|^{1/n}\leq\frac{1}{\delta}$ que es una contradicción. ∎

(c) Sea R' cumpliendo (a) y (b). Veamos que $R=R'$. Si consideramos cualquier $r<R'$ y cualquier z tal que $|z-z_0|=r$, como $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|r^n$ es convergente y en particular acotada, se concluye que $\frac{r}{R}=\overline{lim}(|a_n|r^n)^{1/n}\leq 1$. Esto implica que $r\leq R$. Es decir $R'\leq R$.

Por otro lado dado $\varepsilon>0$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|(R'+\varepsilon)^n$ no es convergente. El criterio de la raiz implica que

$$\frac{R'+\varepsilon}{R}=\overline{lim}(|a_n|(R'+\varepsilon)^n)^{1/n}\geq 1.$$

De donde se concluye que $R\leq (R'+\varepsilon)$. Y por tanto $R\leq R'$. ∎

Nota 3.1.4 *Sobre el comportamiento en la frontera del disco de convegencia no puede decirse nada.*

Caso 1.- $\sum_{n=0}^{\infty}z^n$ *converge* $\Longleftrightarrow |z|<1$.

Caso 2.- $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$ *converge* $\Longleftrightarrow |z|\leq 1$.

Caso 3.- $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n}$ *converge* $\Longleftrightarrow |z|\leq 1, z\neq 1$.

Proposición 3.1.7 *Sean* $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$, $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n$ *con radios de convergencia* R_1,R_2 *respectivamente. Entonces*

(i) $(f+g)(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)z^n$ *con radio* $R\geq min(R_1,R_2)$.

(ii) $(\lambda g)(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda a_nz^n$ *con radio* $R=R_1$.

(i) $(fg)(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ *donde* $c_n=\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}$ *y con radio* $R\geq min(R_1,R_2)$.

Proposición 3.1.8 *Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ una serie de potencias con radio de convergencia $R \geq 1$ tal que*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n - a_{n-1}| < +\infty.$$

Entonces $\overline{D(0,1)} \setminus \{1\} \subset \{z \in \mathbb{C} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ converge}\}$ si y sólo si $lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Demostración

$\Longrightarrow$) Es inmediata, pues tomando $z \in \bar{D} \setminus \{1\}$ con $|z| = 1$ la convergencia implica que el término general converge a cero.

$\Longleftarrow$) Sea $s_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$. Entonces, si $m > n$,

$$(1-z)(s_m(z) - s_n(z)) = (1-z) \sum_{k=n+1}^{m} a_k z^k =$$

$$= \sum_{k=n+2}^{m} (a_k - a_{k-1}) z^k + a_{n+1} z^n - a_m z^{m+1}.$$

Entonces

$$|1-z||s_n(z) - s_m(z)| \leq \sum_{k=n+2}^{m} |a_k - a_{k-1}| + |a_{n+1}| + |a_m|.$$

Usando la convergencia de la serie y el hecho de que a_n converge a cero se prueba que $s_n(z)$ es de Cauchy si $z \neq 1$. ∎

Corolario 3.1.9 *Sea $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq \mathbf{R}$ con $a_n \searrow 0$.*

Entonces $\overline{D(0,1)} \setminus \{1\} \subseteq \{z : \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{converge}\}$.

Demostración Si a_n decrece a cero (siendo números reales) entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n - a_{n-1}| = lim_{n\to\infty}(a_0 - a_n) = a_0.$$

Por otro lado como $a_n \leq a_0$ se tiene $(a_n)^{1/n} \leq (a_0)^{1/n}$ lo que permite concluir que el radio de convergencia de la serie $R \geq 1$ y aplicar el resultado precedente. ∎

Proposición 3.1.10 *Sea* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *una serie de potencias con radio de convergencia* 1. *Si* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *converge, entonces*

$$\lim_{r\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Demostración Fijemos $N < M$.

$$\sum_{n=N}^{M} a_n - \sum_{n=N}^{M} a_n r^n = \sum_{n=N}^{M} a_n(1-r^n) = (1-r)\sum_{n=N}^{M} a_n(\sum_{k=0}^{n-1} r^k).$$

Por tanto, si $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ y $b_n = \frac{1-r^n}{1-r} = \sum_{k=0}^{n-1} r^k$ el criterio de sumación de Abel implica que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=N}^{M} a_n - \sum_{n=N}^{M} a_n r^n &= (1-r)\sum_{n=N}^{M}(s_n - s_{n-1})b_n \\
&= (1-r)s_M b_M - (1-r)s_{N-1}b_N + (1-r)\sum_{n=N}^{M-1} s_n(b_n - b_{n+1}) \\
&= (1-r)s_M b_M - s_{N-1}b_N + (1-r)\sum_{n=N}^{M-1} s_n(b_n - b_{n+1}) \\
&= (1-r^M)s_M - (1-r^N)s_{N-1} - (1-r)(\sum_{n=N}^{M-1} s_n r^n) \\
&= (s_M - s_{N-1})(1-r^N) + (1-r)\sum_{k=N}^{M-1}(s_M - s_k)r^k.
\end{aligned}$$

Tomando límites cuando $M \to \infty$

$$|\sum_{n=N}^{\infty} a_n r^n - \sum_{n=N}^{\infty} a_n| \le |R_N|(1-r^N) + (1-r)\sum_{k=N}^{\infty} |R_{k+1}| r^k.$$

Dado $\varepsilon > 0$ existe N_0 tal que $|R_n| = |\sum_{k=n}^{\infty} a_k| < \varepsilon/2$ para todo $n \ge N_0$.

Luego, si $N \ge N_0$,

$$|\sum_{n=N}^{\infty} a_n r^n - \sum_{n=N}^{\infty} a_n| \le (\varepsilon/2)(1-r^N) + (1-r)(\varepsilon/2)\sum_{k=N}^{\infty} r^k = \varepsilon/2.$$

Por tanto

$$\begin{aligned}|\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n| &\leq \left|\sum_{n=0}^{N_0-1} a_n r^n - \sum_{n=0}^{N_0-1} a_n\right| + \left|\sum_{n=N_0}^{\infty} a_n r^n - \sum_{n=N_0}^{\infty} a_n\right| \\ &\leq (N_0-1)(\max_{n\leq N_0-1} |a_n|)(1-r^{N_0-1}) + \varepsilon/2.\end{aligned}$$

Ahora elegimos $0 < \delta < 1$ de modo que si $\delta < r < 1$ entonces $1 - r^{N_0-1} < (2(N_0-1)\max_{n\leq N_0-1} |a_n|)^{-1}\varepsilon$. Esto permite concluir con la demostración. ∎

Es claro que toda serie de potencias, gracias a la convergencia uniforme sobre compactos, define una función continua en el disco de convergencia.

Teorema 3.1.11 *Dada $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ con radio $R > 0$.*
(i) $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}(z-z_0)^n$ tiene el mismo radio de convergencia R.
(ii) f(z) es derivable en $D(z_0, R)$ con $f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}(z-z_0)^n$

Demostración Podemos suponer (por simplicidad) que $z_0 = 0$.
(i) Es consecuencia del hecho siguiente

$$\overline{lim}((n+1)|a_n|)^{1/n} = lim(n+1)^{1/n}\overline{lim}(|a_n|)^{1/n}.$$

(ii) Escribimos $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}z^n$.

$$\frac{f(w)-f(z)}{w-z} - g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\frac{w^n - z^n}{w-z} - nz^{n-1}).$$

Usando ahora la fórmula ciclotómica se tiene

$$\begin{aligned}\frac{w^n - z^n}{w-z} - nz^{n-1} &= (w^{n-1} + w^{n-2}z + ... + wz^{n-2} + z^{n-1}) - nz^{n-1} \\ &= (w-z)(w^{n-2} + 2zw^{n-3} + 3z^2w^{n-4} + ... + (n-1)z^{n-2}).\end{aligned}$$

Fijado $z \in D(0,R)$ elegimos S tal que $|z| < S < R$ y $\delta > 0$ tal que $\delta < S - |z|$. Ahora para todo $w \in D(z,\delta)$ se tiene que $|w| < S$ y por tanto

$$|\frac{f(w)-f(z)}{w-z} - g(z)| \leq |w-z| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{2} S^{n-2}|a_n| \leq C_S|w-z|.$$

Nótese que la serie anterior es convergente por el criterio de la raiz. Podemos pasar al límite y probamos que $f'(z) = g(z)$. ∎

Corolario 3.1.12 *Dada* $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ *con radio* $R>0$.
(i) $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(z-z_0)^{n+1}$ *tiene el mismo radio de convergencia* R.
(ii) $g(z)$ *es una primitiva de* f *en* $D(z_0,R)$, *es decir* $g'(z)=f(z)$.

Demostración La parte (i) sigue un razonamiento análogo al anterior y se omite.

La parte (ii) es consecuencia inmediata del teorema anterior. ■

Corolario 3.1.13 *Dada* $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ *con radio* $R>0$. *Entonces* f *es infinitamente derivable en* $D(z_0,R)$ *siendo*

$$f^{(k)}(z)=\sum_{n=k}^{\infty}n(n-1)(n-2)...(n-k+1)a_n(z-z_0)^{n-k}.$$

Además $a_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$.

Corolario 3.1.14 *Dada* $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ *con radio* $R_1>0$, $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n(z-z_0)^n$ *con radio* $R_2>0$. *Entonces son equivalentes:*
(i) $f(z)=g(z)$ *en* $|z-z_0|<min(R_1,R_2)$.
(ii) $a_n=b_n$ *para todo* $n\geq 0$.

3.2 Funciones analíticas

Definición 3.2.1 *Dado* $\Omega\subset\mathbb{C}$, $a\in\Omega$ *y* $f:\Omega\to\mathbb{C}$. f *se dice analítica en* a *si existe una serie de potencias* $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n$ *con radio de convergencia* $R>0$ *de modo que para algún* $\delta>0$ *se tiene* $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n$ *en* $|z-a|<\delta$.

Se dice analítica en Ω , *y se denota* $f\in\mathcal{A}(\Omega)$, *si lo es en cada punto* $a\in\Omega$.

Nuestro objetivo será ver que $\mathcal{H}(\Omega)=\mathcal{A}(\Omega)$. De los resultados anteriores hemos probado ya el siguiente contenido: $\mathcal{A}(\Omega)\subseteq\mathcal{H}(\Omega)$.

Veamos en primer lugar que las series de potencias son un ejemplo de funciones analíticas en su disco de convergencia. Para ello necesitamos un lema previo.

Lema 3.2.2 *Dada $f(z)=\sum_{n=0}^\infty a_n(z-z_0)^n$ con radio $R>0$.*

(i) Dado $k\in\mathbb{N}$, $f(z)=\sum_{n=0}^\infty a_{n+k}(z-z_0)^n$ tiene el mismo radio de convergencia R.

(ii) Sea $P(n)$ un polinomio. Entonces $f(z)=\sum_{n=0}^\infty P(n)a_n(z-z_0)^n$ tiene el mismo radio de convergencia R.

Demostración (i) Observar que si $z\neq z_0$ entonces

$$\sum_{n=0}^{m} a_{n+k}(z-z_0)^n=(z-z_0)^{-k}\sum_{n=k}^{m+k} a_n(z-z_0)^n.$$

Por tanto la convergencia o no de ambas series coincide.

(ii) Se sigue de que $\lim_{n\to\infty}\frac{|P(n+1)|}{|P(n)|}=1$. Lo que permite aplicar las fórmulas para cálculo del límite superior. ∎

Teorema 3.2.3 *Dada $f(z)=\sum_{n=0}^\infty a_n(z-z_0)^n$ con radio $R>0$. Entonces $f\in\mathcal{A}(D(z_0,R))$.*

Demostración Dado $w\in D(z_0,R)$ tomamos $\delta=R-|w-z_0|$.

Veamos que $f(z)=\sum_{n=0}^\infty b_n(z-w)^n$ en $D(w,\delta)$.

$$\begin{aligned} f(z)=\sum_{n=0}^\infty a_n(z-z_0)^n &= \sum_{n=0}^\infty a_n(z-w+w-z_0)^n\\ &= \sum_{n=0}^\infty a_n(\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!k!}(z-w)^k(w-z_0)^{n-k})\\ &= \sum_{k=0}^\infty(\sum_{n=k+1}^\infty \frac{n!}{(n-k)!k!}a_n(w-z_0)^{n-k})(z-w)^k\\ &= \sum_{n=0}^\infty b_k(z-w)^k \end{aligned}$$

Siendo $b_k=\sum_{n=k+1}^\infty\frac{n!}{(n-k)!k!}a_n(w-z_0)^{n-k}$, que está bien definido para $w\in D(z_0,R)$ gracias al lema previo.

La justificación del intercambio de sumación es consecuencia de la convergencia absoluta de las series

$$\sum_{n=0}^\infty |a_n|\sum_{k=0}^\infty c_n(k)|z-w|^k=$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} c_n(k)|a_n||z-w|^k = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|(|w-z_0|+|z-z_0|)^n < \infty$$

donde $c_n(k) = 0$ si $n > k$ y $c_n(k) = \frac{n!}{(n-k)!k!}|w-z_0|^{n-k}$ para $n \leq k$. ∎

Las funciones analíticas definidas sobre regiones vienen determinadas por el valor de todas la derivadas en un punto cualquiera de la región.

Teorema 3.2.4 *Sea Ω una región y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función analítica en Ω. Entonces son equivalentes:*

(i) $f(z) = 0$ para todo $z \in \Omega$.

(ii) Existe $a \in \Omega$ tal que $f^{(n)}(a) = 0$ para todo $n \geq 0$.

Demostración

(i) $\Rightarrow$ (ii). Obvio.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Sea $A = \{z \in \Omega : f^{(n)}(z) = 0$ para todo $n \geq 0\}$.

Es suficiente ver que es abierto y cerrado, pues es no vacío (ya que $a \in A$).

A es cerrado por ser intersección numerable de cerrados.

A es abierto. Sea $b \in A$ y $\delta > 0$ con $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-b)^n$ en $|z-b| < \delta$. Por unicidad de coeficientes en las series de potencias se tiene $b_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y de ahí se sigue que $f(z) = 0$ en $D(b,\delta)$ y por tanto $D(b,\delta) \subset A$.

∎

Veamos ahora un principio básico de las funciones analíticas: Los ceros son aislados.

Denotemos $\mathcal{Z}_f(\Omega) = \{z \in \Omega : f(z) = 0\}$ y recordemos que A' denota el conjunto de puntos de acumulación de A.

Teorema 3.2.5 *Sea Ω una región y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función analítica en Ω. Entonces son equivalentes:*

(i) $f(z) = 0$ para todo $z \in \Omega$.

(ii) $\mathcal{Z}_f(\Omega)' \cap \Omega \neq \varnothing$.

Demostración

(i) $\Rightarrow$ (ii). Obvio.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Sea $a \in \mathcal{Z}_f(\Omega)' \cap \Omega$ y $\delta > 0$ con $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n$ en $|z-a| < \delta$. Veamos que $b_n n! = f^{(n)}(a) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Si existe $b_k \neq 0$ (supongamos que es el primero de ellos) entonces

$$f(z) = (z-a)^k \sum_{n=k}^{\infty} b_n(z-a)^{n-k}.$$

Poniendo $g(z) = \sum_{n=k}^{\infty} b_n(z-a)^{n-k}$. Se tiene $g(a) \neq 0$. Entonces $g(z) \neq 0$ en un entorno de a y de aquí $f(z)$ no se anula en un entorno reducido de a y por tanto a no puede ser punto de acumulación de ceros. ∎

Corolario 3.2.6 *(Principio de prolongación analítica) Sea Ω una región y $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ funciones analíticas en Ω. Entonces son equivalentes:*
(i) $f(z) = g(z)$ para todo $z \in \Omega$.
(ii) Existe $a \in \Omega$ tal que $f^{(n)}(a) = g^{(n)}(a)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
(iii) $f(z) = g(z)$ en un conjunto con puntos de acumulación en Ω.

3.3 Problemas propuestos

1.- Calcular los radios de convergencia de:

$$a)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}z^n;\quad b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}z^n;\quad c)\sum_{n=0}^{\infty}2^{-n}z^n;\quad d)\sum_{n=0}^{\infty}2^n z^{n!};$$

$$e)\sum_{n=0}^{\infty}(n+a^n)z^n;\quad f)\sum_{n=1}^{\infty}n^n z^n;\quad g)\sum_{n=0}^{\infty}a^{n^2}z^n;\quad h)\sum_{n=0}^{\infty}z^{n!};$$

$$i)\sum_{n=1}^{\infty}a^{n^2}z^{1+2+\cdots+n};\quad j)\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(\frac{n^n\sqrt{2\pi n}}{e^n}\right)z^{n!}.$$

2.- Si $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ tiene radio de convergencia R, determinar los radios de convergencia de$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, donde a_n es:
a) $P(n)c_n$(P polinomio no nulo) ; b) $(2^n-1)c_n$; c) $\dfrac{c_n}{n!}$; d) $n^n c_n$.

3.- Discutir el comportamiento de las siguientes series de potencias en la frontera de su disco de convergencia:

$$a)\sum_{n=0}^{\infty}z^n;\quad b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n};\quad c)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2};\quad d)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}z^n;$$

$$e)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\log n}z^{3n-1};\quad f)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n!}}{n^2};\quad g)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{pn}}{n}(p\in\mathbf{N});$$

$$h)\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n\ \ (\{a_n\}_{n=0}^{\infty}\ \text{ sucesión acotada entre 1 y K.})$$

4.- Sumar en el círculo de convergencia las siguientes series:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} n z^n; \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}; \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1};$$

$$d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n; \quad e) \sum_{n=2}^{\infty} \tbinom{n}{2} z^n; \quad f) \sum_{n=0}^{\infty} (2^n - 1) z^n.$$

5.- Calcular

$$\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \sin nx; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\phi}{n}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{senn\phi}{n} \quad (0 < |\phi| \leq \pi.)$$

6.- Calcular el desarrollo en serie de potencias en torno a $z = 0$, $z = 1$ y $z = -i$ de las funciones

$$\frac{1}{2-z}, \quad \frac{z+1}{z^2-4}, \quad \frac{1}{z^2-4z+4}.$$

7.- Sea $f \in \mathcal{A}(D(0,1))$ tal que $f(\frac{1}{n^2}) = \frac{n^4}{(n^2-1)^2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Calcular $f(i/2)$.

Capítulo 4

Funciones elementales

4.1 Función exponencial

Definición 4.1.1 *(Función Exponencial) La siguiente serie de potencias se conoce con el nombre de función exponencial:*

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Proposición 4.1.2
(i) Es una función entera (radio de convergencia $R = \infty$).
(ii) Es la única función analítica que extiende la exponencial real e^x.
(iii) $(e^z)' = e^z$.
(iv) $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$.
(v) $|e^z| = e^{Re(z)}$ para todo $z \in \mathbb{C}$.
(vi) $e^z \neq 0$ y $1/e^z = e^{-z}$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

Demostración (i) es consecuencia de la fórmula de Cauchy-Hadamard.
(ii) es consecuencia del Principio de prolongación analítica.
(iii) Como $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ entonces

$$(e^z)' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \frac{z^n}{(n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$$

(iv) Usando el producto de Cauchy de series

$$e^z e^{z'} = (\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!})(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z')^n}{n!}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{1}{(n-k)!} z^k (z')^{n-k}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} z^k (z')^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+z')^n}{n!}.$$

(v) $|e^z|^2 = e^z e^{\bar{z}} = e^{z+\bar{z}} = e^{2Re(z)}$.

(vi) $|e^z| > 0$ y $e^z e^{-z} = e^0 = 1$. ∎

Definición 4.1.3 *(Funciones trigonométricas e hiperbólicas)*
Las funciones seno (coseno) trigonométricos se definen por:
$sen(z) = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$, $cos(z) = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$.
Las funciones seno (coseno) hiperbólicos se definen por:
$sh(z) = \frac{e^{z}-e^{-z}}{2}$, $ch(z) = \frac{e^{z}+e^{-z}}{2}$.

Nota 4.1.1 *Obsérvese que*

$$sh(z) = -isen(iz), \quad ch(z) = cos(iz), \quad sen(z) = -ish(iz), \quad cos(z) = ch(iz).$$

Proposición 4.1.4
(i) $sen(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$.
(ii) $cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$.
(iii) $sh(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$.
(iv) $ch(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$.

Demostración Hacemos únicamente (i), las demás son similares.

$$\begin{aligned} sen(z) &= \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(iz)^n}{n!} - \frac{(-iz)^n}{n!}\right) \\ &= \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i)^n - (-i)^n}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}. \end{aligned}$$

∎

Proposición 4.1.5
(i) Las funciones $sen(z)$ *y* $cos(z)$ *son enteras. Además* $(sen(z))' = cos(z)$ *y* $(cos(z))' = -sen(z)$.
(ii) Las funciones $sh(z)$ *y* $ch(z)$ *son enteras. Además* $(sh(z))' = ch(z)$ *y* $(ch(z))' = sh(z)$.
(iii) Las funciones $sen(z)$ *y* $cos(z)$ *no son acotadas en* $\mathbb{C}$ *pero sí lo son en* $\mathbb{R}$.

Demostración (i) y (ii) Usar que son combinaciones lineales de funciones enteras, ó bien el radio de convergencia de las series.

(iii) Observar que $2cos(ix) = e^{-x} + e^{x}$ y por tanto no está acotada. Análoga para $sen(ix)$. Por otro lado $|e^{ix}| = 1$ luego $|sen(x)| \leq \frac{1}{2}(|e^{ix}| + |e^{-ix}|) = 1$. ∎

Proposición 4.1.6

(i) $cos(z+z') = cos(z)cos(z') - sen(z)sen(z')$.
(ii) $sen(z+z') = sen(z)cos(z') + cos(z)sen(z')$.
(iii) $cos^2(z) + sen^2(z) = 1$.
(iv) $ch^2(z) - sh^2(z) = 1$.
(v) $ch(z+z') = ch(z)ch(z') + sh(z)sh(z')$.
(vi) $sh(z+z') = ch(z)sh(z') + sh(z)ch(z')$.

Demostración Probemos únicamente la parte (i). La (ii) es análoga.

$$\frac{1}{4}[(e^{iz} + e^{-iz})(e^{iz'} + e^{-iz'}) + (e^{iz} - e^{-iz})(e^{iz} - e^{-iz})] = \frac{1}{2}(e^{i(z+z')} + e^{-i(z+z')}).$$

(iii) y (iv) son inmediatas de la definición.

(v) y (vi) Se siguen de (i) y (ii) usando la relación entre trigonométricos e hiperbólicos. ∎

Proposición 4.1.7

(i) $Re(cos(z)) = cos(Re(z))ch(Im(z)), Im(cos(z)) = -sen(Re(z))sh(Im(z)$.
(ii) $Re(sen(z)) = sen(Re(z))ch(Im(z)), Im(sen(z)) = cos(Re(z))sh(Im(z))$.
(iii) $|cos(z)| = \sqrt{cos^2(Re(z)) + sh^2(Im(z))}$.
(iv) $|sen(z)| = |sh(z)| = \sqrt{sen^2(Re(z)) + sh^2(Im(z))}$.
(v) $|ch(z)| = \sqrt{cos^2(Im(z)) + sh^2(Re(z))}$.
(vi) $|sh(z)| = \sqrt{sen^2(Im(z)) + sh^2(Re(z))}$

Demostración (i) Nótese que

$$cos(Re(z) + iIm(z)) = cos(Re(z))cos(iIm(z)) - sen(Re(z)sen(iIm(z)) =$$

$$= cos(Re(z))ch(Im(z)) - isen(Re(z)sh(Im(z))$$

El resto se deja al lector interesado. ∎

Proposición 4.1.8 *(El número π) Existe un número real (llamado π) tal que $\frac{\pi}{2} \in (0, \sqrt{3})$ verificando que $cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ y $cos(x) > 0$ si $x \in [0, \frac{\pi}{2})$.*

Demostración De las fórmulas anteriores se tiene que $sen^2(x) + cos^2(x) = 1$ y por tanto $-1 \leq cos(x) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Veamos primero que $cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ para todo $x \geq 0$.

En efecto, sea $h(x) = cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}$: Veamos que $h(x) \leq 0$ para $x \geq 0$. Es suficiente comprobar que h es decreciente. Como h es derivable con $h'(x) = x - sen(x) - \frac{x^3}{6}$, $h''(x) = 1 - cos(x) - \frac{x^2}{2}$, $h'''(x) = senx - x$ y $h^{(iv}(x) = cosx - 1 \leq 0$. Se concluye que h''' es decreciente y $h'''(0) = 0$. Por tanto se tiene que $h'''(x) \leq 0$. Reiterando el argumento se llega a que h es decreciete y como $h(0) = 0$ se obtiene el resultado.

Usando ahora que $cos(0) = 1$ y $cos(\sqrt{3}) \leq 1 - \frac{3}{2} + \frac{9}{24} = \frac{-3}{24}$ entonces el teorema de Bolzano asegura que existe $x_0 \in (0, \sqrt{3})$ tal que $cos(x_0) = 0$.

Sea $\frac{\pi}{2} = inf\{x \in (0, \sqrt{3}) : cos(x) = 0\}$. Dicho valor tiene las propiedades pretendidas. ■

Proposición 4.1.9 *Las funciones seno y coseno funciones son periódicas de periodo 2π.*

Demostración Teniendo en cuenta que $sen(\frac{\pi}{2}) = 1$ se obtiene que $cos(\pi) = cos^2(\frac{\pi}{2}) - sen^2(\frac{\pi}{2}) = -1$. Por consiguiente $sen(\pi) = 0$. Además $cos(2\pi) = cos^2(\pi) - sen^2(\pi) = 1$. Ahora se tiene

$$cos(z + 2\pi) = cos(z)cos(2\pi) - sen(z)sen(2\pi) = cos(z).$$

Similar con la función $sen(z)$. ■

Teorema 4.1.10

(i) $e^z = e^{Re(z)}(cos(Im(z) + isen(Im(z)))$.

En particular $e^{\pi i} + 1 = 0$ (Fórmula de Euler).

(ii) $e^z = 1 \Longleftrightarrow z = 2k\pi i \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Por tanto e^z es una función periódica de periodo $2\pi i$.

(iii) e^z es una aplicación suprayectiva de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(iv) e^z es una biyección de $BH_{-\pi,\pi} = \{z \in \mathbb{C} : -\pi < Im(z) < \pi\}$ sobre $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$.

Demostración

(i) Es claro que $cos(y) + isen(y) = e^{iy}$ para todo $y \in \mathbb{R}$. De aquí se obtiene facilmente.

(ii) Es elemental del caso (i) y la periodicidad de las funciones seno y coseno. Además $e^z = e^w$ equivale a $e^{z-w} = 1$ y por tanto $z = w + 2k\pi i$.

(iii) Sea $w \neq 0$. Tomar $|w| > 0$ y definir $x = \log |w|$. Escribimos $\frac{w}{|w|} = a + ib$ donde $a^2 + b^2 = 1$.

Si $a = 0$ y $b = 1$, entonces $w = i|w|$ y tomamos $y = \pi/2$ y el punto $z = x + i\pi/2$ verifica $e^z = e^{\log |w|}e^{iy} = w$.

Si $a = 0$ y $b = -1$, entonces $w = -i|w|$ y tomamos $y = 3\pi/2$ y el punto $z = x + 3i\pi/2$ verifica $e^z = e^{\log |w|}e^{iy} = w$.

Si $a = 1$ y $b = 0$, entonces $w = |w|$ y tomamos $y = 0$ y el punto $z = x$ verifica $e^z = e^{\log |w|} = w$.

Si $a = -1$ y $b = 0$, entonces $w = -|w|$ y tomamos $y = \pi$ y el punto $z = x + i\pi$ verifica $e^z = -|w| = w$.

Supongamos entonces que $0 < |a| < 1$. Usando la continuidad existe $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ tal que $cos(t) = |a|$. Y consecuentemente $|sen(t)| = |b|$. Ahora si $a > 0, b \geq 0$ tomamos $y = t$, si $a > 0, b < 0$ tomamos $y = 2\pi - t$, si $a < 0, b \geq 0$ tomamos $y = \pi - t$ y si $a < 0, b < 0$ tomamos $y = \pi + t$. En todos los casos $z = x + iy$ verifica que $e^z = w$.

(iv) Si $w = x$ con $x < 0$ y $e^z = x = e^{Re(z)}cos(Im(z)) + ie^{Re(z)}sen(Im(z)))$ para $z \in \mathbb{C}$ se tiene que $sen(Im(z)) = 0$ y $cos(Im(z)) < 0$. Por tanto $Im(z) = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ y así $z = a + ik\pi$ con k impar. Dado $w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ existe un único $z \in \mathbb{C}$ tal que $Im(z) \in (-\pi, \pi)$ con $e^z = w$.

∎

Proposición 4.1.11 *(i)* $\mathcal{Z}_{sen}(\mathbb{C}) = \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ *y* $\mathcal{Z}_{cos}(\mathbb{C}) = \{(2k + 1)\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$.

(ii) $\mathcal{Z}_{sh}(\mathbb{C}) = \{ik\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ *y* $\mathcal{Z}_{ch}(\mathbb{C}) = \{i(2k + 1)\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$.

Demostración (i) $sen(z) = 0$ equivale a $e^{iz} = e^{-iz}$. Es decir $e^{2iz} = 1$. Es decir $2iz = 2k\pi i \quad (k \in \mathbb{Z})$ o equivalentemente $z = k\pi$ para algún $k \in \mathbb{Z}$.

$cos(z) = 0$ equivale a $e^{iz} = -e^{-iz}$. Es decir $e^{2iz} = -1 = e^{i\pi}$. Es decir $2iz = i\pi + 2k\pi i \quad (k \in \mathbb{Z})$ o equivalentemente $z = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$ para algún $k \in \mathbb{Z}$.

(ii) Usar que $sh(z) = isen(iz)$ y $ch(z) = cos(iz)$.

∎

Definición 4.1.12 *Definimos para $z \notin \mathcal{Z}_{cos}$ las funciones*

$$tag(z) = \frac{sen(z)}{cos(z)}, \quad sec(z) = \frac{1}{cos(z)}.$$

Análogamente para $z \notin \mathcal{Z}_{sen}$ las funciones

$$cotag(z) = \frac{cos(z)}{sen(z)} \quad cosec(z) = \frac{1}{sen(z)}.$$

Proposición 4.1.13
(i) Las funciones $tag(z)$ y $sec(z)$ son periodicas de periodo π y holomorfas en $BV_{-\pi/2,\pi/2} = \{z : -\pi/2 < Re(z) < \pi/2\}$..
(ii) Las funciones $cotag(z)$ y $cosec(z)$ son periodicas de periodo π y holomorfas en $BV_{0,\pi} = \{z : 0 < Re(z) < \pi\}$.
(iii) $tag(z)' = 1 + tag(z)^2 = sec^2(z)$, $cotag(z)' = -1 - cotag(z)^2 = -cosec^2(z)$

4.2 Argumentos y logaritmos

Sea $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ que es un grupo con la estructura multiplicativa.

Proposición 4.2.1 *La aplicación $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{T}$ dada por $\phi(y) = e^{iy}$ es un homomorfimo de grupos contínuo, suprayectivo y con núcleo $2\pi\mathbb{Z}$.*
En particular $\hat{\phi} : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to \mathbb{T}$ es un isomorfismo.

Demostración El hecho de que es continua y homomorfismo de grupos son propiedades conocidas de la exponencial.
Dado $w \in \mathbb{T}$, existe, por el Teorema 4.1.10, $z \in \mathbb{C}$ tal que $e^z = w$. Como $|w| = 1 = e^{Re(z)}$ se tiene que $z = iy$ para $y \in \mathbb{R}$.
Por otro lado $\phi(y) = 1$ equivale a $iy = 2k\pi i$ para algún $k \in \mathbb{Z}$. Entonces $Ker(\phi) = 2\pi\mathbb{Z}$. ∎

Definición 4.2.2 *Dado $z \neq 0$ entonces $\frac{z}{|z|} \in \mathbb{T}$. El conjunto de los argumentos de z viene dado por*

$$\hat{\phi}^{-1}(\frac{z}{|z|}) = arg(z) = \{\theta \in \mathbb{R} : z = |z|e^{i\theta}\}.$$

Proposición 4.2.3 *Dados $z \neq 0$ y $a \in \mathbb{R}$ existe un único $\theta_a \in [a, a+2\pi) \cap arg(z)$.*

Demostración Tomar $\theta \in arg(z)$ cualquiera.

Caso $a = 0$. Es claro que $\theta_0 = \theta - 2\pi[\frac{\theta}{2\pi}] \in [0, 2\pi) \cap arg(z)$.

Caso $a \neq 0$. Definir $\theta_a = \theta_0 - 2\pi[\frac{\theta_0}{2\pi} - \frac{a}{2\pi}]$. Es claro que $\theta_a \in arg(z)$ pues $\theta_a - \theta \in 2\pi\mathbb{Z}$. Por otro lado, usando que $x - 1 < [x] \leq x$ para $x \in \mathbb{R}$,

$$\theta_a - a = \theta_0 - a - 2\pi[\frac{\theta_0}{2\pi} - \frac{a}{2\pi}] \geq 0$$

y

$$\theta_a - a < \theta_0 - a - 2\pi(\frac{\theta_0}{2\pi} - \frac{a}{2\pi} - 1) = 2\pi.$$

La unicidad se sigue del hecho de que dos argumentos distintos difieren en un múltiplo de 2π. ■

Nota 4.2.1 *Se pone $Arg_{[a,a+2\pi)}$ al valor anterior. El caso $a = -\pi$ se conoce con el nombre de argumento principal y se escribe $Arg(z)$.*

Definición 4.2.4 *Dado $z_0 \in \mathbb{C}$ y dos caminos que pasan por el γ_1, γ_2 con $\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2) = z_0$ y $\gamma_1'(t_1)\gamma_2'(t_2) \neq 0$ se define al ángulo de los caminos en el punto z_0 por*

$$Ang_{z_0}(\gamma_1, \gamma_2) = Arg(\frac{\gamma_2'(t_2)}{\gamma_1'(t_1)}).$$

Geométricamente es claro que el angulo coincide con el ángulo formado por las rectas tangentes en el punto.

Definición 4.2.5 *Sea Ω una región, $z_0 \in \Omega$ y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ tal que existe $\delta > 0$ con $f(z) \neq f(z_0)$ para todo $z \in D(z_0, \delta)$. Se dice que f preserva ángulos en z_0 si existe $a \in \mathbb{T}$ tal que para todo $\theta \in [-\pi, \pi)$ existe el límite*

$$lim_{r\to 0} e^{-i\theta} \frac{f(z_0 + re^{i\theta}) - f(z_0)}{|f(z_0 + re^{i\theta}) - f(z_0)|} = a.$$

Teorema 4.2.6 *Sea Ω región, $z_0 \in \Omega$ y $f : \Omega \to \mathbb{C}$.*

(i) Si f es holomorfa en z_0 con $f'(z_0) \neq 0$, γ_1, γ_2 son caminos con $\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2) = z_0$ y $\gamma_1'(t_1)\gamma_2'(t_2) \neq 0$ y si $\sigma_1(t) = f(\gamma_1(t)), \sigma_2(t) = f(\gamma_2(t))$ entonces se tiene

$$Ang_{f(z_0)}(\sigma_1, \sigma_2) = Ang_{z_0}(\gamma_1, \gamma_2).$$

(ii) Si f es holomorfa en z_0 con $f'(z_0) \neq 0$ entonces f preserva ángulos en z_0.

(iii) Si f es diferenciable en z_0 con $Df_{z_0} \neq 0$ y preserva ángulos en z_0 entonces f es derivable en z_0 y $f'(z_0) \neq 0$.

Demostración

(i) Es inmediato pues $\sigma_i'(t_i) = f'(z_0)\gamma_i'(t_i)$ para $i = 1, 2$.

(ii) Tomar $a = \frac{f'(z_0)}{|f'(z_0)|}$.

$$lim_{r\to 0} e^{-i\theta} \frac{f(z_0 + re^{i\theta}) - f(z_0)}{|f(z_0 + re^{i\theta}) - f(z_0)|} = lim_{r\to 0} \frac{f(z_0 + re^{i\theta}) - f(z_0)/re^{i\theta}}{|f(z_0 + re^{i\theta}) - f(z_0)/re^{i\theta}|} = \frac{f'(z_0)}{|f'(z_0)|}.$$

(iii) Suponer (por simplicidad) $z_0 = f(z_0) = 0$ y $Df_0(0) \neq 0$. Entonces

$$f(x, y) = L(x, y) + \sqrt{x^2 + y^2}\nu(x, y)$$

donde $\nu(x, y) \to 0$ si $(x, y) \to 0$. En otras palabras para $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$

$$f(z) = \alpha z + \beta\bar{z} + |z|\nu(z).$$

Tenemos para todo $\theta \in [-\pi, \pi)$

$$lim_{r\to 0} e^{-i\theta} \frac{f(re^{i\theta})}{|f(re^{i\theta})|} = lim_{r\to 0} \frac{r\alpha + \beta re^{2i\theta} + r\nu(re^{i\theta})}{|r\alpha + \beta re^{2i\theta} + r\nu(re^{i\theta})|} = \frac{\alpha + \beta e^{-2i\theta}}{|\alpha + \beta e^{-2i\theta}|}.$$

Suponemos $\frac{\alpha+\beta e^{-2i\theta}}{|\alpha+\beta e^{-2i\theta}|} = a$ para todo θ.

Entonces $\alpha + \beta e^{-2i\theta} = |\alpha + \beta e^{-2i\theta}|e^{i\theta_0}$

En particular

$$\alpha + \beta = |\alpha + \beta|e^{i\theta_0}, \quad \alpha - \beta = |\alpha - \beta|e^{i\theta_0}.$$

Se obtiene $\beta = 0$ y $\alpha \neq 0$.

De donde f es derivable en 0 y su derivada es α. ∎

Fijemos algunas notaciones de interés:

Dado $a \in \mathbb{R}$ sea $H_a = \{z = re^{ia} : r \geq 0\}$.

Dados $a, b \in [-\pi, \pi)$ con $a < b$, sea $S_{a,b} = \{z \in C : a < Arg(z) < b\}$.

Dados $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, sea $BH_{a,b} = \{z \in C : a < Re(z) < b\}$.

Dados $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, sea $BV_{a,b} = \{z \in C : a < Im(z) < b\}$.

Dados $a, b \in \mathbb{R}$ con $0 < a < b$, sea $D(z_0; a, b) = \{z \in C : a < |z - z_0| < b\}$.

Proposición 4.2.7 *Sea $w = exp(z)$. Es decir $(x, y) \to (e^x cos(y), e^x sen(y))$.*

(i) exp transforma las rectas paralelas al eje OY, $x = c$ en circunferencias centradas en el origen y radio e^c.

(ii) exp transforma las rectas paralelas al eje OX, $y = c$, en semirectas que parten del origen y pendiente $m = tag(c)$, es decir H_c.

(iii) exp transforma rectas $y = mx$ en la espiral de Arquímedes $r = e^{\frac{\theta}{m}}$.

(iv) Sea $0 < b - a < 2\pi$ entonces exp es biyección de $BH_{a,b}$ en un sector $S_{a',b'}$ con $a' = -\pi + a - 2\pi[\frac{a}{2\pi}]$ y $b' = -\pi + b - 2\pi[\frac{b}{2\pi}]$.

(v) Sean $a < b$ entonces exp es biyección de $BV_{a,b}$en una corona $D(0, e^a, e^b)$.

Definición 4.2.8 *Dado $S \in \mathbb{C}$ y $f : S \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, una determinación continua (o rama uniforme) del argumento de f sobre S es una aplicación continua $A : S \to \mathbb{R}$ tal que $A(z) \in arg(f(z))$, i.e. $e^{iA(z)} = \frac{f(z)}{|f(z)|}$.*

Proposición 4.2.9 *Para todo $a \in \mathbb{R}$ la función $Arg_{[a,a+2\pi)}$ es una determinación continua del argumento (de la identidad) sobre $\mathbb{C} \setminus H_a$.*

Demostración Suponer $a = -\pi$. Veamos la continuidad en $z_0 = 1$. Dado $\varepsilon > 0$ tomamos $\delta = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$. Si $z \in D(1, \delta)$ entonces $|Arg(z) - Arg(1)| = |\theta|$, donde $sen(\theta) = \frac{Im(z)}{|z|}, cos(\theta) = \frac{Re(z)}{|z|}$.

Obsérvese que $z \in D(1, \delta)$ implica $Re(z) > 1 - \delta, |Im(z)| < \delta$, lo que nos dice que $|\theta| < \pi/2$. Ahora usando que $|\theta| < |\frac{sen(\theta)}{cos(\theta)}|$ tenemos

$$|Arg(z) - Arg(1)| < \frac{|Im(z)|}{Re(z)} < \frac{\delta}{1 - \delta} = \varepsilon.$$

El caso $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ se reduce al anterior ya que si $z_n \to z_0$ entonces $\frac{z_n}{z_0} \to 1$. Por tanto $Arg(\frac{z_n}{z_0}) \to 0$.

Ahora bien $Arg(\frac{z_n}{z_0}) + Arg(z_0) \in arg(z_n)$. En efecto

$$e^{i(Arg(\frac{z_n}{z_0})+Arg(z_0))} = \frac{z_n/z_0}{|z_n|/|z_0|}\frac{z_0}{|z_0|} = \frac{z_n}{|z_n|}.$$

Luego $Arg(\frac{z_n}{z_0}) + Arg(z_0) = Arg(z_n) + 2K_n\pi$.

Por tanto $Arg(z_0) = lim_{n\to\infty}(Arg(z_n) + 2K_n\pi)$.

Al ser $Arg(z_0) \in (-\pi, \pi)$ se tiene $K_n = 0$ para $n \geq n_0$ y $Arg(z_0) = lim_{n\to\infty} Arg(z_n)$.

Para ver que $Arg(z)$ no es continua en $\mathbb{R}_-$ basta tomar sucesiones que converjan al punto en distinto semiplano.

El caso $a \neq -\pi$ se reduce al anterior pues $Arg_{[a,a+2\pi)}(z) = a + \pi + Arg(-e^{-ia}z)$. (La comprobación de este hecho consiste en ver que ambos valores pertenecen a $arg(z) \cap [a, a+2\pi)$)

∎

Proposición 4.2.10 *(i) No existe ninguna determinación continua del argumento en un conjunto que contenga una circunferencia que rodee al origen.*

(ii) Dos determinaciones continuas del argumento de una función que no se anula en un conjunto conexo difieren en un múltiplo de 2π.

Demostración

(i) Sea C una circunferencia que rodea al origen. Supongamos que existe una función continua $A : C \to \mathbb{R}$ tal que $\frac{z}{|z|} = e^{iA(z)}$ para $z \in C$.

Veamos que A es inyectiva. Si $z_1, z_2 \in C$ y $A(z_1) = A(z_2)$ entonces $\frac{z_1}{|z_1|} = \frac{z_2}{|z_2|}$. Por tanto z_1, z_2 están en la misma semirecta que pasa por el 0. Si $z_1 \neq z_2$ se contradice el hecho de que 0 esté en el interior de la circunferencia. Como $A : C \to A(C)$ es una biyección continua entonces $A(C) = [a, b]$ pues tiene que ser conexo y compacto. Pero si $z_1 \in C$ cumple $A(z_1) = a$ y $z_2 \in C$ cumple $A(z_2) = b$ con $z_1 \neq z_2$ se llega a contradicción ya que sólo un arco que une z_1 y z_2 se podrá poner en biyección con $[a, b]$.

(ii) Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un conexo y A_1, A_2 dos determinaciones continuas del argumento de una función f sobre Ω. Entonces $f(z) = |f(z)|e^{iA_1(z)} = |f(z)|e^{iA_2(z)}$. Luego $A_1(z) = A_2(z) + 2K(z)\pi$. Por continuidad $K(z) \in \mathbb{Z}$ implica que $K(z) = k$ para todo $z \in \Omega$.

∎

Definición 4.2.11 *Sea $z \neq 0$, w es un logarítmo de z si se verifica $e^w = z$.*

Se escribe $log(z)$ el conjunto de todos los logarítmos de z.

Nota 4.2.2

$$log(z) = \{w = log(|z|) + i\theta : \theta \in arg(z)\}.$$

Se escribe $log_{[a,a+2\pi)} = log(|z|) + iArg_{[a,a+2\pi)}$ y $Log(z)$ es el logarítmo principal que corresponde al argumento principal.

Definición 4.2.12 *Dados $\Omega \in \mathbb{C}$ y $f : \Omega \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ una determinación continua (o rama uniforme) del logarítmo de f sobre Ω es una aplicación continua $L : \Omega \to \mathbb{C}$ tal que $L(z) \in log(f(z))$ para todo $z \in \Omega$.*

Teorema 4.2.13 *Sea Ω una región y $f : \Omega \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorfa . Sea $L : \Omega \to \mathbb{C}$ una determinación continua del logarítmo de f en Ω. Entonces $L \in \mathcal{H}(\Omega)$ y además $L'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$ para todo $z \in \Omega$.*

Demostración Usando $lim_{w\to 0}\frac{e^w-1}{w} = 1$, la continuidad de L y la derivabilidad de f tenemos que dado $z \in \Omega, 0 < \varepsilon < 2$ existen $\delta, \mu > 0$ tales que
si $|w| < \delta$ entonces $|\frac{w}{e^w-1} - 1| < \frac{\varepsilon|f(z)|}{2(|f'(z)|+|f(z)|)}$ y
si $|h| < \mu$ entonces $|L(z+h) - L(z)| < \delta$ y $|\frac{f(z+h)-f(z)}{h} - f'(z)| < \frac{\varepsilon|f(z)|}{2}$.
Por tanto si $|h| < \mu$ se tiene

$$\begin{aligned}
|\frac{L(z+h)-L(z)}{h} &- \frac{f'(z)}{f(z)}| = |\frac{L(z+h)-L(z)}{f(z+h)-f(z)}\frac{f(z+h)-f(z)}{h} - \frac{f'(z)}{f(z)}| \\
&= |\frac{L(z+h)-L(z)}{e^{L(z+h)}-e^{L(z)}}\frac{f(z+h)-f(z)}{h} - \frac{f'(z)}{e^{L(z)}}| \\
&= |\frac{1}{e^{L(z)}}||\frac{f(z+h)-f(z)}{h}\frac{L(z+h)-L(z)}{e^{L(z+h)-L(z)}-1} - f'(z)| \\
&\leq |\frac{1}{e^{L(z)}}||\frac{f(z+h)-f(z)}{h}||(\frac{L(z+h)-L(z)}{e^{L(z+h)-L(z)}-1} - 1)| \\
&+ |\frac{1}{e^{L(z)}}||\frac{f(z+h)-f(z)}{h} - f'(z)| \\
&\leq |\frac{1}{e^{L(z)}}|(|f'(z)| + |f(z)|)(|\frac{L(z+h)-L(z)}{e^{L(z+h)-L(z)}-1} - 1)| \\
&+ |\frac{1}{e^{L(z)}}||\frac{f(z+h)-f(z)}{h} - f'(z)| \\
&< |\frac{1}{f(z)}|(\frac{\varepsilon|f(z)|}{2} + \frac{\varepsilon|f(z)|}{2}) = \varepsilon.
\end{aligned}$$

■

Teorema 4.2.14 *Sea Ω una región en $\mathbb{C}$ tal que $0 \notin \Omega$.*
(i) A es una determinación continua del argumento en Ω si y sólo si $L(z) = log(|z|) + iA(z)$ es una determinación del logarítmo.
(ii) Si L es una determinación continua del logarítmo en Ω entonces $L \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $L'(z) = \frac{1}{z}$ para todo $z \in \Omega$
(iii) Sean $L_1, L_2 : \Omega \to \mathbb{C}$ determinaciones continuas del logarítmo. Entonces existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $L_1(z) = L_2(z) + 2k\pi i$ para todo $z \in \Omega$.

Demostración
(i) Es inmediato que si A es continua entonces L también. Claramente $e^{L(z)} = |z|e^{iA(z)} = z$.

Reciprocamente L continua implica A continua. Además $e^{iA(z)} = e^{L(z)-log(|z|)} = \frac{z}{|z|}$.

(ii) Aplicar el resultado anterior a $f(z) = z$.

(iii) Si $z = e^{L_1(z)} = e^{L_2(z)}$ para todo $z \in \Omega$ entonces $L_1(z) - L_2(z) = 2k(z)\pi i$, pero como $k(z) \in \mathbb{Z}$ y continua se tiene que es constante. ■

Teorema 4.2.15
(i) $Log \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-)$ y $(Log(z))' = \frac{1}{z}$.

(ii) Para todo $z_0 \neq 0$ existe una determinación continua del logarítmo en $D(z_0, |z_0|)$.

(iii) $Log(1+z) \in \mathcal{H}(D)$. Además $Log(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1}$, $\forall z \in D$.

Demostración (i) Inmediato del teorema anterior.

(ii) Tomar $L(z) = w_0 + Log(\frac{z}{z_0})$ con $w_0 \in log(z_0)$. Es claro que si $z \in D(z_0, |z_0|)$ entonces $\frac{z}{z_0} = 1 + \frac{z-z_0}{z_0} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$.

(iii) Inmediato usando la derivación término a término. ■

Teorema 4.2.16 *Sea $a \in \mathbb{R}$. Sea $BH_{a,a+2\pi} = \{z \in \mathbb{C} : a < Im(z) < a+2\pi\}$. Entonces*

$$exp_a : BH_{a,a+2\pi} \to \mathbb{C} \setminus H_a, \qquad exp_a(z) = e^z$$

es una biyección.

Además $log_{[a,a+2\pi)}$ corresponde a la inversa de dicha aplicación.

Demostración

Inyectividad: Sean $z, z' \in: BH_{a,a+2\pi}$ con $e^z = e^{z'}$. Como $z - z' = 2k\pi i$ entonces $Im(z) - Im(z') = 2k\pi$, luego $z = z'$.

Suprayectividad: Si $w \in H_a$ entonces si $e^z = w = re^{ia}$ se tiene $z = logr + i(a + 2k\pi) \notin: BH_{a,a+2\pi}$.

Dado $w \in \mathbb{C} \setminus H_a$ tomar $z = log_[a, a + 2\pi)(w)$. Es inmediato comprobar que $e^z = w$.

Como $log_[a, a + 2\pi)$ es una determinación continua en $\mathbb{C} \setminus H_a$ tenemos que es la inversa de exp_a.

Definición 4.2.17 *Dado $z \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$ se dice raiz n-ésima de z a todo numero complejo w tal que $w^n = z$.*

Proposición 4.2.18 *(i) Dado $z \neq 0$ existen n raices n-ésimas de z.*

(ii) El conjunto de las raices n-ésimas de la unidad forman un subgrupo cíclico de $\mathbb{T}$ con generador $e^{\frac{2\pi i}{n}}$.

Demostración (i) Sea $w_k = |z|^{1/n} e^{\frac{Arg(z)+2ik\pi}{n}}$ para $k = 0, 1, 2, ..., n-1$. Es inmediato que $w_k^n = z$.

Por otro lado si $w^n = z$ entonces $|w|^n = |z|$. Como $nArg(w) \in arg(w^n) = arg(z)$ entonces $nArg(w) = Arg(z) + 2ik\pi$ para algún $k \in \mathbb{Z}$. Es claro que $k \in \{0, 1, ..., n-1\}$.

(ii) Inmediata. ∎

Definición 4.2.19 *Dado $z \in \mathbb{C}$ con $z \neq 0$ definimos por z^w el conjunto de valores $\{e^{ww'} : w' \in log(z)\}$.*

En particular la rama principal de z^w es el valor e^{wLogz}.

Caso $w = \frac{1}{n}$ las distintas determinaciones corresponden a las diferentes raices de z.

Teorema 4.2.20 *Escribiremos $\sqrt{z}$ la rama o determinación principal de la raiz cuadrada de z.*

(i) La función $\sqrt{z} \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-)$ y además $(\sqrt{z})' = \frac{1}{2\sqrt{z}}$.

(ii) $z \to z^2$ es una biyección holomorfa de $\{z : Re(z) > 0\}$ en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ con inversa $\sqrt{z}$.

(iii) En particular $\sqrt{1+z} \in \mathcal{H}(D)$.

Además $\sqrt{1+z} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n)!}{4^n (2n-1)(n!)^2} z^n$ para $z \in D$.

Demostración (i) Obvio de $\sqrt{z} = e^{\frac{1}{2} Logz}$.

(ii) Inyectividad: $z^2 = z'^2$ implica $z = z'$ ó $z = -z'$, pero si $z, z' \in \{z : Re(z) > 0\}$ entonces $z = z'$.

Suprayectividad: Si $z^2 \in \mathbb{R}_-$ entonces $Re(z)^2 \leq Im(z)^2$ y $Re(z)Im(z) = 0$. Entonces $Re(z) = 0$.

Dado $w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ tomar $z = \sqrt{|w|} e^{\frac{iArg(w)}{2}}$. Es claro que $Re(z) > 0$ y $z^2 = w$.

(iii) Nótese que $f(z) = e^{\frac{1}{2} Log(1+z)}$ y

$$f'(z) = \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2} Log(1+z)} \frac{1}{1+z} = \frac{1}{2} e^{\frac{-1}{2} Log(1+z)}.$$

Recurrentemente puede obtenerse que para $n \geq 2$

$$f^{(n)}(z) = (-1)^{n-1} \frac{1}{2} \frac{3}{2} ... \frac{2n-3}{2} e^{\frac{1-2n}{2} Log(1+z)} =$$

$$= \frac{(-1)^{n-1} 1.2.3.4.5...(2n-3)(2n-2).(2n-1).2n}{4^n n!(2n-1)} e^{\frac{1}{2} Log(1+z)} \frac{1}{(1+z)^n}.$$

De aquí con la fórmula de Taylor se obtiene el resultado.

■

Proposición 4.2.21 *Sea* $w = z^2$ *es decir* $(x, y) \to (x^2 - y^2, 2xy)$ *(o bien* $Re^{i\theta} \to R^2e^{2i\theta}$*).*

(i) z^2 *transforma las rectas paralelas a los ejes* OY *en parábolas (salvo* $x = 0, y = 0$ *que degeneran en semirectas.)*

(ii) z^2 *transforma las hipérbolas* $x^2 - y^2 = c, xy = d$ *en rectas paralelas a los ejes* $u = c, v = d/2$ *respectivamente.*

(iii) z^2 *transforma rectas* $y = mx$ *en semirectas que pasan por el origen, siendo* $m = 0, \infty$ *las correspondientes a* $\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_-$ *respectivamente.*

(iv) Sea $0 < b - a < \pi$ *entonces* z^2 *es biyección de un sector* $S_{a,b}$ *en otro* $S_{2a,2b}$.

(v) z^2 *es biyección de* $BH_{0,1}$ *en* $\{z \in \mathbb{C} : 1 - Re(z) > \frac{Im^2(z)}{4}\} \setminus \mathbb{R}_-$.

4.3 Problemas propuestos

1.- Calcular las partes real, partes imaginaria y el módulo de las funciones $senz$, $cosz$, tgz, Shz, Chz, Thz.

2.- Estudiar $\lim_{z\to\infty} e^z$ a lo largo de cada semirecta con origen en $z = 0$.

3.- Probar que si $a \in [-1, 1]$ todas las raíces de la ecuación $sen\ z = a$ son reales.

4.-Demostrar que $senz$ y $cosz$ son suprayectivas.

5.- Sea $a \neq 0$, $a \in \mathbf{C}$, $k \in \mathbb{N}$. Definimos $(a^z)_k = e^{z \log_{[k,k+2\pi)} a}$. Probar que $(a^z)_k$ es analítica en $\mathbf{C}$ y hallar su desarrollo en serie de potencias de z.

6.- Dar la definición de determinación de $\sqrt{z}$. Probar que toda determinación de $\sqrt{z}$ es holomorfa y que su derivada es $\frac{1}{2\sqrt{z}}$.Probar que también es analítica. Además, si f y g son dos determinaciones, entonces $f = g$ o $f = -g$.

7.- Desarrollar en serie de potencias de z y decir cuál es el círculo máximo en que es válido el desarrollo de las siguientes funciones:
i) $sen^2 z$, ii) $Ch^2 z$

8.- Desarrollar en serie de potencias de z:

i) $\sqrt{z+i}$, ii) $Log\,\dfrac{1+z}{1-z}$.

9.- Desarrollar en serie de potencias de z:
i) $\dfrac{z}{z^2-4z+13}$, ii) $\dfrac{z^2}{(z+1)^2}$.

10.- Desarrollar en serie de potencias de z:
i)$Arctgz$, ii) $Arcsenz$.

11.- Desarrollar en serie de potencias de $(z-1)$ y determinar el círculo máximo en que es válido el desarrollo de las siguientes funciones:
i) $\dfrac{z^2}{(z+1)^2}$; ii) $\dfrac{z}{z^2-2z+5}$;

12.- Desarrollar en serie de potencias de $(z-1)$:
i) $\sqrt[3]{z}$; ii) $sen(2z-z^2)$.

13.- Probar que si $\dfrac{z}{e^z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \dfrac{z^n}{n!}$ (los coeficientes B_n se llaman números de Bernouilli), entonces:
i) $B_0 = 1$
ii) $\binom{n+1}{0}B_0 + \binom{n+1}{1}B_1 + \cdots + \binom{n+1}{n}B_n = 0$
iii) $B_{2n+1} = 0, n \geq 1$.

14.-Utilizando los números de Bernouilli, desarrollar en serie de potencias de z: i) $\dfrac{z}{e^z+1}$, ii) tgz , iii) $zcotgz$;
iv) $zcosecz$; v) $Log(\dfrac{tgz}{z}$) ; vi) $Log(\dfrac{z}{senz})$.

15.- Estudiar los dominios de definición y decir dónde son derivables las ramas principales de las funciones: a) $\sqrt{z^2-1}$, b) $\log\dfrac{z-1}{z}$, c) $\sqrt{\dfrac{z-1}{z+1}}$.

16.- Sea Ω un abierto conexo del plano complejo. Sea $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $g(z) \neq 0$, $\forall z \in \Omega$. Sea $f \in \mathcal{C}^{(o}(\Omega)$ tal que $f^2 = g$ (esto es, f es una determinación de la raiz cuadrada de g). Probar que $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Lo mismo si $e^{f(z)} = g(z)$.

17.- Demostrar que no existe una determinación continua del argumento en la región $\Omega = \{z \in \mathbf{C}; 1 < |z| < 2\}$.

18.- Desarrollar la rama principal de $\sqrt{z}$ en potencias de $z-a$, donde $a \notin (-\infty, 0]$.

19.- Sea $\Omega = \{z : Imz > 0\}$.

i) ¿Existe $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $f^2(z) = z(z-1)\ \forall\, z \in \Omega$?

ii) Dar el desarrollo en serie de potencias de $(z-i)$ de alguna de esas funciones (caso de existir).

20.- Probar que existe un abierto Ω que contiene al origen y una función $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $f^2(z) = 1 + sen z$, $\forall\, z \in \Omega$. Probar que f admite un desarrollo en serie de potencias.

21.- Dados $u, v \in \mathbf{C}(u \neq 0)$ definimos $u^v = e^{v \log u}$. Probar los siguientes contenidos y demostrar que pueden ser estrictos: $u^{v+w} \subseteq u^v.u^w$; $\log u^v \supseteq v \log u$; $u^{v \cdot w} \subseteq (u^v)^w$. Probar que si $n \in \mathbf{Z}$, u^n consta de un solo elemento y que $u^{\frac{1}{n}}$ consta de n elementos.

Capítulo 5

Integración sobre caminos

5.1 Integración sobre caminos.

Aunque la teoría de integración puede hacerse sobre curvas rectificables (es decir derivables a trozos y con derivada integrable Lebesgue) la haremos únicamente sobre caminos.

Definición 5.1.1 *Un camino γ es una curva diferenciable a trozos con derivada contínua en cada subintervalo de la partición, i.e. existe $t_0 = a < t_1 < ... < t_{n-1} < t_n = b$ tal que $\gamma|_{[t_{i-1},t_i]}$ es continua, derivable en el abierto, con derivada continua y existen $\gamma'(t_{i-1}^+)$ y $\gamma'(t_i^-)$.*

Se dice longitud del camino al valor $long(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|dt$. Denotado también $\int_\gamma |dz| = long(\gamma)$.

Definición 5.1.2 *Dada una curva $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ se dice curva opuesta de γ a la curva $(-\gamma)$, definida por $-\gamma : [-b,-a] \to \mathbb{C}$ siendo $(-\gamma)(t) = \gamma(-t)$ para $t \in [-b,-a]$.*

Dadas dos curvas $\gamma_1 : [a_1,b_1] \to \mathbb{C}$, $\gamma_2 : [a_2,b_2] \to \mathbb{C}$ con $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$, se dice curva unión de γ_1 y γ_2 a la curva $\gamma_1 \cup \gamma_2$, definida por $\gamma_1 \cup \gamma_2 : [a_1, b_1 + b_2 - a_2] \to \mathbb{C}$ siendo

$$(\gamma_1 \cup \gamma_2)(t) = \gamma_1(t) \qquad t \in [a_1,b_1]$$

$$(\gamma_1 \cup \gamma_2)(t) = \gamma_2(t + a_2 - b_1) \qquad t \in [b_1, b_1 + b_2 - a_2].$$

Definición 5.1.3 *Dadas dos curvas $\gamma_1 : [a_1,b_1] \to \mathbb{C}$, $\gamma_2 : [a_2,b_2] \to \mathbb{C}$. Diremos que $\gamma_1 \approx \gamma_2 \iff$ existe $\tau : [a_2,b_2] \to [a_1,b_1]$ continua estrictamente creciente con $\tau(a_2) = a_1, \tau(b_2) = b_1$ y $\gamma_2(t) = \gamma_1(\tau(t))$.*

Nota 5.1.1 *Las definiciones anteriores (para τ biyección derivable con derivada $\tau'(t) > 0$) se aplican a caminos, siendo el opuesto y la unión de caminos también un camino.*

Definición 5.1.4 *Una función acotada $\phi : [a,b] \to \mathbb{C}$ se dice integrable Riemann si $Re(\phi) : [a,b] \to \mathbb{R}$ y $Im(\phi) : [a,b] \to \mathbb{R}$ son integrables Riemann.*

Además se define

$$\int_a^b \phi(t)dt = \int_a^b Re(\phi(t))dt + i\int_a^b Im(\phi(t))dt.$$

Nota 5.1.2 *El desarrollo de integración Riemann de funciones complejas es pararelo al de funciones reales y puede deducirse del anterior, combinando partes reales e imaginarias.*

Definición 5.1.5 *Sea $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un camino y $f : \gamma^* \to \mathbb{C}$ una función continua, definimos*

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

Nota 5.1.3 *Las integrales de la definición anterior son integrales Riemann, pero si se hace el desarrollo sobre curvas rectificables se considera integración Lebesgue (que en este caso coinciden).*

Proposición 5.1.6 *Sean $\gamma_1, \gamma_2, \gamma$ caminos y f, g funciones continuas definidas sobre los soportes correspondientes.*

(i) Si $\gamma_1 \approx \gamma_2$ entonces $\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz$.

(ii) $\int_{-\gamma} f(z)dz = -\int_\gamma f(z)dz$.

(iii) $\int_{\gamma_1\cup\gamma_2} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz$.

(iv) $\int_\gamma (\alpha f + \beta g)(z)dz = \alpha\int_\gamma f(z)dz + \beta\int_\gamma g(z)dz$.

(v) $|\int_\gamma f(z)dz| \leq long(\gamma) sup_{z\in\gamma^*}|f(z)|$.

(vi) Sea Ω un abierto de $\mathbb{C}$, $\gamma^* \subset \Omega$, $f : \gamma^* \to \mathbb{C}$ continua y $F : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa tal que $F'(z) = f(z)\ \forall z \in \gamma^*$. Entonces

$$\int_\gamma f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Demostración:
(i) Suponer que $\gamma_2(t) = \gamma_1(\tau(t))$ para $t \in [c,d]$ and $\tau : [c,d] \to [a,b]$ es biyección creciente. Entonces

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_2} f(z)dz &= \int_c^d f(\gamma_1(\tau(t)))\gamma_1'(\tau(t))\tau'(t)dt \\ &= \int_a^b f(\gamma_1(s))\gamma_1'(s)ds = \int_{\gamma_1} f(z)dz.\end{aligned}$$

(ii)

$$\int_{-\gamma} f(z)dz = \int_{-b}^{-a} f(\gamma(-t))(-\gamma)'(t)dt = -\int_a^b f(\gamma(s))\gamma'(s)ds = -\int_\gamma f(z)dz$$

(iii)

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1\cup\gamma_2} f(z)dz &= \int_{a_1}^{b_1+b_2-a_2} f(\gamma(t))\gamma(t)dt \\ &= \int_{a_1}^{b_1} f(\gamma_1(s))\gamma_1'(s)ds + \int_{b_1}^{b_1+b_2-a_2} f(\gamma_2(s+a_2-b_1))\gamma_2'(s+a_2-b_1)ds \\ &= \int_{a_1}^{b_1} f(\gamma_1(s))\gamma_1'(s)ds + \int_{a_2}^{b_2} f(\gamma_2(s))\gamma_2'(s)ds \\ &= \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz.\end{aligned}$$

(iv) Inmediata.
(v)

$$|\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt| \leq \sup_{t\in[a,b]} |f(\gamma(t)| \int_a^b |\gamma'(t)|dt.$$

(vi)

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b (F\circ\gamma)'(t)dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

■

Proposición 5.1.7 *Sea γ un camino, $f_n : \gamma^* \to \mathbb{C}$ funciones continuas* *(i) Si* $f = lim_{n\to\infty} f_n$ *uniformemente en* γ^* *entonces*

$$\int_\gamma f(z)dz = lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n(z)dz.$$

(ii) Si $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ *uniformemente en* γ^* *entonces*

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{n=0}^{\infty} \int_\gamma f_n(z)dz.$$

Demostración: (i) se sigue de (v) en Proposición 5.1.6

$$|\int_\gamma (f_n(t) - f(z))dz| \leq sup_{z\in\gamma^*}|f_n(z) - f(z)|long(\gamma).$$

(ii) se sigue de (i) junto con la linealidad de (iv) en Proposición 5.1.6.

■

Nota 5.1.4

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}dt}{e^{it}} dt = 2\pi i.$$

Sea γ *el cuadrado de vértices* $0, 2, 2+2i, 2i$ *recorrido en la dirección de los puntos dados*

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-(1+i)} = 2\pi i.$$

Observamos en primer lugar que parametrizando ambos caminos se obtiene que

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-(1+i)} = \int_{\gamma_0} \frac{dz}{z}$$

donde γ_0 *el cuadrado de vértices* $-(1+i), 1-i, 1+i, -1+i$ *recorrido en la dirección de los puntos.*

En efecto escribimos $\gamma_0 = \gamma_1 \cup [-1+i, -1-i]$ *donde* $\gamma_1 = [-1-i, 1-i] \cup [1-i, 1+i] \cup [1+i, -1+i]$.

Tomando $F(z) = Logz$ *se tiene que* $F \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-)$ *y* $F'(z) = \frac{1}{z}$ *para* $z \in \gamma_1^*$. *Por tanto*

$$\int_{\gamma_0} \frac{dz}{z} = \int_{\gamma_1} \frac{dz}{z} + \int_{[-1+i,-1-i]} \frac{dz}{z},$$

$$\int_{\gamma_1} \frac{dz}{z} = Log(-1+i) - Log(-1-i) = i\frac{3\pi}{4} + i\frac{\pi}{4} = i\pi.$$

Aunque podemos argumentar del mismo modo con otra rama del logaritmo, haremos ahora el cálculo parametrizando el otro camino.

$$\begin{aligned} \int_{[-1+i,-1-i]} \frac{dz}{z} &= -\int_{[-1-i,-1+i]} \frac{dz}{z} \\ &= -\int_{-1}^{1} \frac{idt}{-1+it} \\ &= i\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt - \int_{-1}^{1} \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}dt \end{aligned}$$

Finalmente

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt = 2\int_{0}^{1} \frac{1}{1+t^2}dt = \pi$$

y

$$\int_{-1}^{1} \frac{t}{1+t^2}dt = 0.$$

Lo que permite concluir que

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z-(1+i)} = 2\pi i.$$

5.2 Construcción de funciones holomorfas

Proposición 5.2.1 *Sea γ un camino , $\Omega \in \mathbb{C}$ un abierto y $\phi : \gamma^* \times \Omega \to \mathbb{C}$ una función continua.*

(i) Entonces la función $g : \Omega \to \mathbb{C}$ dada por $g(z) = \int_\gamma \phi(w,z)dw$ es continua.

(ii) Si además para todo $(w,z) \in \gamma^* \times \Omega$ existe $\phi'_w(z)$ siendo $\phi_w(z) = \phi(w,z)$ y la aplicación $(w,z) \to \frac{\partial\phi}{\partial z}(w,z) = \phi'_w(z)$ es continua en $\gamma^* \times \Omega$ entonces $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $g'(z) = \int_\gamma \frac{\partial\phi}{\partial z}(w,z)dw$.

Demostración:

(i) Sea $z_0 \in \Omega$. Consideremos un disco $\overline{D(z_0,r)} \subset \Omega$. Como ϕ es uniformemente continua en $\gamma^* \times \overline{D(z_0,r)}$ dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ de modo que $|z-z_0| < \delta$ entonces $|\phi(w,z) - \phi(w,z_0)| < \frac{\varepsilon}{long(\gamma)}, \forall w \in \gamma^*$.

Entonces

$$\begin{aligned} |g(z)-g(z_0)| &= |\int_\gamma (\phi(w,z)-\phi(w,z_0))dw| \\ &\leq long(\gamma) sup_{w\in\gamma^*}|\phi(w,z)-\phi(w,z_0)| < \varepsilon \end{aligned}$$

(ii) Sea $z_0 \in \Omega$. Probemos que g es derivable en z_0.

$$\begin{aligned} &\left|\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0} - \int_\gamma \frac{\partial\phi}{\partial z}(w,z_0)dw\right| \\ =& \left|\int_\gamma \left(\frac{\phi(w,z)-\phi(w,z_0)}{z-z_0} - \frac{\partial\phi}{\partial z}(w,z_0)\right) dw\right| \\ =& \left|\int_\gamma \frac{\phi(w,z)-\phi(w,z_0)-(z-z_0)\frac{\partial\phi}{\partial z}(w,z_0)}{z-z_0}dw\right| \\ =& \left|\int_\gamma \frac{\Phi(w,z)-\Phi(w,z_0)}{z-z_0}dw\right| \end{aligned}$$

donde $w \to \Phi(w,z) = \phi(w,z) - z\frac{\partial\phi}{\partial z}(w,z_0) \in \mathcal{H}(\Omega)$. Ahora bien, denotando $\Phi_\omega(z) = \Phi(w,z)$,

$$|\Phi_w(z)-\Phi_w(z_0)| = |\int_{[z_0,z]} \Phi'_w(z)dz| \leq |z-z_0| sup_{\xi\in[z_0,z]}|\Phi'_\omega(\xi)|.$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \left|\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0} - \int_\gamma \frac{\partial\phi}{\partial z}(w,z_0)dw\right| &\leq \int_\gamma sup_{\xi\in[z_0,z]}|\Phi'_\omega(\xi)||dz| \\ &\leq (long(\gamma) sup_{\xi\in[z_0,z],w\in\gamma^*}|\Phi'_\omega(\xi)|. \end{aligned}$$

Como $\Phi'_w(z) = \frac{\partial\phi}{\partial z}(w,z) - \frac{\partial\phi}{\partial z}(w,z_0)$ es uniformemente continua en $\gamma^* \times \overline{D(z_0,r)}$, y se cumple que $\Phi'_w(z_0) = 0$, razonando como en el apartado (i) se concluye que

$$lim_{z\to z_0}\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0} = \int_\gamma \frac{\partial\phi}{\partial z}(w,z_0)dw$$

■

Teorema 5.2.2 *Sea γ un camino, $f : \gamma^* \to \mathbb{C}$ continua. Definimos la siguiente función F con dominio $\mathbb{C}\setminus\gamma^*$,*

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw.$$

Entonces $F \in \mathcal{A}(\mathbb{C} \setminus \gamma^*)$.

Además $F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}dw, z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$.

Demostración: Sea $\phi(w,z) = \frac{f(w)}{w-z} : \gamma^* \times (\mathbb{C} \setminus \gamma^*) \to \mathbb{C}$. Es claro que ϕ y $\frac{\partial \phi}{\partial z}(w,z) = \frac{f(w)}{(w-z)^2}$ son continuas en $\gamma^* \times (\mathbb{C} \setminus \gamma^*)$.

Por el teorema anterior $F \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \gamma^*)$ y además

$$F'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^2}dw.$$

Reiterando el argumento obtenemos al derivada n-ésima.

Probemos que F es analítica en $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ y demos otro modo de calcular la derivada n-ésima.

Dado $a \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$ y $w \in \gamma^*$ tenemos que si $|z-a| < |w-a|$ entonces

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-a}\frac{1}{1-\frac{z-a}{w-a}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}}.$$

Sea $r < d(a,\gamma^*)$. Entonces si $w \in \gamma^*$ y $|z-a| < r$ se puede aplicar la convergencia uniforme en $w \in \gamma^*$ de la serie anterior y por tanto

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(w)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}}dw = \sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}dw)(z-a)^n$$

(El intercambio de sumación e integral se garantiza por ser límite uniforme sobre γ^* de una sucesión de funciones, o bien pues $\sum_{n=0}^{\infty} |\frac{f(w)(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}}| \leq \frac{M}{d(a,\gamma^*)}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{r}{d(a,\gamma^*)})^n < \infty$.)

Además el radio de convergencia de la serie anterior es $\geq d(a,\gamma^*)$ y los coeficientes de Taylor son

$$\frac{F^{(n)}}{n!}(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}dw.$$

■

Observar que en general no es cierto que toda función continua tenga primitiva (por ejemplo $f(z) = |z|^2$). Este hecho se sigue de que si existe $F = U + iV$ tal que $F' = f$ entonces, debido a las ecuaciones de Cauchy-Riemann, se sigue que f holomorfa.

La existencia de primitiva depende de la integración sobre caminos, como pone de manifiesto el siguiente resultado.

Proposición 5.2.3 *Sea Ω una región y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ continua. Son equivalentes*

(i) Existe $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $F'(z) = f(z)$.

(ii) $\int_\gamma f(z)dz = 0$ para todo camino cerrado $\gamma \subset \Omega$.

(iii) $\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz$ para todo par de caminos $\gamma_1, \gamma_2 \subset \Omega$ con los mismos puntos inicial y final.

Demostración:

$(i) \Longrightarrow (ii)$. $\int_\gamma f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = 0$.

$(ii) \Longrightarrow (iii)$. Poner $\gamma_1 \cup (-\gamma_2) = \gamma$. Es un camino cerrado, por tanto $\int_{\gamma_1} f(z)dz - \int_{\gamma_2} f(z)dz = \int_\gamma f(z)dz = 0$.

$(iii) \Longrightarrow (i)$. Fijamos $z_0 \in \Omega$. Para $z \in \Omega$ definimos $F(z) = \int_{\gamma_z} f(w)dw$ donde γ_z es un camino con $\gamma_z(0) = z_0$ y $\gamma_z(1) = z$ (por ejemplo una poligonal de lados paralelos a los ejes). Veamos que F es derivable en Ω y $F' = f$.

Sea $z' \in \Omega, D(z', \delta) \subset \Omega$. Si $z \in D(z', \delta)$

$$\begin{aligned}
\frac{F(z) - F(z')}{z - z'} - f(z') &= \frac{1}{z - z'}\left(\int_{\gamma_z} f(w)dw - \int_{\gamma_{z'}} f(w)dw\right) - f(z') \\
&= \frac{1}{z - z'}\Big(\int_{\gamma_{z'} \cup [z', z]} f(w)dw - \int_{\gamma_{z'}} f(w)dw - f(z')(z - z')\Big) \\
&= \frac{1}{z - z'}\left(\int_{[z', z]} f(w)dw - \int_{[z', z]} f(z')dw\right) \\
&= \frac{1}{z - z'} \int_{[z', z]} (f(w) - f(z'))dw.
\end{aligned}$$

Usando ahora la continuidad de f se obtiene el resultado.

■

Nota 5.2.1 *El mismo resultado puede enunciarse en abiertos generales, pues los caminos están contenidos en cada componente conexa.*

Definición 5.2.4 *Si γ es un camino cerrado y $z \notin \gamma*$, se dice índice del camino respecto del punto z al valor*

$$Ind_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dw}{w - z}.$$

Proposición 5.2.5 *Si* $\gamma = \partial D(z_0, R)$*, i.e.* $\gamma(t) = z_0 + Re^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$ *y* $|z - z_0| \neq R$ *entonces* $Ind_\gamma(z) = 1$ *si* $|z - z_0| < R$ *y* $Ind_\gamma(z) = 0$ *si* $|z - z_0| > R$*.*

Demostración: Suponer primero que $|z - z_0| > R$. Entonces $f(w) = \frac{1}{w-z} \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{z\})$ y coincide con

$$f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{(z - z_0)^{n+1}}(w - z_0)^n, w \in D(z_0, |z - z_0|).$$

Por tanto tiene primitiva

$$F(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{(n+1)(z - z_0)^{n+1}}(w - z_0)^{n+1}, w \in D(z_0, |z - z_0|).$$

Como $\gamma^* \in D(z_0, |z - z_0|)$ entonces la Proposición 5.2.3 permite concluir que $Ind_\gamma(z) = 0$.

Sea ahora $|z - z_0| < R$. El caso $z = z_0$ es inmediato

$$Ind_\gamma(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dw}{w - z_0} = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{iRe^{it}dt}{Re^{it}} = 1.$$

Observar que para $n \geq 2$ se tiene que

$$\int_\gamma \frac{dw}{(w - z_0)^n} = \int_0^{2\pi} iR^{n+1}e^{-i(n-1)t}dt = 0.$$

Si $|z - z_0| < R$ y $z \neq z_0$ entonces

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dw}{w - z} &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dw}{(w - z_0)(1 - \frac{z - z_0}{w - z_0})} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(w - z_0)^{n+1}}dw \\
&= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}(\int_\gamma \frac{dw}{(w - z_0)^{n+1}})(z - z_0)^n \\
&= Ind_\gamma(z_0) + \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=1}^{\infty}(\int_\gamma \frac{1dw}{(w - z_0)^{n+1}})(z - z_0)^n \\
&= Ind_\gamma(z_0) = 1.
\end{aligned}$$

■

5.3 Problemas propuestos

1.- Calcular $\int_\gamma (x^2 - iy^2)dz$, siendo γ:
a) El arco de parábola $y = 2x^2$ entre los puntos $1+2i$, $2+8i$.
b) $[1+2i, 1+8i] \cup [1+8i, 2+8i]$.
c) $[1+2i, 2+8i]$.

2.- Calcular $\int_\gamma \overline{z}^2 dz$, siendo γ
a) La circunferencia $|z| = 1$.
b) La circunferencia $|z-1| = 1$.

3.- Calcular

$$\int_\gamma \frac{Log^3 z}{z}\, dz,$$

donde γ es el arco de circunferencia

$$\{z \in \mathbf{C}; |z| = 1,\ 0 \leq Argz \leq \frac{\pi}{2}\}.$$

4.- Hallar

$$\int_{|z|=2} z^2 Log\frac{z+1}{z-1} dz.$$

5.- Demostrar que

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos t} sen(sent)dt = 0$$

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos t} \cos(sent)dt = 2\pi.$$

6.- Sea $\gamma(t) = 2|\cos 2t|e^{it},\ 0 \leq t \leq 2\pi$. Calcular

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^2+1}.$$

Capítulo 6

Teorema de Cauchy para circunferencias y aplicaciones

6.1 Teorema de Cauchy en abiertos estrellados

Definición 6.1.1 *Un triángulo Δ es la envoltura convexa de tres puntos distintos z_1, z_2, z_3, llamados vértices, es decir el mínimo convexo que contiene los puntos.*

Es sencillo ver que Δ es un compacto y que $\partial\Delta$ es una poligonal cerrada formada tres segmentos, que denotaremos $[z_1, z_2, z_3] = [z_1, z_2] \cup [z_2, z_3] \cup [z_3, z_1]$.

Teorema 6.1.2 *(Teorema de Cauchy-Goursat) Sea Ω abierto no vacío, $p \in \Omega$, $\Delta \subset \Omega$ un triángulo y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ continua en Ω y holomorfa en $\Omega \setminus \{p\}$. Entonces*

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0.$$

Demostración: Caso $p \notin \Delta$. Sea $I = \int_{\partial\Delta} f(z)dz$.

Tomando los puntos medios de cada lado podemos subdividir el triángulo Δ en cuatro subtriángulos $\Delta_j, j = 1, ..., 4$ de tal modo que $\partial\Delta = \cup_{j=1}^{4} \partial\Delta_j$.

Como $I = \sum_{j=1}^{4} \int_{\partial\Delta_j} f(z)dz$, existirá al menos un subtriángulo de manera que $|\int_{\partial\Delta_j} f(z)dz| \geq \frac{|I|}{4}$. Llamemos Δ^1 a dicho triángulo.

De manera recurrente construimos una sucesión de triángulos Δ^n tales que

$$\Delta^n \subset ... \subset \Delta^1 \subset \Delta,$$
$$long(\partial\Delta^n) = \frac{long(\partial\Delta)}{2^n},$$
$$|\int_{\partial\Delta^n} f(z)dz| \geq \frac{|I|}{4^n}.$$

Por el teorema de encaje de Cantor existirá un único punto $z_0 \in \cap_n \Delta^n$ y por ser $f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)$ una función con primitiva en $\mathbb{C}$ podemos afirmar que

$$\int_{\partial\Delta^n} f(z)dz = \int_{\partial\Delta^n} [f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)]dz.$$

Por otro lado al ser f derivable en z_0 se tiene que si $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|z - z_0| < \delta$ entonces $|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| < \varepsilon|z - z_0|$.

Combinando los hechos anteriores existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\partial\Delta^n \subset D(z_0, \delta), n \geq n_0$$

y

$$|\int_{\partial\Delta^n} f(z)dz| \leq \varepsilon sup_{z\in\partial\Delta^n}|z - z_0|\frac{long(\partial\Delta)}{2^n}.$$

Como se cumple que

$$sup_{z\in\partial\Delta^n}|z - z_0| \leq \frac{long(\partial\Delta)}{2^n}$$

se verifica para $n \geq n_0$

$$\frac{|I|}{4^n} \leq |\int_{\partial\Delta^n} f(z)dz| \leq \varepsilon\frac{long(\partial\Delta)^2}{4^n}.$$

Lo que implica $I = 0$.

Caso $p \in \Delta$. Hay tres posibilidades: que sea un vértice o un punto de uno de los lados o un punto del interior. Descomponiendo el triángulo en subtriángulos y usando el caso anterior, en los dos últimos casos se puede reducir a ser vértice de otro triángulo.

Finalmente supuesto p es un vértice de $\partial\Delta$. Dado $\varepsilon > 0$ suficientemente chico y considerando $D(p, \varepsilon) \cap \partial\Delta = \{z_0, z_1\}$ se construye un trángulo $\Delta_\varepsilon = [p, z_0, z_1]$ de manera que $\partial\Delta = \partial\Delta_\varepsilon \cup \partial\Delta_1 \cup \partial\Delta_2$ y

$$|\int_{\partial\Delta} f(z)dz| = |\int_{\partial\Delta_\varepsilon} f(z)dz| < (\max_{z\in\partial\Delta}|f(z)|)long(\Delta_\varepsilon).$$

Como ε es arbitrario se tiene que $I = 0$. ■

Teorema 6.1.3 *(Teorema de Cauchy para un abierto estrellado) Sea Ω abierto estrellado no vacío, $p \in \Omega$, y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ continua en Ω y holomorfa en $\Omega \backslash \{p\}$. Entonces*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0 \text{ para todo camino cerrado } \gamma \in \Omega.$$

Demostración: Es suficiente ver que f tiene primitiva en Ω. Sea a un centro de Ω. Definimos

$$F(z) = \int_{[a,z]} f(w)dw, \forall z \in \Omega \setminus \{a\} \text{ y } F(a) = 0.$$

Dado $z_0 \in \Omega$, $D(z_0, R) \subset \Omega$ y $z \in D(z_0, R)$.

$$\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - f(z_0) = \frac{1}{z - z_0}\left(\int_{[a,z]} f(w)dw - \int_{[a,z_0]} f(w)dw - (z - z_0)f(z_0)\right).$$

Nótese que el triángulo con vértices $[a, z_0, z]$ está en Ω. Entonces aplicando el Teorema de Cauchy-Goursat se tiene:

$$\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - f(z_0) = \frac{1}{z - z_0}\int_{[z_0,z]} (f(w) - f(z_0))dw.$$

Usando la contínuidad de f se obtiene

$$lim_{z \to z_0}\left|\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - f(z_0)\right| \leq lim_{z \to z_0} max_{w \in [z - z_0]} |f(w) - f(z_0)| = 0.$$

■

6.2 Fórmulas de Cauchy y aplicaciones

Proposición 6.2.1 *(Fórmula integral de Cauchy para abiertos estrellados) Sea Ω un abierto estrellado y $\gamma \subset \Omega$ un camino cerrado. Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ entonces*

$$f(z) Ind_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w - z}dw \qquad (z \in \Omega \setminus \gamma^*).$$

Demostración: Sea $z \in \Omega \setminus \gamma^*$.

$$g(w) = \frac{f(w) - f(z)}{w - z} \ \forall w \in \Omega \setminus \{z\},$$

$$g(z) = f'(z)$$

Es claro que $g \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{z\})$ y $g \in C(\Omega)$. Aplicando, entonces, el teorema de Cauchy se tiene $\int_\gamma g(w)dw = 0$. Es decir

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w) - f(z)}{w - z}dw = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w - z}dw - f(z)Ind_\gamma(z).$$

∎

Corolario 6.2.2 *(Fórmula de Cauchy local) Sea Ω abierto, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $\overline{D(a,R)} \subset \Omega$. Si $\gamma = \partial D(a,R)$ orientada positivamente (es decir $\gamma(t) = a + Re^{it}, t \in [0, 2\pi]$) entonces*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w - z}dw, \qquad z \in D(a,R).$$

Demostración: Es consecuencia inmediata de la fórmula integral de Cauchy. Observar que aunque Ω no sea un abierto estrellado podemos considerar $\Omega_1 = D(a, R_1)$ de manera que $\overline{D(a,R)} \subset \Omega_1 \subset \Omega$ y trabajar en Ω_1.

∎

Corolario 6.2.3 *Sea $f \in \mathcal{H}(D(a,R))$ y $f \in C(\overline{D(a,R)})$. Si $\gamma = \partial D(a,R)$ orientada positivamente entonces*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w - z}dw, \qquad z \in D(a,R).$$

Demostración: Denotemos $R_n = R(1 - \frac{1}{n})$. Fijado $z \in D(a,R)$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $z \in D(a, R_n)$ si $n \geq n_0$.

Es suficiente considerar $\gamma_n : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ dado por

$$\gamma_n(t) = a + R_n e^{it}.$$

Podemos aplicar el Corolario anterior en γ_n y obtendremos

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n} \frac{f(w)}{w - z}dw, \qquad z \in D(a, R_n).$$

Veamos que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw = lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n}\frac{f(w)}{w-z}dw = f(z).$$

Parametrizando hemos de comprobar

$$lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(a+R_ne^{it})iR_ne^{it}}{a+R_ne^{it}-z}dw = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(a+Re^{it})iRe^{it}}{a+Re^{it}-z}dw.$$

Para ello observar que existe n_0 tal que

$$|a+R_ne^{it}-z| \geq R-|z-a|-\frac{R}{n} \geq \frac{R-|z-a|}{2}, \quad n\geq n_0.$$

Entonces si

$$g_n(t) = \frac{f(a+R_ne^{it})iR_ne^{it}}{a+R_ne^{it}-z}$$

se tiene

$$sup_{t\in[0,2\pi)}|g_n(t)| \leq \frac{2R}{R-|z-a|}max_{z\in\overline{D(a,R)}}|f(z)|.$$

Esto permite aplicar el Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue y obtener el resultado. ∎

Corolario 6.2.4 *Sea $f,g\in\mathcal{H}(D(a,R))$ y $f,g\in C(\overline{D(a,R)})$ y $\gamma=\partial D(a,R)$ orientada positivamente.*

Si $f(\xi)=g(\xi)$ $\forall|\xi-a|=R$ entonces $f(z)=g(z)$ $\forall|z-a|<R$.

Teorema 6.2.5 *(Fórmula de Cauchy para derivadas) Sea $f\in\mathcal{H}(\Omega)$ y $\overline{D(a,R)}\subset\Omega$. Si $\gamma=\partial D(a,R)$ orientada positivamente entonces*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}dw, \qquad z\in D(a,R).$$

En particular si $f\in\mathcal{H}(\Omega)$ entonces $f\in C^\infty(\Omega)$.

Demostración: Es consecuencia inmediata de la fórmula de Cauchy junto con el teorema de derivación bajo el signo integral. ∎

Teorema 6.2.6 *(Desigualdades de Cauchy) Sea* $f \in \mathcal{H}(D(a,R))$, $r < R$ *y* $n \in \mathbb{N}$. *Entonces*

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!}{r^n} max_{|z-a|=r}|f(z)|.$$

Demostración: Aplicando la fórmula de Cauchy para $\gamma^* = \{z : |z-a| = r\}$ y para derivadas tenemos

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!}{2\pi} long(\gamma) sup_{w\in\gamma^*} \frac{|f(w)|}{|w-a|^{n+1}} = \frac{n!}{r^n} max_{|z-a|=r}|f(z)|.$$

■

Proposición 6.2.7 *(Analiticidad) Sea* Ω *abierto no vacío y* $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. *Entonces* $f \in \mathcal{A}(\Omega)$.

De hecho, para todo $a \in \Omega$ *existe* (a_n) *tal que* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ *para todo* $z \in D(a, d(a, \mathbb{C} \setminus \Omega))$ *(para todo* z *en caso* $\Omega = \mathbb{C}$*).*

Demostración: Supongamos que $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$. Sea $a \in \Omega$ y tomar $0 < r < R = d(a, \mathbb{C} \setminus \Omega)$ y denotemos $\gamma_r^* = \{z : |z-a| = r\}$. Es claro que $D(a,R) \subset \Omega$, y por tanto, combinando el Teorema de Cauchy y el Teorema 5.2.2 se tiene que $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{w-z} dw = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$, donde la convergencia es en el disco $D(a, R_1)$ para algún $R_1 \geq r$. Como vale para cualquier $r < R$ entonces el radio de convergencia es $\geq d(a, \mathbb{C} \setminus \Omega)$.

En el caso de que $\Omega = \mathbb{C}$ podemos repetir el argumento para $\Omega_R = D(0,R)$ obteniendo validez para $R_1 \geq R - |a|$ para cualquier R. Por tanto radio de convergencia $R_1 = \infty$. ■

Teorema 6.2.8 *(Teorema de Morera) Sea* Ω *abierto,* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *continua tal que* $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$ *para todo triángulo* $\Delta \subset \Omega$. *Entonces* $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Demostración: Podemos suponer que Ω es un disco abierto de centro a (por el caracter local de la derivabilidad).

Definiendo

$$F(z) = \int_{[a,z]} f(w)dw, \forall z \in \Omega \setminus \{a\} \text{ y } F(a) = 0.$$

Dado $z_0 \in \Omega$, $D(z_0, R) \subset \Omega$ y $z \in D(z_0, R)$.

$$\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - f(z_0) = \frac{1}{z - z_0}\left(\int_{[a,z]} f(w)dw - \int_{[a,z_0]} f(w)dw - (z - z_0)f(z_0)\right).$$

Nótese que el triángulo con vértices $[a, z_0, z]$ está en Ω. Entonces la hipótesis permite decir que $\int_{[a,z]} f(w)dw - \int_{[a,z_0]} f(w)dw = \int_{[z_0,z]} f(w)dw$.

$$\frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0} - f(z_0) = \frac{1}{z-z_0}\int_{[z_0,z]} (f(w)-f(z_0))dw.$$

Usando la contínuidad de f se obtiene

$$lim_{z\to z_0}|\frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0} - f(z_0)| \leq lim_{z\to z_0} max_{w\in[z-z_0]}|f(w)-f(z_0)| = 0.$$

Visto que F es derivable en z_0 y $F'(z_0) = f(z_0)$. Esto demuestra que $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ y por tanto podemos usar que $F \in C^\infty(\Omega)$ de lo que se sigue que $F' = f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

■

Corolario 6.2.9 *Sea Ω un abierto, $p \in \Omega$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ continua y $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{p\})$. Entonces $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.*

Demostración: Aplicar Cauchy-Goursat y Morera. ■

Teorema 6.2.10 *(Teorema de Liouville) Si f es una función entera y acotada entonces f es constante.*

Demostración: Usemos que $f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(z,R)} \frac{f(w)}{(w-z)^2}dw$ para todo $R > 0$. Por tanto $|f'(z)| \leq \frac{2\pi RC}{2\pi(R-|z|)^2}$ para todo $R > 0$.

Pasando al límite se tiene $f'(z) = 0$ y por tanto f es constante. ■

Teorema 6.2.11 *(Teorema fundamental del álgebra) Todo polinomio complejo no constante $P(z)$ tiene al menos una raiz compleja.*

Demostración: Suponer que $P(z) = a_k z^k + ... + a_1 z + a_0$ no constante, es decir $k \geq 1, a_k \neq 0$ y que no se anula y considerar $f(z) = \frac{a_0}{P(z)}$.

Como f es entera y $lim_{z\to\infty} f(z) = 0$ entonces es acotada y por el Teorema de Liouville debe ser constante (contradicción) ■

Teorema 6.2.12 *(Principio del módulo máximo) Sea Ω una región y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Si existe un punto $a \in \Omega$ que es máximo local de $|f|$ entonces f es constante.*

Demostración: Supongamos $|f(a)| \geq |f(z)|, \forall z \in D(a,R)$ con $D(a,R) \subset \Omega$.

Como $f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(z,r)} \frac{f(w)}{w-a}dw = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+re^{it})dt$ para todo $r \leq R$ se concluye que $|f(a)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(a+re^{it})|dt$. Por otro lado

$$|f(a+re^{it})| \leq |f(a)|, \forall t \in [0, 2\pi].$$

Por consiguiente

$$|f(a)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(a+re^{it})|dt.$$

Por tanto $\int_0^{2\pi} |f(a)| - |f(a+re^{it})|dt = 0$ y como la función del integrando continua y no negativa implica $|f(a)| = |f(a+re^{it})|$ para todo $t \in [0, 2\pi)$. Por ésto $|f|$ es constante, pero como es holomorfa se tiene f es constante.

■

6.3 Problemas propuestos.

Cuestiones.

C1.- Probar que si $f(z)$ es continua en un entorno del punto a

$$\lim_{r\to 0}\int_{|z-a|=r} \frac{f(z)dz}{z-a} = 2\pi i f(a).$$

C2.- Demostrar que

$$\int_{|z|=r} \frac{P_n(z)dz}{z^{n+1}(z-a)} = 0,$$

si $P_n(z)$ es un polinomio de grado $\leq n$ y $a \in D(0,r)$.

C3.- Sea $f(z) = \dfrac{z}{|1-z|^2}$ y $0 < r < 1$, demostrar que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{it})|dt = \frac{r}{1-r^2}.$$

C4.- Sea $\omega = re^{i\phi} \neq 0$ y γ un camino en $\mathbf{C} - \{0\}$ que une 1 y ω. Demostrar que $\exists\, k \in \mathbf{Z}$ tal que

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = \log r + i\phi + 2k\pi i.$$

C5.- Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ en $D(a,R)$. Demostrar:
a) Identidad de Parseval. Si $0 < r < R$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(a+re^{it})|^2 dt = \sum_0^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}.$$

b) Si $M(r) = \sup\{|f(z)|; |z-a| = r\}$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} \leq M(r)^2.$$

C6.- Sea f es una función entera. Probar que:
a) Si $|f| \geq 1$, f es constante.
b) Si $Ref \leq 0$ o $Imf \leq 0$, f es constante.
c) Si Ref o Imf no tienen ceros, f es constante.

C7.- Sean f una función entera y A una constante tales que $|f(z)| \leq A(1+|z|)^m$. Probar que f es un polinomio de grado $\leq m$.

C8.- Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbf{C})$ tal que existen $A, M > 0$ tales que $|f(z)| \leq Me^{A|z|}$.Probar que

$$|f'(z)| \leq MAe^{A|z|+1}.$$

C9.- Sean Ω abierto estrellado y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $f(z) \neq 0\ \forall\, z \in \Omega$. Probar que $\exists\, g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $e^{g(z)} = f(z)\ \forall\, z \in \Omega$.

C10.- Sean $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y K compacto $\subseteq \Omega$. Probar que

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_o)}{z - z_0} = f'(z_0)$$

uniformemente en K.

C11.- Sea $f : \Omega \to \mathbf{C}$ holomorfa y $a \in \Omega$. Probar que nunca se pueden satisfacer las desigualdades

$$|f^{(n}(a)| > n!n^n\ \forall\, n \in \mathbf{N}.$$

C12.- Si f es analítica en $D(0,R) - \{0\}$, demostrar que el valor de la integral

$$\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})d\theta$$

es el mismo $\forall\, r,\ 0 < r < R$.

Ejercicios.

1.- Hallar según los valores de r

$$\int_{|z|=r} \frac{sen\pi z^2 + \cos \pi z^2}{(z-1)(z-2)} dz.$$

2.- Hallar

$$\int_\gamma \frac{e^{zt}}{z^2+1} dz,$$

siendo $t > 0$ y $\gamma = \{z \in \mathbf{C}; |z| = 3\}$.

3.- Calcular

$$\int_{|z|=2} \frac{\operatorname{sen} z\ sen(z-1)}{z^2-2} dz.$$

4.- Sea γ una circunferencia que rodea a -1. Calcular

$$\int_\gamma \frac{ze^z}{(z+1)^3} dz.$$

5.- Sea $R > 1$ y $f \in \mathcal{H}(\{z \in \mathbf{C}; |z| < R\})$. Hallar

$$\int_{|z|=1} (2 + z + \frac{1}{z}) \frac{f(z)}{z} dz.$$

Deducir de aquí que

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) cos^2 \frac{\theta}{2} d\theta = 2f(0) + f'(0).$$

6.- Dado $n \in \mathbf{N}$, hallar

$$\int_{|z-1|=1} (\frac{z}{z-1})^n dz.$$

Capítulo 7

Teorema homológico de Cauchy.

7.1 Indice de un punto respecto de un camino

Definición 7.1.1 *Dado un camino cerrado γ y $z \notin \gamma^*$ se llama índice del camino respecto del punto z al siguiente valor*

$$Ind_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dw}{w-z}.$$

Nota 7.1.1 *Es inmediato comprobar que*
$Ind_{-\gamma}(z) = -Ind_\gamma(z)$ *y* $Ind_{\gamma_1\cup\gamma_2}(z) = Ind_{\gamma_1}(z) + Ind_{\gamma_2}(z)$

Teorema 7.1.2 *Sea un camino cerrado γ y $z \notin \gamma^*$.*
(i) $Ind_\gamma(z) \in \mathbb{Z}$.
(ii) $Ind_\gamma \in \mathcal{H}(\mathbb{C}\setminus\gamma^*)$.
(iii) Ind_γ *es constante en cada componente conexa de* $\mathbb{C}\setminus\gamma^*$.
(iv) Ind_γ *es cero en la componente conexa no acotada de* $\mathbb{C}\setminus\gamma^*$.

Demostración:
(i) Supongamos $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ con $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < ... < t_n = 1$ y escribimos $\gamma_j : [t_{j-1}, t_j] \to \mathbb{C}$. Así $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup ... \cup \gamma_n$.

Definamos $g_j : [t_{j-1}, t_j] \to \mathbb{C}$ por $g_j(s) = \int_{t_{j-1}}^{s} \frac{\gamma_j'(t)}{\gamma_j(t)-z}dt$.

Por definición $Ind_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{n} g_j(t_j)$.

Para evitar el uso del logarítmo (por las justificaciones que ésto requiere) haremos el siguiente argumento: Como $g_j'(s) = \frac{\gamma_j'(s)}{\gamma_j(s)-z}$ se tiene

$$\frac{d}{ds}\Big(\frac{e^{g_j(s)}}{\gamma_j(s)-z}\Big)=\frac{e^{g_j(s)}g_j'(s)(\gamma_j(s)-z)-\gamma_j'(s)e^{g_j(s)}}{(\gamma_j(s)-z)^2}=0\ \forall s\in(t_{j-1},t_j).$$

Por tanto

$$e^{g_j(s)}=C_j(\gamma_j(s)-z)\forall s\in(t_{j-1},t_j).$$

Usando la continuidad de las funciones γ_j, g_j en los extremos se tiene

$$\frac{e^{g_j(t_j)}}{\gamma_j(t_j)-z}=\frac{e^{g_j(t_{j-1})}}{\gamma_j(t_{j-1})-z}=\frac{1}{\gamma_j(t_{j-1})-z}.$$

De ésto $e^{g_j(t_j)}=\frac{\gamma_j(t_j)-z}{\gamma_j(t_{j-1})-z}$. Lo que permite concluir por ser un camino cerrado que

$$e^{\sum_{j=1}^n g_j(t_j)}=\frac{\gamma_1(t_1)-z}{\gamma_1(t_0)-z}\cdots\frac{\gamma_n(t_n)-z}{\gamma_n(t_{n-1})-z}=\frac{\gamma_n(t_n)-z}{\gamma_1(t_0)-z}=\frac{\gamma(1)-z}{\gamma(0)-z}=1.$$

Ahora se tiene que $2\pi i Ind_\gamma(z)=\sum_{j=1}^n g_j(t_j)=2k\pi i$ para un cierto $k\in\mathbb{Z}$.

(ii) Aplicación directa del teorema de construcción de funciones analíticas para la función $f(z)=1$.

(iii) Se sigue de (i) y (ii).

(iv) $|Ind_\gamma(z)|\leq\frac{1}{2\pi}long(\gamma)sup_{w\in\gamma}\frac{1}{|w-z|}=\frac{1}{2\pi}long(\gamma)\frac{1}{d(z,\gamma^*)}$

Dado $K<\frac{2\pi}{long(\gamma)}$ existe z en la componente conexa no acotada tal que $d(z,\gamma^*)>2K$. Entonces $|Ind_\gamma(z)|<\frac{1}{2}$ y por ser un entero (y el mismo en la componente conexa) es $|Ind_\gamma(w)|=0$ para todo w en la componente conexa no acotada. ∎

Corolario 7.1.3 *Sea $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ un camino, $\gamma^*\subset\Omega$ y $f:\Omega\to\mathbb{C}$ es holomorfa verificando*

i) $f(z)\neq 0\ \ \forall z\in\gamma^*$

ii) $f(\gamma(a))=f(\gamma(b))$.

Entonces

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz\in\mathbb{Z}.$$

Demostración: Considerar el camino cerrado $\sigma(t)=f(\gamma(t))$ y observar que $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz=Ind_\sigma(0)$. ∎

Nota 7.1.2 *APLICACIONES:*

(a) Sea $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ dada por $\gamma(t) = e^{2\pi it}$. Calcular $Ind_\gamma(0)$, $Ind_\gamma(1/3)$ y $Ind_\gamma(-3)$.

(b) Sea $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ dada por $\gamma(t) = e^{-2\pi it}$. Calcular $Ind_\gamma(1/2)$.

(c) Sea $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ dada por $\gamma(t) = e^{4\pi it}$. Calcular $Ind_\gamma(0)$.

(c) Sea $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ la poligonal que forma el triángulo de vértices las raíces cúbicas de la unidad. Calcular $Ind_\gamma(0)$.

Ayuda: (a) (b) y (c) usar la parametrización para el centro y la definición, mientras que en otros puntos reducir al centro usando las componentes conexas.

(d) Se considera una circunferencia orientada positivamente y la curva $\gamma \cup \partial D$ se descompone en cuatro curvas cerradas distintas donde el punto $z = 0$ está en las componentes conexas no acotadas. Usando las propiedades del índice se obtiene de manera más rápida que con la parametrización y el uso de logarítmos. ■

Proposición 7.1.4 *(Interpretación geométrica del índice)*

(i) Sea un camino $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ y $z \notin \gamma^*$. Existe una función $\phi : [a,b] \to \mathbb{C}$ continua y derivable en los mismos puntos que γ tal que $e^{\phi(t)} = \gamma(t) - z$ para $t \in [a,b]$ (es decir ϕ es un logarítmo continuo de $w - z$ a lo largo de γ).

(ii) Si $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ es un camino cerrado y $a \notin \gamma^*$, llamando $A(t) = Im(\phi(t))$ (es decir, al argumento contínuo de $w - z$ a lo largo de γ que existe por (i)), se tiene

$$Ind_\gamma(z) = \frac{A(b) - A(a)}{2\pi}.$$

Demostración:

(i) Supongamos $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ con $t_0 = a < t_1 < t_2 < ... < t_n = b$ y escribimos $\gamma_j = \gamma : [t_{j-1}, t_j] \to \mathbb{C}$. Así $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup ... \cup \gamma_n$.

Definamos como anteriormente $g_j : [t_{j-1}, t_j] \to \mathbb{C}$ por $g_j(s) = \int_{t_{j-1}}^{s} \frac{\gamma_j'(t)}{\gamma_j(t)-z} dt$.

El razonamiento de la parte (i) del teorema sobre el índice permite decir

$$e^{g_j(s)} = C_j(\gamma_j(s) - z) \forall s \in (t_{j-1}, t_j).$$

Usando la continuidad de las funciones γ_j, g_j en los extremos se tiene

$$\frac{e^{g_j(t_j)}}{\gamma_j(t_j) - z} = \frac{1}{\gamma(t_{j-1}) - z} = C_j.$$

Es decir
$$\gamma(t)-z=(\gamma(t_{j-1})-z)e^{g_j(t)}, \forall t_{j-1}\leq t\leq t_j.$$
Sea $a\in\mathbb{R}$ tal que $\gamma(t_j)-z\notin H_a$ para todo $j=1,2,...,n$.
Con ésto

$$\gamma(t)-z=e^{Log_{[a,a+2\pi)}(\gamma(t_{j-1})-z)+g_j(t)}, \forall t_{j-1}\leq t\leq t_j.$$

Entonces, la continuidad de γ implica
$$e^{Log_{[a,a+2\pi)}(\gamma(t_{j-1})-z)+g_j(t_j)}=e^{Log_{[a,a+2\pi)}(\gamma(t_j)-z)+g_{j+1}(t_j)},$$
y por tanto existe $K_j\in\mathbb{Z}$ ($K_0=0$) tal que
$$Log_{[a,a+2\pi)}(\gamma(t_{j-1})-z)+g_j(t_j)=Log_{[a,a+2\pi)}(\gamma(t_j)-z)+g_{j+1}(t_j)+2K_j\pi i.$$
Definimos $\phi(t)=\sum_{j=1}^n\phi_j(t)$ donde
$$\phi_j(t)=g_j(t)+Log_{[a,a+2\pi)}(\gamma(t_{j-1})-z)+2m_{j-1}\pi i)\chi_{[t_{j-1},t_j]},$$
donde $m_j=\sum_{l=0}^j K_l$.

Es inmediato comprobar que ϕ (usando que $\lim_{t\to t_j^-}\phi(t)=\lim_{t\to t_j^+}\phi(t)$) es continua y $e^{\phi(t)}=\gamma(t)-z, \quad \forall t\in[a,b]$.

(ii) Sea $A(t)=Im(\phi(t))$. Es claro que es un argumento de $w-z$ sobre γ^*.

Además como $\phi_j(t)=g_j(t)+C'_j$ y el camino es cerrado, usando que $g_j(t_{j-1})=0$ y que $\phi_{j-1}(t_{j-1})=\phi_j(t_{j-1})$,

$$\begin{aligned}2\pi i Ind_\gamma(z) &= \int_a^b\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}dt=\sum_{j=1}^n g_j(t_j)\\ &= \sum_{j=1}^n(g_j(t_j)-g_j(t_{j-1}))=\sum_{j=1}^n(\phi_j(t_j)-\phi_j(t_{j-1}))\\ &= \sum_{j=1}^n(\phi_j(t_j)-\phi_{j-1}(t_{j-1}))=\phi(b)-\phi(a)=(A(b)-A(a))i.\end{aligned}$$

■

Nota 7.1.3 *Así pues el índice corresponde a la variación de cualquier argumento continuo sobre la curva y geométricamente es el número de vueltas que da la curva alrededor del punto z.*

7.2 El teorema homológico de Cauchy

Definición 7.2.1 *Un ciclo es una unión finita de caminos cerrados* $\gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n\}$ *donde* $\gamma_i(a_i) = \gamma_i(b_i)$ *siendo* $\gamma_i : [a_i, b_i] \to \mathbb{C}$ *un camino para* $i = 1, ..., n$.

Denotamos $\gamma^* = \cup_{i=1}^n \gamma_i^*$.

Dos ciclos son iguales si tienen los mismos caminos y repetidos el mismo número de veces.

Dados $\gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n\}$ *un ciclo y* $f : \gamma^* \to \mathbb{C}$ *una función continua. Se define*

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} f(z)dz.$$

Si $z \notin \gamma^*$ *se define*

$$Ind_\gamma(z) = \sum_{i=1}^n Ind_{\gamma_i}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dw}{w-z}.$$

Nota 7.2.1 *Las mismas propiedades del índice sobre caminos se tienen para ciclos generales.*

Definición 7.2.2 *Sea* Ω *un abierto no vacío, y* γ *un ciclo con* $\gamma^* \subset \Omega$. *Se dice que es homólogo a cero respecto del abierto* Ω *y se denota* $\gamma \sim 0(resp.\Omega)$ *si* $Ind_\gamma(z) = 0$ *para todo* $z \notin \Omega$.

Dos ciclos γ, α *se dicen homólogos respecto del abierto* Ω *y se denota* $\gamma \sim \alpha(resp.\Omega)$ *si* $Ind_\gamma(z) = Ind_\alpha(z)$ *para todo* $z \notin \Omega$. *Es decir* $\gamma \cup (-\alpha) \sim 0(resp.\Omega)$.

Nota 7.2.2 *(Ejemplo 1).- Sea* $\Omega = D = \{z : |z| < 1\}$.

a) $\gamma = \{z = 1/2e^{it} : t \in [0, 2\pi)\}$. *Entonces* $\gamma \sim 0(resp.\Omega)$.

b) $\gamma = \{z = 1/4 + 1/4e^{it} : t \in [0, 2\pi)\} \cup \{z = -1/4 + 1/4e^{it} : t \in [0, 2\pi)\}$. *Entonces* $\gamma \sim 0(resp.\Omega)$.

c) $\gamma = \{z = 1/2e^{it} : t \in [0, 2\pi)\} \cup \{z = 1/4e^{-it} : t \in [0, 2\pi)\}$. *Entonces* $\gamma \sim 0(resp.\Omega)$.

(Ejemplo 2).- Sea $\Omega = D(0; 1/4, 1) = \{z : 1/4 < |z| < 1\}$.

a) $\gamma = \{z = 1/2e^{it} : t \in [0, 2\pi)\}$. *Entonces* $\gamma \nsim 0(resp.\Omega)$.

b) $\gamma = \{z = 1/2 + 1/10e^{it} : t \in [0, 2\pi)\}$. *Entonces* $\gamma \sim 0(resp.\Omega)$.

c) $\gamma = \{z = 1/2e^{it} : t \in [0, 2\pi)\} \cup \{z = 1/3e^{-it} : t \in [0, 2\pi)\}$. *Entonces* $\gamma \sim 0(resp.\Omega)$.

d) $\gamma = \{z = 1/2e^{it} : t \in [0, 2\pi)\} \cup \{z = 1/3e^{it} : t \in [0, 2\pi)\}$. *Entonces* $\gamma \nsim 0(resp.\Omega)$.

Teorema 7.2.3 *(Teorema Homológico de Cauchy. Prueba de Dixon) Sea* Ω *un abierto no vacío,* γ *un ciclo con* $\gamma^* \subset \Omega$ *,* $\gamma \sim 0(resp.\Omega)$ *y* $f \in \mathcal{H}(\Omega)$*. Entonces*

$$(i) \qquad f(z)Ind_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw.$$

$$(ii) \qquad \int_\gamma f(w)dw = 0.$$

Demostración:

Sea $E = \{w \in \mathbb{C} \setminus \gamma^* : Ind_\gamma(w) = 0\}$. Al ser $\gamma \sim 0$(resp.Ω) se tiene $\mathbb{C} \setminus \Omega \subset E$. Además E es un abierto (pues es unión de componentes conexas) y se tiene $\mathbb{C} = \Omega \cup E$. Nótese también que la componente conexa no acotada está contenida en E.

Definimos $g : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ dada por

$$g(w, z) = \frac{1}{2\pi i}\frac{f(w) - f(z)}{w - z} \qquad (w \neq z),$$

$$g(z, z) = \frac{1}{2\pi i}f'(z).$$

Denotemos $g^w(z) = g(w, z)$. Es inmediato ver que $g^w \in C(\Omega)$ y $g^w \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{w\})$. Usando los teoremas de Morera y Cauchy-Goursat se concluye que $g^w \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Es fácil ver que $g \in C(\Omega \times \Omega)$. En efecto: Sea $(w_0, z_0) \in \Omega \times \Omega$.

Si $z_0 \neq w_0$ usando que $\{(w, z) : w \neq z\}$ es abierto en $\Omega \times \Omega$ existe $R > 0$ tal que $\{(w, z) : |w - w_0| < R, |z - z_0| < R\} \subset \{(w, z) : w \neq z\}$ es entorno de (w_0, z_0).

La continuidad de f en z_0 y w_0 implica la de g en (w_0, z_0) en este caso.

Si $z_0 = w_0$. Escribimos

$$|g(w, z) - g(z_0, z_0)| \leq \frac{1}{2\pi}max\{|\frac{f(w) - f(z)}{w - z} - f'(z_0)|, |f'(z) - f'(z_0)|\}.$$

Como $\frac{f(w)-f(z)}{w-z} - f'(z_0) = \frac{1}{w-z}\int_{[z,w]}(f'(\xi) - f'(z_0))d\xi$ entonces

$$|g(w,z) - g(z_0,z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} sup_{\xi\in[w,z]}\{|f'(\xi) - f'(z_0)|\}.$$

Por tanto la continuidad de g en (w_0, z_0) se sigue de la continuidad de f'.

Definimos

$$h(z) = \int_\gamma g(w,z)dw \qquad (z \in \Omega),$$

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw \qquad (z \in E).$$

Veremos que h es entera y $lim_{z\to\infty} h(z) = 0$. Supuesto probadas ambas afirmaciones, veamos como se concluye la demostración.

Entonces usando el teorema de Liouville $h(z) = 0 \forall z \in \mathbb{C}$.

Consecuentemente $\int_\gamma g(w,z)dw = 0 \forall z \in \Omega$ de donde se deduce (i).

Por otro lado fijado $u \in \Omega \setminus \gamma^*$ consideramos $f_u(z) = f(z)(z-u)$. Claramente $f_u \in \mathcal{H}(\Omega)$ y aplicando (i) a esta función se tiene

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(w)dw = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f_u(w)}{w-u}dw = Ind_\gamma(u) f_u(u) = 0.$$

Demostremos ahora que h es entera. En primer lugar hay que probar que está bien definida. Sea $z \in \Omega \cap E$, entonces $z \notin \gamma^*$ y por tanto

$$\int_\gamma g(w,z)dw = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw - f(z) Ind_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw.$$

El hecho de que $h \in \mathcal{H}(E)$ es consecuencia del teorema de construcción de funciones analíticas.

Veamos que $h \in \mathcal{H}(\Omega)$. Es continua en Ω usando que $g \in C(\gamma^* \times \Omega)$. Para probar que es derivable puede demostrarse que $(w,z) \to \frac{\partial g}{\partial z}(w,z)$ es continua en $\gamma^* \times \Omega$ o bien usar el Teorema de Morera. Usaremos el segundo método: Sea Δ un triángulo contenido en Ω. Usando Fubini (por ser la integral de función continua en dos variables sobre un producto de compactos) y $g^w \in \mathcal{H}(\Omega)$ se tiene

$$\int_{\partial\Delta} h(z)dz = \int_{\partial\Delta}\int_\gamma g(w,z)dwdz = \int_\gamma\int_{\partial\Delta} g(w,z)dzdw = \int_\gamma (\int_{\partial\Delta} g^w(z)dz)dw = 0.$$

Finalmente veamos que $lim_{z\to\infty}h(z) = 0$.

Como la componente no acotada de $\mathbb{C}\setminus\gamma^*$ está contenida en E entonces existe $R > 0$ con $\gamma^* \subset D(0,R), \mathbb{C}\setminus D(0,R) \subset E$. Así podemos decir

$$lim_{z\to\infty}h(z) = lim_{z\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw.$$

Entonces

$$|lim_{z\to\infty}h(z)| \leq lim_{z\to\infty}\frac{max_{w\in\gamma^*}|f(w)|long(\gamma)}{2\pi(|z|-R)} = 0$$

donde $long(\gamma) = \sum_{j=1}^{n} long(\gamma_j)$. ■

Corolario 7.2.4 *Sea Ω un abierto no vacío, γ un ciclo con $\gamma^* \subset \Omega$, $\gamma \sim 0(resp.\Omega)$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y. Entonces*

$$Ind_\gamma(z)f^{(n}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}dw.$$

Demostración:

Sea $z \in \Omega\setminus\gamma^*$. Tomar $R > 0, D(z,R) \subset \Omega\setminus\gamma^*$. Como $Ind_\gamma(w) = Ind_\gamma(z) \forall w \in D(z,R)$ entonces

$$Ind_\gamma(z)f(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - w}d\xi \qquad w \in D(z,R).$$

Aplicando la derivación bajo el signo integral se tiene el resultado. ■

Corolario 7.2.5 *Sea Ω un abierto no vacío, γ_1, γ_2 ciclos con $\gamma_1^*, \gamma_2^* \subset \Omega$. Entonces*

$\gamma_1 \sim \gamma_2(resp.\Omega)$ si y sólo si

$$\int_{\gamma_1} f(w)dw = \int_{\gamma_2} f(w)dw, \forall f \in \mathcal{H}(\Omega).$$

Demostración: El directo es inmediato del teorema. Para el recíproco tomar $z \notin \Omega$ y considerar $f_z(w) = \frac{1}{w-z}$ ■

7.3 Conjuntos simplemente conexos.

El teorema de Cauchy en sus dos versiones puede leerse de distintas maneras:

1.- Dado Ω abierto "razonable" y $f \in C(\Omega)$.

$$\int_\gamma f(z)dz = 0 \ \forall\gamma \text{camino cerrado} \Longleftrightarrow f \in \mathcal{H}(\Omega).$$

2.- Dados Ω abierto y $\gamma \subset \Omega$ ciclo.

$$\int_\gamma f(z)dz = 0 \ \forall f \in \mathcal{H}(\Omega) \Longleftrightarrow \gamma \sim 0(\text{resp.}\Omega).$$

Una tercera posibilidad en la que nos concentraremos es:

3.- Caracterizar Ω para que

$$\int_\gamma f(z)dz = 0 \ \forall f \in \mathcal{H}(\Omega), \forall\gamma \text{ciclo} \subset \Omega.$$

Teorema 7.3.1 *Sea Ω un abierto no vacío. Son equivalentes:*

(i) $\int_\gamma f(z)dz = 0 \ \forall f \in \mathcal{H}(\Omega), \forall\gamma$ ciclo $\subset \Omega$.

(ii) Todo ciclo $\gamma \subset \Omega$ es homólogo a cero respecto de Ω.

(iii) Toda $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tiene primitiva en Ω.

(iv) Toda $u \in \mathcal{H}ar(\Omega)$ tiene armónica conjugada en Ω.

(v)Toda $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ que no se anula tiene logarítmo holomorfo en Ω.

(vi) Toda $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ que no se anula tiene raiz cuadrada holomorfa en Ω.

Demostración:

$(i) \Longrightarrow (ii)$ Sea γ un ciclo en Ω, $a \notin \Omega$ y $f(z) = \frac{1}{z-a}$. Entonces $Ind_\gamma(a) = 0$.

$(ii) \Longrightarrow (i)$ Teorema homológico de Cauchy.

$(i) \Longrightarrow (iii)$ Visto con anterioridad.

$(iii) \Longrightarrow (iv)$. Sea $u \in \mathcal{H}ar(\Omega)$. Se probó con anterioridad que la existencia de armónica conjugada en cada componente conexa equivale a la existencia de primitiva de $u_x - iu_y$. Como la función $h = u_x - iu_y \in \mathcal{H}(\Omega)$ ya que cumple las condiciones de Cauchy-Riemman se obtiene (iv).

$(iv) \Longrightarrow (v)$. Sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ que no se anula. Entonces $U(z) = \log|f(z)|$ es armónica en Ω. Entonces existe $V(z) \in \mathcal{H}ar(\Omega)$ tal que $g(z) = \log|f(z)| + iV(z) \in \mathcal{H}(\Omega)$. Como $|e^{g(z)}| = e^{\log|f(z)|} = |f(z)|$ se concluye que $h(z) = e^{-g(z)}f(z) \in \mathcal{H}(\Omega)$ y cumple que $|h(z)| = 1$ para $z \in \Omega$. Luego $h(z)$ es constante en cada componente conexa de Ω. Sea E una componente conexa. Entonces existe $A \in \mathbb{R}$ tal que $h(z) = e^{iA}$ para todo z de la componente conexa. Se deduce que $f(z) = e^{g(z)+iA}$ y se obtiene un logaritmo holomorfo en la componente E.

$(v) \Longrightarrow (vi)$ Sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ que no se anula y $g_1 \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $e^{g_1} = f$. Considerar $g = e^{1/2g_1} \in \mathcal{H}(\Omega)$ y claramente $g^2 = f$.

$(vi) \Longrightarrow (i)$ Sea un ciclo γ en Ω y $a \notin \Omega$. Como $f(z) = z - a \in \mathcal{H}(\Omega)$ y no se anula en Ω existe $f_1 \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $f_1^2(z) = f(z) \forall z \in \Omega$.

Al ser $f_1(z) \neq 0$ en Ω repetimos el proceso y hallamos $f_2 \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $f_2^2 = f_1$ y por tanto $f_2^4 = f$.

Inductivamente tenemos $f_n \in \mathcal{H}(\Omega)$ que no se anula y con $f_n^{2^n} = f$.

Derivando se obtiene $\frac{f'}{f} = 2^n \frac{f_n'}{f_n}$. Entonces

$$\frac{1}{2^n 2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z-a} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f_n'(z)}{f_n(z)} dz.$$

Como $\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z-a}, \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f_n'(z)}{f_n(z)} dz \in \mathbb{Z}$ y $\frac{1}{2^n 2\pi} | \int_\gamma \frac{dz}{z-a}| < 1$ para n grande entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z-a} = 0.$$

■

Definición 7.3.2 *Un abierto Ω verificando cualquiera de dichas propiedades se dice simplemente conexo*

La razón para dicha denominación está en el siguiente resultado para el que se necesita un lema previo interesante en sí mismo.

Lema 7.3.3 *(Ciclo que rodea a un compacto) Sea Ω un abierto no vacío y $K \subset \Omega$ un compacto no vacío.*

Existe un ciclo $\gamma \subset \Omega \setminus K$ (unión de poligonales orientadas) de manera que

$$\gamma \sim 0 (resp.\ \Omega), Ind_\gamma(z) = 1 \forall z \in K.$$

Demostración: Si $\Omega = \mathbb{C}$ tomar $\gamma = \partial D(0, R)$ con $K \subset D(0, R)$.

Caso de $\Omega \neq \mathbb{C}$ sea $\delta = d(K, \partial\Omega)$. Ahora construimos una red de cuadrados con lados de longitud $\delta\sqrt{2}$ y paralelos a los ejes.

Llamemos $\mathcal{Q}$ la familia de dichos cuadrados que cortan al compacto K. Habrá sólo un número finito de ellos.

Ponemos $\mathcal{M} = \{\partial Q : Q \in \mathcal{Q}\}$, (supuestos recorridos positivamente).

Finalmente denotemos por Λ el conjunto de los caminos que son lados de uno solo de los cuadrados de $\mathcal{Q}$. Se comprueba que Λ es el ciclo que buscamos. Los detalles de comprobación se dejan al lector (puede verse en el libro de W. Rudin, Análisis Real y Complejo, pp 250-251.) ∎

Teorema 7.3.4 *Sea Ω un abierto no vacío.*

Ω es simplemente conexo si y sólo si $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ es conexo.

Demostración:

$\Longleftarrow$) Sea γ un ciclo en Ω. Si $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ es conexo entonces $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ está en la componente conexa no acotada de $\mathbb{C}_\infty \setminus \gamma^*$. De donde se deduce que $\gamma \sim 0$(resp. Ω).

$\Longrightarrow$) Usando el lema previo y suponiendo que no es conexo existirán A, B cerrados y abiertos en $\mathbb{C}_\infty$ no vacíos, disjuntos tales que $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega = A \cup B$.

Supongamos $\infty \in B$ entonces existe un compacto K_1 tal que $B \subset \mathbb{C}_\infty \setminus K_1$. Por tanto A es cerrado y acotado en $\mathbb{C}$ y $\Omega_1 = \mathbb{C}_\infty \setminus B$ es abierto. Luego existe $\gamma \in \Omega_1 \setminus A \subset \Omega$ con $Ind_\gamma(z) = 1$ para $z \in A \subset \mathbb{C} \setminus \Omega$ y así γ no es homólogo a cero respecto de Ω.

∎

7.4 Problemas propuestos

1.- Hallar

$$\int_\gamma \frac{e^{3z}}{z - \pi i} dz,$$

siendo γ la elipse $\{z \in \mathbf{C}; |z-2| + |z+2| = 6\}$.

2.- Sea $a \in \mathbf{C}$, $|a| > 1$, $r > |a|$, $\Omega = \{z \in \mathbf{C}; |z| > \frac{1}{2}\}$, $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ acotada en Ω, $f(z) = \dfrac{ag(z)}{az - z^2}$ $\forall\, z \in \Omega - \{a\}$, y γ el ciclo $\{|z| = 1\} \cup [-\{|z| = r\}]$.

i) Calcular $\int_\gamma f$.

ii)Hallar $\lim\limits_{r \to \infty} \displaystyle\int_{|z|=r} f(z)dz$. Deducir de aquí el valor de $\displaystyle\int_{|z|=1} f(z)dz$.

3.- Calcular

$$\int_{|z|=1} \frac{(z+1)\, e^{\frac{1}{z}}}{z^2} dz.$$

4.- Sean $a, b \in \mathbf{C},\ a \neq b,\ |a| = |b| = 2$. Sean $f \in \mathcal{H}(\{z \in \mathbf{C}; |z| > 1\})$ y $P(z) = (z-a)(z-b)$. Consideremos la función

$$\phi(R) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{f(z)}{P(z)} dz,\ \ R \in (1, \infty) - \{2\}.$$

i) Probar que $\phi(R)$ es constante A si $R > 2$.
ii) Probar que si $1 < R < 2$

$$\phi(R) = A + \frac{f(a) - f(b)}{a-b}.$$

5.- Decir si son simplemente conexos o no los siguientes conjuntos:
a) una región convexa
b) $\mathbf{C} - \{a\}$, $a \in \mathbf{C}$
c) $D(0; 1, 2) - \{(1, 2)\}$
d) $\mathbf{C} - \{re^{ir}; 0 \leq r < \infty\}$
e) $\mathbf{C} - \{\ i\mathbf{R}^+ \cup \{\frac{1}{n} + iy; y \geq 0,\ n \in \mathbf{N}\}\ \}$.

6.- Sea Ω una región no vacía y $p > 2, p \in \mathbb{N}$ ¿ Es cierto que Ω es simplemente conexo $\Longleftrightarrow \forall f \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $f(z) \neq 0\ \forall z \in \Omega,\ \exists g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $g^p(z) = f(z)\ \forall z \in \Omega$. ?

Capítulo 8

Singularidades y desarrollos de Laurent

8.1 Ceros y singularidades.

En este capítulo Ω denota una región. Recordemos que si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, el conjunto de sus ceros en Ω se denota por

$$\mathcal{Z}_f(\Omega) = \{z \in \Omega : f(z) = 0\}.$$

Recordemos que usando el desarrollo en serie de potencias entorno a los puntos de Ω de las funciones holomorfas se prueba que son equivalentes
(i) Existe $a \in \Omega$ tal que $f^{(n)}(a) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$.
(ii) $(\mathcal{Z}_f(\Omega))' \cap \Omega \neq \varnothing$.
(iii) $f(z) = 0 \ \forall z \in \Omega$.

Definición 8.1.1 *Dado $a \in \mathcal{Z}_f(\Omega)$ se dice que tiene multiplicidad k si*

$$k = m(f, a) = min\{n : f^{(n)}(a) \neq 0\}.$$

Proposición 8.1.2 *Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ no es identicamente nula entonces el conjunto $\mathcal{Z}_f(\Omega)$ es un cerrado contable sin puntos de acumulación en Ω.*

Demostración: Es claro que es cerrado (antimagen de cerrado por una función continua). Al no acumularse en Ω se tiene que en cada compacto de Ω puede solamente haber un número finito de ceros. Y entonces en Ω a lo mas será numerable. ∎

Ejemplo 8.1.1 *(1) Si* $f(z) = sen\frac{1}{z}$

$$\mathcal{Z}_f(\mathbb{C} \setminus \{0\}) = \{1/2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$$

(2) Si $f(z) = sen(z)$

$$\mathcal{Z}_f(\mathbb{C}) = \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$$

(3) Si $f(z) = e^z$ *se cumple que* $\mathcal{Z}_f(\mathbb{C}) = \varnothing$.
(4) Si $f(z) = P(z)$ *es un polinomio de grado* n.

$$\mathcal{Z}_f(\mathbb{C}) = \{z_i\}_{1 \leq i \leq j}$$

con $j \leq n$, $m(f, z_i) = m_i$ *y* $m_1 + ... + m_j = n$.

Proposición 8.1.3 *Dada* $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ *no nula. Son equivalentes*
(i) $a \in \mathcal{Z}_f(\Omega)$ *y* $m(f, a) = k$.
(ii) $f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n(z-a)^n$ *en un entorno de* a *y* $a_k \neq 0$.
(iii) Existe g *holomorfa en un entorno de* a *con* $f(z) = (z-a)^k g(z)$ *donde* $g(a) \neq 0$.

Demostración: $(i) \Longrightarrow (ii)$ Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ en cierto entorno de a. Como sabemos que $a_j = \frac{f^{(j)}(a)}{j!}$ se tiene que $a_j = 0$ para $1 \leq j \leq k-1$ y $a_k \neq 0$.

$(ii) \Longrightarrow (iii)$ Tomar $g(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{k+m}(z-a)^m$.

$(iii) \Longrightarrow (ii)$ Si $g(z) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m(z-a)^m$ en un entorno de a donde $b_0 = g(a) \neq 0$ se obtiene (ii) con $a_n = b_{n-k}$.

$(ii) \Longrightarrow (i)$ Inmediato de la unicidad de los coeficientes de Taylor que implica que $f^{(j)}(a) = 0$ para $0 \leq j \leq k-1$ y $f^{(k)}(a) \neq 0$. ■

Definición 8.1.4 *Sea* $f : dom(f) \to \mathbb{C}$. *Un número complejo* $a \in \mathbb{C}$ *se dice que es una singularidad aislada de* f *si existe* $R > 0$ *tal que* $f \in \mathcal{H}(D(a, R) \setminus \{a\})$ *y* f *no es contínua en* $z = a$.

Definición 8.1.5 *Sea* $f : dom(f) \to \mathbb{C}$ *y* $a \in \mathbb{C}$ *una singularidad aislada de* f. *Se dice*
(i) evitable si existe $lim_{z \to a} f(z)$.
(ii) esencial si no existe $lim_{z \to a} f(z)$.
(iii) polo si $lim_{z \to a} f(z) = \infty$.

Ejemplo 8.1.2 *Analizamos el caso $z = 0$:*

(i) $f(z) = 1/sen(1/z)$. No es una singularidad aislada.

(ii) $f(z) = \frac{sen(z)}{z}$. Es una singularidad aislada pero existe $lim_{z\to 0} f(z) = 1$. Es por tanto "singularidad evitable".

(iii) $f(z) = \frac{1}{z}$. Es una singularidad aislada tal que $lim_{z\to 0} f(z) = \infty$ y $lim_{z\to 0} z f(z) = 1$. Es un "polo".

(iv) $f(z) = \frac{1}{z^2}$. Es una singularidad aislada tal que $lim_{z\to 0} f(z) = \infty$ y $lim_{z\to 0} z f(z) = \infty$. Es un "polo".

(v) $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$. Es una singularidad aislada pero no existe $lim_{z\to 0} f(z)$. Es una "singularidad esencial"

Proposición 8.1.6 *Sea $f : D(a, R) \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ holomorfa.*

(i) a es una singularidad evitable $\iff$ existe una extensión de f, $f^* \in \mathcal{H}(D(a, R))$.

(ii) a es un polo de $f \iff$ existe $R_1 < R$ tal que $\mathcal{Z}_{1/f}(D(a, R_1)\setminus\{a\}) = \varnothing$ y $lim_{z\to a} 1/f(z) = 0$.

Demostración: (i) se sigue del Teorema de Morera.

(ii) Supongamos que $a \in \mathcal{P}_f(\Omega)$. Entonces $|f(z)| > 1$ si $0 < |z - a| < R'$ para cierto $R' < R$. Por tanto que $f(z) \neq 0$ para $0 < |z - a| < R'$. Usando que $1/f \in \mathcal{H}(D(a, R')\setminus\{a\})$ y que $\lim_{z\to a} 1/f(z) = 0$ se concluye el resultado. El recíproco es inmediato. ■

Definición 8.1.7 *Dado Ω una región cualquiera y $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Se dice meromorfa en Ω si todas sus singularidades en Ω son polos y evitables. Se denotará $\mathcal{P}_f(\Omega)$ el conjunto de polos de f en Ω y $\mathcal{M}(\Omega)$ el conjunto de todas las funciones meromorfas en Ω.*

Nota 8.1.1 *Los polinomios son holomorfas, y los cocientes de polinomios son meromorfas en $\mathbb{C}$.*

Proposición 8.1.8 *Si $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ entonces el conjunto $\mathcal{P}_f(\Omega)$ es un cerrado contable sin puntos de acumulación en Ω.*

Demostración: Basta usar que los polos de f corresponden con los ceros de la extensión holomorfa $1/f$ junto con la Proposición 8.1.3. ■

Definición 8.1.9 *Sea $f \in \mathcal{M}(\Omega)$, $a \in \mathcal{P}_f(\Omega)$ se dice que es un polo de orden k de f, denotado $o(f, a) = k$, si $z = a$ es un cero de multiplicidad k de la función extendida $\frac{1}{f}$.*

Proposición 8.1.10 *Sea $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ y $a \in \mathcal{P}_f(\Omega)$. Son equivalentes*

(i) $o(f,a) = k$.

(ii) Existe $R > 0$ y g holomorfa en el disco $D(a,R)$ con $g(a) \neq 0$ y $f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^k} \quad \forall z \in D(a,R) \setminus \{a\}$.

(iii) $\lim_{z\to a}(z-a)^n f(z) = \infty$ *si* $0 \leq n < k$ *y* $\lim_{z\to a}(z-a)^k f(z) = \lambda$ *con* $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$.

Demostración: $(i) \implies (ii)$ Es suficiente observar que para cierto $R_1 > 0$ y $a_k \neq 0$

$$\frac{1}{f(z)} = \sum_{n=k}^{\infty} a_n(z-a)^n = (z-a)^k h(z), \qquad \forall z \in D(a,R_1) \setminus \{a\},$$

con $h(a) \neq 0$ y h holomorfa en $D(a,R_1)$. Sea $0 < R < R_1$ tal que $h(z) \neq 0$ para $z \in D(a,R)$. Definir $g(z) = 1/h(z)$ y se obtiene $f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^k} \quad \forall z \in D(a,R) \setminus \{a\}$.

$(ii) \implies (iii)$ Es inmediato al tomar límites.

$(iii) \implies (ii)$. Definir $g(z) = (z-a)^k f(z)$ si $z \in D(a,R) \setminus \{a\}$ para R tal que $f \in \mathcal{H}(D(a,R) \setminus \{a\})$.Usar el teorema de Morera para ver que tiene extensión holomorfa a $D(a,R)$.

$(ii) \implies (i)$ Usar la caracterización de la multiplicidad de los ceros de la función $1/f$. ■

Ejemplo 8.1.3 *(i)* $f(z) = \frac{e^z-1}{z^3}$. $z = 0$ *es un polo de orden 2.*

(ii) $f(z) = \frac{1}{sen\ z}$. $z = 0$ *es un polo de orden 1.*

Teorema 8.1.11 *(Cassorati-Weierstrass) Sea $f : dom(f) \to \mathbb{C}$ y $a \in \mathbb{C}$ una singularidad aislada de f. Entonces a es una singularidad esencial de f si y sólo si la imagen por f de cualquier entorno reducido U de a es densa en $\mathbb{C}$.*

Demostración: Supongamos que $f \in \mathcal{H}(D(a,R) \setminus \{a\})$ y U es un entorno reducido de a de manera que $\overline{f(U)} \neq \mathbb{C}$.

Sea $\lambda \notin \overline{f(U)}$. Es claro que si $z \in U$ entonces $|f(z) - \lambda| \geq d(\lambda, \overline{f(U)}) > 0$. Por tanto

$$lim_{z\to a}\frac{f(z)-\lambda}{z-a} = \infty.$$

Si llamamos $g(z) = \frac{f(z)-\lambda}{z-a}$ y ponemos $k = o(g,a)$ existirá una función g_1 holomorfa en un entorno de a con $g_1(a) \neq 0$ de modo que $g(z) = \frac{g_1(z)}{(z-a)^k}$.

De ésto se deduce que $f(z) = \frac{g_1(z)}{(z-a)^{k-1}} + \lambda$. Consecuentemente a es evitable (si $k = 1$) o polo (si $k > 1$).

Reciprocamente si existe $lim_{z\to a} f(z) = \alpha$ (respect. $lim_{z\to a} f(z) = \infty$) entonces existe $\delta > 0$ tal que $f(D(a,\delta)\setminus\{a\}) \subset D(\alpha, 1)$ (respect. $f(D(a,\delta)\setminus\{a\}) \subset \mathbb{C}\setminus D(0,1)$) lo que contradice la densidad de la imagen del entorno.

■

Ejemplo 8.1.4 *Sea $f(z) = e^{1/z}$. Nótese que la periodicidad de la función exponencial permite probar que $f(U) = \mathbb{C}\setminus\{0\}$ para todo U entorno reducido del origen.*

Definición 8.1.12 *Se dice que ∞ es una singularidad aislada de f si existe $R > 0$ tal que $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}\setminus\overline{D(0,R)})$. De este modo se puede afirmar que*

∞ es evitable si $lim_{z\to\infty} f(z) \in \mathbb{C}$,

∞ es polo si $lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$.

∞ es esencial si no existe $lim_{z\to\infty} f(z)$.

Nota 8.1.2 *Si consideramos $g(z) = f(\frac{1}{z})$ es claro que*

$z = \infty$ es una singularidad de cierto tipo de f si y solo si $z = 0$ lo es del mismo tipo para g.

Definición 8.1.13 *∞ es un polo de orden k de $f(z)$ si $z = 0$ es un polo de orden k de $f(\frac{1}{z})$*

Nota 8.1.3 *Sea $P(z)$ un polinomio de grado k, entonces $z = \infty$ es un polo de orden k de P.*

Proposición 8.1.14 *Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}\setminus\overline{D(0,R)})$. Son equivalentes:*

(i) ∞ es un polo de orden k.

(ii) $lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z^n} = \infty \qquad \forall n < k$ y $lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z^k} = \alpha \neq 0$.

(iii) Existe $r > 0$ y $f_1 \in \mathcal{H}(\mathbb{C}\setminus\overline{D(0,r)})$ tal que $lim_{z\to\infty} f_1(z) = \alpha \neq 0$ y $f(z) = z^k f_1(z)$.

Demostración: Inmediata ■

Proposición 8.1.15 (Regla de L'Hopital) *Sean $f, g \in \mathcal{H}(D(a,R)\setminus\{a\})$, no idénticamente nulas.*

Si suponemos que

i) $\lim_{z\to a} f(z) = \lim_{z\to a} g(z) = 0$, *ó*
(ii) $\lim_{z\to a} f(z) = \lim_{z\to a} g(z) = \infty$ *entonces*

$$\lim_{z\to a}\frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to a}\frac{f'(z)}{g'(z)}(\in \mathbb{C}\cup\{\infty\}).$$

Demostración: (i) Existe $R > 0$ tal que $f(z) = (z-a)f_1(z)$ y $g(z) = (z-a)g_1(z)$ en $|z-a| < R$ donde f_1, g_1 son holomorfas en el entorno. Entonces $f'(z) = f_1(z) + (z-a)f_1'(z)$ y $g'(z) = g_1(z) + (z-a)g_1'(z)$. Por tanto

$$\lim_{z\to a}\frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to a}\frac{f_1(z)}{g_1(z)} = \lim_{z\to a}\frac{f'(z)}{g'(z)}.$$

Nótese que $\lim_{z\to a}\frac{f_1(z)}{g_1(z)}$ puede ser infinito si $m(a,g) > m(a,f)$.

(ii) Supongamos que $o(f,a) = k$ y $o(g,a) = k'$. Existe $R > 0$ tal que $f(z) = \frac{f_1(z)}{(z-a)^k}$ y $g(z) = \frac{g_1(z)}{(z-a)^{k'}}$ en $0 < |z-a| < R$ donde f_1, g_1 son holomorfas en el entorno con $f_1(a) \neq 0, g_1(a) \neq 0$. Entonces

$$f'(z) = -k\frac{f_1(z)}{(z-a)^{k+1}} + \frac{f_1'(z)}{(z-a)^k} = -k\frac{f(z)}{z-a} + \frac{f_1'(z)}{(z-a)^k},$$

$$g'(z) = -k'\frac{g_1(z)}{(z-a)^{k'+1}} + \frac{g_1'(z)}{(z-a)^{k'}} = -k'\frac{g(z)}{z-a} + \frac{g_1'(z)}{(z-a)^{k'}}.$$

En el caso de que $k = k'$ se obtiene

$$f'(z)(z-a)^k = -kf(z)(z-a)^{k-1} + f_1'(z), \quad g'(z)(z-a)^k = -kg(z)(z-a)^{k-1} + g_1'(z).$$

Por tanto

$$\lim_{z\to a}\frac{f'(z)}{g'(z)} = \lim_{z\to a}\frac{-kf(z)(z-a)^{k-1} + f_1'(z)}{-kg(z)(z-a)^{k-1} + g_1'(z)} = \lim_{z\to a}\frac{f(z)}{g(z)}.$$

En el caso de que $k > k'$, es decir, $\lim_{z\to a}\frac{f(z)}{g(z)} = \infty$ se obtiene
Por tanto

$$\lim_{z\to a}\frac{f'(z)}{g'(z)} = \lim_{z\to a}\frac{\frac{-kf_1(z)+(z-a)f_1'(z)}{(z-a)^{k+1}}}{\frac{-k'g_1(z)+(z-a)g_1'(z)}{(z-a)^{k'+1}}} = \lim_{z\to a}\frac{-kf_1(z) + (z-a)f_1'(z)}{-k'g_1(z) + (z-a)g_1'(z)}(z-a)^{k'-k} = \infty.$$

Similarmente se obtiene el caso $k' > k$, es decir, $\lim_{z\to a}\frac{f(z)}{g(z)} = 0$.

∎

De manera análoga se prueba (la demostración se deja al lector interesado)

Proposición 8.1.16 *Sean $f, g \in \mathcal{H}(D(0, R, \infty))$, no idénticamente nulas.*

Si $\lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty} g(z) \in \{0, \infty\}$ *entonces*

$$\lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to\infty} \frac{f'(z)}{g'(z)} (\in \mathbb{C} \cup \{\infty\}).$$

Probaremos ahora un resultado que caracteriza cuando las funciones enteras tienen singularidades en $z = \infty$.

Proposición 8.1.17 *Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.*

(i) ∞ es evitable si y solo si f es constante.

(ii) ∞ es un polo de orden k si y solo si f es un polinomio de orden k.

(iii) ∞ es esencial si y solo si $\forall\lambda \in \mathbb{C}$ existe $z_n \in \mathbb{C}$ tales que $z_n \to \infty$ y $f(z_n) \to \lambda$.

Demostración: (i) se sigue del Teorema de Liouville.

(ii) Usando que existe $\lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z^k}$ junto con la regla de L'Hopital se tiene que

$$\lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z^k} = \lim_{z\to\infty} \frac{f'(z)}{kz^{k-1}} = ... = \lim_{z\to\infty} \frac{f^{(k)}(z)}{k!}.$$

Por tanto $f^{(k)}$ es entera y acotada, y por Liouville, $f^{(k)}(z) = a_0$. De donde se tiene que f es un polinomio de grado k.

(iii) es aplicación directa de Cassorati-Weierstrass y el hecho de ser $z = 0$ esencial para $f(\frac{1}{z})$. ∎

8.2 Desarrollos de Laurent.

Es sencillo comprobar que si una función tiene una singularidad aislada tipo polo de orden k en un punto a entonces admite un desarrollo en un entorno reducido del siguiente tipo:

$$f(z) = \frac{a_{-k}}{(z-a)^k} + \frac{a_{-(k-1)}}{(z-a)^{k-1}} + ... + \frac{a_{-1}}{(z-a)} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n.$$

La cuestión que se resolverá en este párrafo es el hecho de que toda función holomorfa en una corona y en particular un disco punteado en torno a una singularidad esencial admite un desarrollo en serie doble de potencias positivas y negativas.

Recordemos la notación siguente, para $0 \le R_1 < R_2 \le \infty$,

$$D(a, R_1, R_2) = \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z - a| < R_2\}.$$

Proposición 8.2.1 *Sea* (a_n) *una sucesión de números complejos,* $a \in \mathbb{C}$ *y* $S = \overline{lim}(|a_n|)^{1/n}$. *Entonces*

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(z-a)^n}$ *converge absolutamente y unifor. en compactos de* $D(a, S, \infty)$.

(ii) Si $z \in D(a, S)$ *entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(z-a)^n}$ *no converge.*

(iii) $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(z-a)^n} \in \mathcal{H}(D(a, S, \infty))$

(iv) S *es el único valor que cumple (i) y (ii).*

Demostración:

(i) Sea K un compacto en $D(a, S, \infty)$ entonces existe $S_1 > S$ tal que $K \subset D(a, S_1, \infty)$. Dado $S < S_2 < S_1$ existe n_0 tal que $|a_n| < S_2^n, \forall n \geq n_0$. Como $|\frac{a_n}{(z-a)^n}| < (\frac{S_2}{S_1})^n, \forall n \geq n_0, z \in K$ entonces hay convergencia uniforme y absoluta en el compacto K.

(ii) Usando el Teorema de Wieierstrass $\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ no converge en $D(0, 1/S, \infty)$ y de ahí si $z \in D(a, S)$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(z-a)^n}$ no converge.

(iii) Como $z \to \frac{1}{z-a}$ es una biyección holomorfa de $D(a, S, \infty)$ en $D(0, 1/S)$ entonces $f(z) = g(\frac{1}{z-a}) \in \mathcal{H}(D(a, s, \infty))$ donde $g(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$.

(iv) Inmediato. ∎

Definición 8.2.2 *Sea* $(z_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *una sucesión doble de números complejos. Una serie doble* $\sum_{n=-\infty}^{\infty} z_n$ *se dice convergente a* z *si existe* $lim_{N,M\to\infty} \sum_{n=-M}^{N} z_n = z$, *i.e para todo* $\varepsilon > 0$ *existen* $N_0, M_0 \in \mathbb{N}$ *tales que* $|\sum_{n=-M}^{N} z_n - z| < \varepsilon$ *para todo* $N \geq N_0$ *y* $M \geq M_0$. *A dicho valor* z *se dice suma de la serie.*

Nota 8.2.1 *Es equivalente a la convergencia de* $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ *y de* $\sum_{n=-1}^{\infty} z_{-n}$ *simultaneamente.*

Proposición 8.2.3 *Sea* $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *una sucesión de números complejos y* $a \in \mathbb{C}$. *Definimos* $R_1 = \overline{lim}(|a_{-n}|)^{1/n}$ *y* $R_2^{-1} = \overline{lim}(|a_n|)^{1/n}$. *Entonces*

(i) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{(z-a)^n}$ *converge absolutamente y uniformemente en compactos de* $D(a, R_1, R_2)$.

(ii) Si $z \notin \overline{D(a, R_1, R_2)}$ *entonces* $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{(z-a)^n}$ *no converge.*

(iii) $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{(z-a)^n} \in \mathcal{H}(D(a, R_1, R_2))$

(iv) R_1, R_2 *son los únicos valores que cumplen (i) y (ii).*

Demostración: Aplicación del Teorema de Weierstrass y la proposición anterior simultaneamente.

∎

Nota 8.2.2 *Caso de $a_{-n} = 0, \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ conduce a que $R_1 = 0$ y usando el teorema de Morera se concluye que f es holomorfa en el disco.*

Caso de $a_{-n} = 0, \forall n \leq -M$. Se tiene que $R_1 = 0$ y por tanto $z = a$ es una singularidad aislada de f. Es inmediato comprobar que es un polo de orden M.

Teorema 8.2.4 *(Teorema de Laurent) Sea $f \in \mathcal{H}(D(a, R_1, R_2))$ para ciertos $0 \leq R_1 < R_2 \leq \infty$. Entonces*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

donde $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw$, $\gamma_r = \{z = a + re^{i\theta} : \theta \in [0, 2\pi)\}$ y $R_1 < r < R_2$.

Demostración: Supongamos que $a = 0$. Fijamos $R_1 < r < R_2$ y definimos $g_r : D(0, r) \to \mathbb{C}$ dado por

$$g_r(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{(w-z)} dw.$$

Del mismo modo definimos $h_r : D(0, r, \infty) \to \mathbb{C}$ dado por

$$h_r(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{(z-w)} dw.$$

Es claro que $g_r \in \mathcal{H}(D(0, r))$ y $h_r \in \mathcal{H}(D(0, r, \infty))$.

Fijado $z \in D(0, R_1, R_2)$ denotemos $\Omega_z = D(0, R_1, R_2) \setminus \{z\}$. Sean r, s tales que $|z| < r < s < R_2$.

Como $\frac{f(w)}{w-z} \in \mathcal{H}(\Omega_z)$ y $\gamma_r \sim \gamma_s$(resp. Ω_z) entonces el teorema homológico de Cauchy permite concluir que $g_r(z) = g_s(z)$.

Podemos definir $g : D(0, R_2) \to \mathbb{C}$ por $g(z) = g_r(z)$ para cualquier $|z| < r < R_2$ y además $g \in \mathcal{H}(D(0, R_2))$.

Nótese que $g^{(n)}(0) = g_r^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{w^{n+1}} dw$ y

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{w^{n+1}} dw) z^n.$$

Por otro lado, para $z \in D(0, R_1, R_2)$ tomando ahora r, s tales que $R_1 < r < s < |z|$ y usando de nuevo $\Omega_z = D(0, R_1, R_2) \setminus \{z\}$

Como $\frac{f(w)}{z-w} \in \mathcal{H}(\Omega_z)$ y $\gamma_r \sim \gamma_s$(resp. Ω_z) entonces el teorema homológico de Cauchy permite concluir que $h_r(z) = h_s(z)$.

Podemos definir $h : D(0, R_1, \infty) \to \mathbb{C}$ por $h(z) = h_s(z)$ para cualquier $R_1 < s < |z|$ y además $h \in \mathcal{H}(D(0, R_1, \infty))$.

Por otro lado como $\frac{1}{z-w} = \frac{1}{z(1-w/z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^{n-1}}{z^n}$ siempre que $|w| < |z|$ y siendo la convergencia es uniforme en compactos de $D(0, |z|)$, podemos escribir

$$h(z) = h_s(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_s} \frac{f(w)}{(z-w)} dw = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_s} f(w) w^{n-1} dw) z^{-n}.$$

Veamos ahora que $f(z) = g(z) + h(z)$ para acabar el resultado.

Fijado $z \in D(0, R_1, R_2)$ tomemos $R_1 < r < |z| < s < R_2$ y definamos

$$F(w) = \frac{1}{2\pi i} \frac{f(w) - f(z)}{w - z}, w \neq z,$$

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} f'(z).$$

Como $F \in \mathcal{H}(D(0, R_1, R_2))$ y $\gamma_r \sim \gamma_s$(resp.$D(0, R_1, R_2)$) aplicando otra vez el teorema homológico de Cauchy se concluye que

$$\int_{\gamma_r} F(w) dw = \int_{\gamma_s} F(w) dw$$

y de ahí

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_s} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} dw.$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{w - z} dw - f(z) Ind_{\gamma_r}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_s} \frac{f(w)}{w - z} dw - f(z) Ind_{\gamma_s}(z).$$

Es decir $f(z) = g(z) + h(z)$

■

Corolario 8.2.5 *Sea* $\Omega = D(a, R_1, R_2)$ *con* $0 \leq R_1 < R_2 \leq \infty$.

$f \in \mathcal{H}(\Omega)$ *si y solo si existe un unica sucesión* $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ *tal que*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - a)^n, \forall z \in \Omega.$$

Demostración: Sólo hay que probar la unicidad.

Supongamos $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(z-a)^n, \forall z \in \Omega$. Como hay convergencia uniforme en compactos de Ω, si tomamos γ_r la circunferencia de centro a y radio r con $R_1 < r < R_2$ entonces

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}dw &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{\sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k(w-a)^k}{(w-a)^{n+1}}dw\\ &\sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}(w-a)^{k-n-1}dw = b_n,\end{aligned}$$

donde aplicamos que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}(w-a)^{m-1}dw = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} r^m e^{imt}dt = 0, m \neq 0.$$

■

Proposición 8.2.6 *Sea a una singularidad aislada de f. Por tanto existe $R > 0$ tal que $f \in \mathcal{H}(D(a,0,R))$ y así $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$.*

Definimos $\lambda(f,a) = inf\{n \in \mathbb{Z} : a_n \neq 0\}$. Entonces

(i) a es evitable si y sólo si $\lambda(f,a) \geq 0$.

(ii) a es polo de orden k si y sólo si $\lambda(f,a) = -k$.

(iii) a es esencial si y sólo si $\lambda(f,a) = -\infty$.

Demostración: Inmediata. ■

Proposición 8.2.7 *Sea ∞ una singularidad aislada de f. Por tanto existe $R > 0$ tal que $f \in \mathcal{H}(D(0,R,\infty))$ y así $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$.*

Definimos $\beta(f) = sup\{n \in \mathbb{Z} : a_n \neq 0\}$. Entonces

(i) ∞ es evitable si y sólo si $\beta(f) = 0$.

(ii) ∞ es polo de orden k si y sólo si $\beta(f) = k$.

(iii) ∞ es esencial si y sólo si $\beta(f) = \infty$.

Demostración: Usando $g(z) = f(1/z)$ se tiene que $g(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{-n}z^n$. Por tanto

$$\lambda(g,0) = \inf\{n \in \mathbb{Z} : a_{-n} \neq 0\} = -\sup\{n \in \mathbb{Z} : a_n \neq 0\} = -\beta(f).$$

Usar ahora el resultado para singularidades en $z = 0$ de la función g. ■

Ejemplo 8.2.1 *Sean $0 < |a| < |b|$. Calcular el desarrollo de Laurent de $f(z) = \frac{1}{(z-a)(z-b)}$ en coronas centradas en los siguientes puntos: $z = 0, z = a, z = b$.*

Demostración: En todo los casos usaremos que

$$(\sum_{n=0} \alpha_n) \sum_{n=0} \beta_n = \sum_{n=0} (\sum_{k+l=n} \alpha_k \beta_l)$$

bajo condiciones de convergencia absoluta de las series involucradas.

(i) Caso $z = 0$: Como $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{a, b\})$ tenemos los siguientes desarrollos:

En $D(0, |a|)$ que corresponde a un desarrollo en torno de $z = 0$.

$$f(z) = \frac{-1}{b(1-(z/b))} \frac{-1}{a(1-(z/a))} = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{b^{n+1}} \Big) \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{a^{n+1}} \Big).$$

Por tanto

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{b^{k+1}} \frac{1}{a^{n-k+1}}) z^n.$$

En $D(0, |b|, \infty)$ que corresponde a un desarrollo en torno de $z = \infty$.

$$f(z) = \frac{1}{z(1-(b/z))} \frac{1}{z(1-(a/z))} = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{z^{n+1}} \Big) \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{z^{n+1}} \Big).$$

Por tanto

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{k=0}^{n} b^k a^{n-k}) z^{-(n+2)}.$$

En $D(0, |a|, |b|)$:

$$f(z) = \frac{-1}{b(1-(z/b))} \frac{1}{z(1-(a/z))} = - \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{b^{n+1}} \Big) \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{z^{n+1}} \Big) =$$

$$= - \sum_{m=0}^{\infty} \Big(\sum_{k+l=m} \frac{z^k}{b^{k+1}} \frac{a^l}{z^{l+1}} \Big).$$

Por tanto, usando $n = k - l - 1$ se tiene

$$f(z) = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\sum_{k-l=n+1} \frac{a^l}{b^{k+1}}) z^n.$$

(ii) Caso $z = a$: Como $f \in \mathcal{H}(D(a, 0, |b| - |a|))$ tenemos

$$\frac{-1}{(b-a)(1-\frac{z-a}{b-a})}\frac{1}{z-a} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(b-a)^{n+1}}\frac{1}{z-a} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^{n-1}}{(b-a)^{n+1}}.$$

(iii) Caso $z = b$: Como $f \in \mathcal{H}(D(b, 0, |b| - |a|)$ tenemos

$$f(z) = \frac{-1}{(a-b)(1-\frac{z-b}{a-b})}\frac{1}{z-b} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-b)^n}{(a-b)^{n+1}}\frac{1}{z-b} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-b)^{n-1}}{(a-b)^{n+1}}.$$

■

Ejemplo 8.2.2 *Calcular el desarrollo de Laurent de $f(z) = cotag(z)$ en la corona $D(0, \pi, 2\pi)$.*

Demostración: Observar primero que

$$lim_{z\to\pi}(z-\pi)cotag\ z = lim_{z\to\pi}\frac{(z-\pi)cos\ z}{sen\ z - sen\pi} = 1.$$
$$lim_{z\to-\pi}(z+\pi)cotag\ z = lim_{z\to-\pi}\frac{(z+\pi)cosz}{sen\ z - sen\pi} = 1.$$
$$lim_{z\to0}zcotag\ z = 1.$$

Luego f tiene polos simples en $\{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.
Consideremos

$$g(z) = cotag\ z - (\frac{1}{z} + \frac{1}{z-\pi} + \frac{1}{z+\pi})$$

Es fácil ver que esta función es holomorfa en el $D(0, 2\pi)$.
En efecto

$$g(z) = \frac{cos\ z}{sen\ z} - \frac{3z^2-\pi^2}{(z^2-\pi^2)z} = \frac{i(e^{2iz}+1)(z^3-\pi^2 z) - (3z^2-\pi^2)(e^{2iz}-1)}{(e^{2iz}-1)(z^2-\pi^2)z}.$$

Comprobando que existen $lim_{z\to\pi}g(z)$, $lim_{z\to-\pi}g(z)$ y $lim_{z\to0}g(z)$ se obtiene la derivabilidad por el teorema de Morera y por tanto

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \qquad |z| < 2\pi.$$

Ahora despejamos

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \frac{1}{z} + \frac{1}{z-\pi} + \frac{1}{z+\pi}$$

Ponemos $\frac{2z}{z^2-\pi^2} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n}$ con $|z| > \pi$ y obtiene

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n} + \frac{1}{z}, \qquad \pi < |z| < 2\pi.$$

■

Ejemplo 8.2.3 *Desarrollar* $f(z) = \frac{1}{(z^2-1)^2}$ *en la corona* $0 < |z-1| < 2$.

Demostración:
Método 1: Escribimos

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-1|=1} \frac{1}{(z^2-1)^2(z-1)^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-1|=1} \frac{1}{(z+1)^2(z-1)^{n+3}} dz.$$

Llamando $g(z) = \frac{1}{(z+1)^2}$ se tiene $a_n = 0$ si $n \leq -3$ y

$$a_n = \frac{1}{(n+2)!} g^{(n+2)}(1) = \frac{(-1)^n(n+3)}{2^{n+4}}, \qquad n > -3.$$

Método 2: Ponemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z^2-1)^2} &= \frac{1}{(z-1)^2}\frac{1}{(z+1)^2} \\ & \frac{1}{4(z-1)^2}\frac{1}{(1+\frac{z-1}{2})^2}. \end{aligned}$$

Se termina usando

$$\frac{1}{(w+1)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(-1)^n w^n.$$

Método 3: Ponemos

$$\frac{1}{(z^2-1)^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{(z-1)} - \frac{1}{(z+1)}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{(z-1)} + \frac{1}{(z+1)} + \frac{1}{(z+1)^2}\right).$$

Se termina usando

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z-1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{2^{n+1}}.$$

$$\frac{1}{(z+1)^2} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(z-1)^n}{2^{n+2}}.$$

■

8.3 Problemas propuestos.

1.- Puntos singulares, su naturaleza, y comportamiento en ∞ de:

$$\frac{z^4}{(1+z)^4};\quad \frac{z^2+z+1}{z^2(z-1)};\quad \frac{e^z}{z(1-e^{-z})};\quad \frac{z-senz}{z^3};\quad \frac{z^2}{e^{z^4}};$$

$$\frac{sen2z}{(z+1)^3};\quad z^4 sen\frac{1}{z};\quad cosec(z^{-1});\quad cos(z^2+\frac{1}{z^2});\quad e^{\frac{z}{(z-2)}};$$

$$\frac{1-e^z}{1+e^z};\quad \frac{cotg(z)\ coth(z)}{z^3};\quad sen(\frac{1}{sen(\frac{1}{z})});$$

$$cos(\frac{1}{cos(\frac{1}{z})});\quad ze^{\frac{z}{1-z}} - \frac{1}{(1-z)^2}sen\frac{1}{z}.$$

2.- Desarrollar las siguientes funciones en serie de Laurent en los entornos de los puntos que se indica, determinando el dominio en el que vale el desarrollo.

a) $\frac{1}{z-2}$ en $z=0, z=\infty$. b) $\frac{1}{(z^2+1)^2}$ en $z=i, z=\infty$.

c) $\frac{1}{(z-a)^k}(a \neq 0, k \in \mathbb{N})$ en $z=0, z=\infty$. d) $e^{\frac{1}{1-z}}$ en $z=1$.

e) $z^2 e^{\frac{1}{z}}$ en $z=0, z=\infty$. f) $\frac{1}{e^z-1}$ en $z=0$.

g) $Log\frac{z-a}{z-b}$ en $z=\infty$. h) $\frac{arctgz}{z^4}$ en $z=0$.

i) $cos\frac{z^2-4z}{(z-2)^2}$ en $z=2$. j) $z^2 sen\frac{1}{z-1}$ en $z=1$. k) $sen\frac{z}{1-z}$ en $z=1$.

3.- Desarrollar las funciones en las regiones que se citan en cada caso.

a) $\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ en $z=0, z=1, z=\infty$ y en la corona $1<|z|<2$.

b) $\frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}$ en $z = 2$, en la corona $1 < |z| < 2$.
c) $\frac{1}{(z-2)^2}$ en $|z| < 2, |z| > 2$.
d) $e^{z+\frac{1}{z}}$ en $0 < |z| < \infty$.
e) $senzsen\frac{1}{z}$ en $0 < |z| < \infty$.
f) $\frac{1}{z-2}Log\frac{z-i}{z+i}$ en $z = \infty$ y en $1 < |z| < 2$.

4.- Dada la función g, encontrar $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $f^2 = g$ y desarrollarla en serie de Laurent en Ω, siendo

a) $g(z) = (z-a)(z-b)$ con $\Omega = \{z; |z| > max|a|, |b|\}$.
b)$g(z) = \frac{(z-a)(z-b)}{z}$ con $\Omega = B(0; |a|, |b|), |a| < |b|$.
c) $g(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)}$ con $Imf(3/2) > 0, \Omega = B(0; 1, 2)$.

5.- Sea $f(z) = \frac{1}{z-2i}Log\frac{z-1}{z+i}$. Hallar el máximo abierto en que f es holomorfa. Probar que $f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k z^k$ en $1 < |z| < 2$ donde $c_k = \frac{A}{(2i)^k}$ si $k \geq 0, A = cte$. ¿ En qué otros dominios es $f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k z^k$?

Capítulo 9

Teorema de los residuos y aplicaciones

9.1 Teorema de los residuos

El objetivo de esta sección es calcular $\int_\gamma f(z)dz$ para ciclos $\gamma \sim 0(resp.\Omega)$ cuando f no es una función holomorfa en Ω, sino para funciones con singularidades dentro de Ω.

Observemos varias situaciones que tenemos resueltas en la teoría precedente.

*) Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $\bar{D}(a,R) \subset \Omega$ entonces $\int_{|z-a|=R} f(z)dz = 0$.

**) Si $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a\})$ y $\bar{D}(a,R) \subset \Omega$, supuesto $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$ entonces

$$\int_{|z-a|=R} f(z)dz = 2\pi i a_{-1}.$$

***) Si $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a,b\})$ y $\{a,b\} \in \bar{D}(z_0,R) \subset \Omega$, entonces

$$\int_{|z-z_0|=R} f(z)dz = \int_{|z-a|=r_1} f(z)dz + \int_{|z-b|=r_2} f(z)dz,$$

para r_1, r_2 tales que $a \notin D(b,r_2) \subset D(z_0,R)$ y $b \notin D(a,r_1) \subset D(z_0,R)$, quedando este caso reducido al caso anterior.

Este último resultado es consecuencia inmediata del Teorema homológico de Cauchy, considerando $\Omega_1 = \Omega \setminus \{a,b\}$ y el ciclo

$$\{|z-z_0| = R\} \sim \{|z-a| = r_1\} \cup \{|z-b| = r_2\}(resp.\Omega_1).$$

Definición 9.1.1 *Sea $f \in \mathcal{H}(D(a,R)\backslash\{a\})$. Se dice residuo de f en el punto a, denotado $Res(f,a)$, al coeficiente de $\frac{1}{z-a}$ en el desarrollo de Laurent en la corona $D(a,0,R)$, es decir*

$$Res(f,a) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=r} f(z)dz, 0 < r < R.$$

Proposición 9.1.2 *Sea a un polo de orden k para f. Entonces*

$$Res(f,a) = \lim_{z\to a} \frac{1}{(k-1)!}((z-a)^k f(z))^{(k-1}.$$

Demostración: Usando la caracterización de polo de orden k podemos decir que existe $g \in \mathcal{H}(D(a,R))$ con $g(a) \neq 0$ y $f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^k}$ en $D(a,R)\setminus\{a\}$.

Denotando $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n$ se tiene $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^{n-k}$.

Por tanto

$$Res(f,a) = b_{k-1} = \frac{g^{k-1}(a)}{(k-1)!}.$$

■

Corolario 9.1.3 *Si a es un polo simple para f. Entonces*

$$Res(f,a) = \lim_{z\to a}(z-a)f(z).$$

Ejemplo 9.1.1 *1.- Si $f(z) = \frac{1}{sen(z)}$ entonces $z = 0$ es un polo simple y $Res(f,0) = 1$.*

2.- Si $f(z) = \frac{1}{sen^2(z)}$ entonces $z = 0$ es un polo doble y $Res(f,0) = 0$.

3.- Si $f(z) = z^2 e^{\frac{2}{z}}$ entonces $z = 0$ es esencial y $Res(f,0) = \frac{1}{6}$.

Demostración:

1.- $Res(f,0) = lim_{z\to 0}\dfrac{z}{sen(z)} = 1.$

2.- $Res(f,0) = lim_{z\to 0}(\dfrac{z^2}{sen^2(z)})' = lim_{z\to 0}\dfrac{2z}{sen(z)}\dfrac{sen(z) - zcos(z)}{sen^2(z)} = 0.$

Otro procedimiento plausible de cálculo de $(\frac{z^2}{sen^2(z)})'_{z=0}$ consiste es considerar la serie de potencias de la función $\frac{z^2}{sen^2(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ y entonces calcular a_1 del siguiente modo:

$$(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n) sen^2(z) = z^2.$$

Igualando coeficiente a coeficiente se tiene

$$(1 + a_1 z + a_2 z^2 + ...)(z^2 - \frac{1}{3}z^4 + \frac{1}{36}z^6 + ...) = z^2.$$

De donde $a_1 = 0$.

3.- $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!z^{n-2}}$, luego coeficiente de $\frac{1}{z}$ es para $n = 3$ ∎

Proposición 9.1.4 *Sea $f \in \mathcal{H}(D(a,R) \setminus \{a\})$ y supongamos*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n.$$

Si $S_r = \{a + re^{it} : t \in [0,\pi]\}$ y $0 < r < R$ entonces

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{S_r} f(z)dz = \frac{1}{2}Res(f,a) + \frac{i}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{2n}\frac{r^{2n+1}}{2n+1}.$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_{S_r} f(z)dz &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \int_{S_r}(z-a)^n dz \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \int_0^{\pi} r^{n+1}e^{i(n+1)t}dt \\
&= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n\neq -1} a_n r^{n+1}\frac{e^{i(n+1)\pi}-1}{n+1}dt + \frac{a_{-1}}{2} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n\neq -1} a_n r^{n+1}\frac{cos(n+1)\pi - 1}{n+1}dt + \frac{a_{-1}}{2} \\
&= \frac{i}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{2n}\frac{r^{2n+1}}{2n+1}dt + \frac{a_{-1}}{2}.
\end{aligned}$$

∎

Corolario 9.1.5 *Sea $f \in \mathcal{H}(D(a,R) \setminus \{a\})$ y supongamos que a es un polo simple de f. Si $S_r = \{a + re^{it} : t \in [0,\pi]\}$ y $0 < r < R$ entonces*

$$Res(f,a) = 2\lim_{r\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{S_r} f(z)dz.$$

Demostración: Notar que $a_{-2n} = 0$ para $n \in \mathbb{N}$ y

$$r(\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} \frac{r^{2n}}{2n+1}) \to 0, r \to 0.$$

Utilizar la Prop. 9.1.4 para terminar la demostración. ∎

Teorema 9.1.6 *(Teorema de los residuos.) Sea Ω un abierto de $\mathbb{C}$ y una función $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus A)$ donde $A \subset \Omega$ es un conjunto numerable de singularidades aisladas (polos y esenciales) de f. Sea γ un ciclo contenido en Ω tal que $\gamma \sim 0(resp.\Omega)$ y $A \cap \gamma^* = \varnothing$. Entonces*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)dz = \sum_{a \in A} Res(f, a) Ind_\gamma(a).$$

Demostración: Supongamos primero que $\Omega \neq \mathbb{C}$. Consideremos

$$A_0 = \{a \in A : Ind_\gamma(a) \neq 0\}.$$

Veamos, en primer lugar que A_0 es finito.

En efecto, A_0 es acotado, pues $Ind_\gamma(z) = 0$ para todo z en la componente conexa no acotada de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ que necesariamente contiene el $\mathbb{C} \setminus D(0, R)$ para algún $R > 0$.

Supongamos que A_0 es infinito entonces existe una sucesión de puntos distintos $a_n \in A_0$ convergente en $\bar{\Omega}$. Es claro que $z = \lim_{n\to\infty} a_n \in \partial\Omega$ (pues otro caso Ω tendría singularidades no aisladas).

Ahora bien si $r > 0$ es tal que $D(z, r) \cap \gamma^* = \varnothing$ (lo cual se consigue con $0 < r < d(\partial\Omega, \gamma^*)$) entonces $\forall w \in D(z, r)$ se tiene $Ind_\gamma(w) = 0$ (ya que si $w \notin \Omega$ entonces $Ind_\gamma(w) = 0$ y el indice es constante en toda la bola). Por tanto se obtiene un absurdo, ya que $a_n \in D(z, r) \cap A_0$.

Por consiguiente fijando $0 < \delta < min\{d(a, b) : a \neq b, a, b \in A_0\}$ con $0 < \delta < d(A_0, \gamma*)$ se tiene una colección finita de bolas $D(a, \delta) \subset \Omega \setminus \gamma*$ tales que $D(a, \delta) \cap A = \{a\}$ para todo $a \in A_0$.

Consideramos entonces el ciclo $\gamma_0 = \cup_{a \in A_0} \gamma_a$ siendo $\gamma_a = Ind_\gamma(a)\partial D(a, \frac{\delta}{2})$.

Veamos que $\gamma \sim \gamma_0(resp.\Omega \setminus A)$. (Observar que A es cerrado)

En efecto si $w \notin \Omega$ entonces $Ind_\gamma(w) = 0 = Ind_{\gamma_a}(w)$ $\forall a \in A_0$.

Si $w \in A_0$ entonces

$$Ind_{\gamma_0}(w) = \sum_{a \in A_0} Ind_\gamma(a) Ind_{\partial D(a, \frac{\delta}{2})}(w) = Ind_\gamma(w).$$

Si $w \in A \setminus A_0$ entonces $Ind_\gamma(w) = 0 = Ind_{\gamma_0}(w)$ pues $Ind_{\partial D(a,\frac{\delta}{2})}(w) = 0$ si $w \notin D(a, \frac{\delta}{2})$ si $a \in A_0$.

Apliquemos ahora el teorema homológico de Cauchy, obteniendo

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)dz &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_0} f(z)dz \\
&= \frac{1}{2\pi i}\sum_{a\in A_0} Ind_\gamma(a)\int_{|z-a|=\frac{\delta}{2}} f(z)dz \\
&= \sum_{a\in A_0} Ind_\gamma(a)Res(f,a) = \sum_{a\in A} Ind_\gamma(a)Res(f,a).
\end{aligned}$$

Si consideramos el caso $\Omega = \mathbb{C}$ nos podemos reducir al caso anterior pues $A_0 \subset D(0,R)$ para algún $R > 0$ y se considera $\Omega_1 = D(0,R)$. ∎

9.2 Aplicaciones a integrales y series

Ejemplo 9.2.1 *(Cálculo de integrales sobre caminos)*
Calcular para $n \in \mathbb{N}$

$$\int_{|z|=(n+\frac{1}{2})\pi} (coth\ z)(cotag\ z)dz.$$

Resolución: Consideremos las función

$$f(z) = (coth\ z)(cotag\ z) = i\frac{e^{2z}+1}{e^{2z}-1}\frac{e^{2iz}+1}{e^{2iz}-1}.$$

Como $e^{2z} = 1 \iff z = k\pi i, k \in \mathbb{Z}$ y $e^{2zi} = 1 \iff z = k\pi, k \in \mathbb{Z}$, tenemos

$$P_f = \{k\pi, k\pi i : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Consideremos $\gamma_n = \{z \in \mathbb{C} : |z| = (n+\frac{1}{2})\pi\}$. Por el teorema de los residuos

$$\int_{|z|=(n+\frac{1}{2})\pi} f(z)dz = 2\pi i\Big(\sum_{k=-n,k\neq 0}^{n} Res(f,k\pi i) + \sum_{k=-n,k\neq 0}^{n} Res(f,k\pi) + Res(f,0)\Big).$$

Para $k \neq 0$ entonces

$$Res(f,k\pi i) = \lim_{z\to k\pi i}\frac{(z-k\pi i)}{sh\ z}(cotag\ z)(ch\ z) = cotag(k\pi i) = -i\frac{e^{2k\pi}+1}{e^{2k\pi}-1}.$$

$$Res(f,k\pi) = \lim_{z\to k\pi}\frac{(z-k\pi)}{sen\ z}(cothz)(cos\ z) = coth(k\pi) = \frac{e^{2k\pi}+1}{e^{2k\pi}-1}.$$

Por último

$$Res(f,0) = i(\frac{z^2(e^{2z}+1)(e^{2zi}+1)}{(e^{2z}-1)(e^{2zi}-1)})'_{z=0}.$$

Poniendo

$$\frac{z^2(e^{2z}+e^{2iz}+e^{2z(1+i)}+1)}{(e^{2z(1+i)}-e^{2z}-e^{2zi}+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n.$$

Buscamos b_1. Por otro lado tenemos que

$$4z^2+4(1+i)z^3+... = (\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n)(2(1+i)^2z^2+\frac{4}{3}((1+i)^3-1-i^3)z^3+...).$$

De aqui que $4 = 2(1+i)^2 b_0$ y

$$4(1+i) = b_0(\frac{4}{3}((1+i)^3-1-i^3)) + b_1(2(1+i)^2).$$

Lo que permite despejar $b_1 = \frac{1}{2(1+i)^2}(4(1+i) - 8\frac{(i-1)}{(1+i)^2}) = 0.$

∎

Ejemplo 9.2.2 *(Cálculo de integrales sobre caminos)*
Sea $P(z)$ un polinomio de grado k y consideremos $r > k$. Calcular

$$\int_{|z|=r} P(z)(e^{\frac{1}{z}}+e^{\frac{1}{z-1}}+...+e^{\frac{1}{z-k}})dz.$$

Resolución: Consideremos

$$f(z) = P(z)(e^{\frac{1}{z}}+e^{\frac{1}{z-1}}+...+e^{\frac{1}{z-k}}) = \sum_{n=0}^{k} P(z)e^{\frac{1}{z-n}} = \sum_{n=0}^{k} f_n(z).$$

Observar que $z = n$ es una singularidad esencial de $f_n(z) = P(z)e^{\frac{1}{z-n}}$.
Sea $\gamma_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$. Entonces, por el teorema homológico de Cauchy,

$$\begin{aligned}\int_{|z|=r} P(z)(e^{\frac{1}{z}}+e^{\frac{1}{z-1}}+...+e^{\frac{1}{z-k}})dz &= \sum_{n=0}^{k}\int_{|z|=r} P(z)e^{\frac{1}{z-n}}dz \\ &= 2\pi i\sum_{n=0}^{k} Res(f_n,n)\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}Res(f_n,n) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-n|=\frac{1}{2}} f_n(z)dz \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-n|=\frac{1}{2}}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{P(z)}{j!(z-n)^j}dz \\ &= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-n|=\frac{1}{2}}\frac{P(z)}{(z-n)^j}dz \\ &= \sum_{j=1}^{\infty}\frac{P^{(j-1)}(n)}{(j-1)!j!}.\end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}\int_{|z|=r} P(z)(e^{\frac{1}{z}}+e^{\frac{1}{z-1}}+...+e^{\frac{1}{z-k}})dz &= \sum_{n=0}^{k}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{P^{(j-1)}(n)}{(j-1)!j!} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(j+1)(j!)^2}(\sum_{n=0}^{k}P^{(j)}(n)).\end{aligned}$$

■

Ejemplo 9.2.3 *(Cálculo de integrales trigonométricas)*
Calcular

$$\int_0^{2\pi}\frac{1-cos2t}{2+cost}dt.$$

Resolución: Transformamos en una integral compleja sobre la circunferencia unidad mediante el cambio $z=e^{it}$.

$$\int_0^{2\pi}\frac{1-cos2t}{2+cost}dt=\int_0^{2\pi}\frac{2-e^{2it}-e^{-2it}}{4+e^{it}+e^{-it}}dt=-i\int_{|z|=1}\frac{2z^2-z^4-1}{z^2+4z+1}\frac{dz}{z^2}.$$

Consideremos ahora

$$f(z) = i\frac{(z^2-1)^2}{(z-z_1)(z-z_2)z^2},$$

con $z_1 = -2+\sqrt{3}, z_2 = -2-\sqrt{3}$.

Utilizando el teorema de los residuos

$$\int_0^{2\pi} \frac{1-cos2t}{2+cost}dt = 2\pi i Res(f,-2+\sqrt{3}) + 2\pi i Res(f,0).$$

Donde

$$Res(f, 2-\sqrt{3}) = i\frac{((\sqrt{3}-2)^2-1)^2}{2\sqrt{3}(\sqrt{3}-2)^2}.$$

$$Res(f,0) = (i\frac{(z^2-1)^2}{(z^2+4z+1)})'_{z=0} = -4i.$$

■

Ejemplo 9.2.4 *(Cálculo de integrales impropias: Tipo I)*
Calcular

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+x+1}.$$

Resolución: Como la integral impropia es convergente se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+x+1} = \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} \frac{dx}{x^2+x+1}.$$

Consideremos la función

$$f(z) = \frac{1}{z^2+z+1}$$

y la semicircunferencia

$$S_n = \{ne^{it} : t \in [0,\pi]\}, \gamma_n = S_n \cup [-n,n].$$

Entonces como $P_f = \{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\}$,

$$\int_{\gamma_n} f(z)dz = \int_{S_n} \frac{dz}{z^2+z+1} + \int_{-n}^{n} \frac{dx}{x^2+x+1} = 2\pi i Res(f, -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i).$$

Ahora bien $Res(f, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) = \frac{1}{\sqrt{3}i}$ y

$$|f(z)| \leq \frac{1}{|z|^2 - |z| - 1} = \frac{1}{n^2 - n - 1}, \ z \in S_n$$

Por tanto

$$|\int_{S_n} \frac{dz}{z^2 + z + 1}| \leq \frac{\pi n}{n^2 - n - 1} \to 0, (n \to \infty).$$

Tomando límites se concluye que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + x + 1} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

■

Nota 9.2.1 *El camino anterior se toma para modelos*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

donde $P(x)$ *y* $Q(x)$ *son polinomios con* $grado(Q) - grado(P) \geq 2$ *y* $\mathcal{Z}_Q \cap \mathbb{R} = \varnothing$.

Ejemplo 9.2.5 *(Cálculo de integrales impropias: Tipo II)*
Calcular

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x sen(x)}{x^2 + 4x + 20} dx.$$

Resolución: Como la integral impropia es convergente se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x sen(x)}{x^2 + 4x + 20} dx = \lim_{n \to \infty} \Im(\int_{-n}^{n} \frac{x e^{ix}}{x^2 + 4x + 20} dx).$$

Consideremos la función

$$f(z) = \frac{z e^{iz}}{z^2 + 4z + 20}$$

y sea $\gamma_n = [-n, n] \cup [n, n + in] \cup [n + in, -n + in] \cup [-n + in, -n]$.

$$\int_{\gamma_n} f(z) dz = \int_{[n, n+in]} \frac{z e^{iz} dz}{z^2 + 4z + 20}$$

$$+ \int_{[n+in,-n+in]} \frac{ze^{iz}dz}{z^2+4z+20}$$
$$+ \int_{[-n+in,-n]} \frac{ze^{iz}dz}{z^2+4z+20}$$
$$+ \int_{-n}^{n} \frac{xe^{ix}dx}{x^2+4x+20}.$$

Notar que $P_f = \{-2+4i, -2-4i\}$ y usando el Teorema de los residuos,

$$\int_{\gamma_n} f(z)dz = 2\pi i Res(f, -2+4i).$$

Ahora bien $Res(f, -2+4i) = \frac{-2+4i}{8i}e^{-2i-4}$.
Por otro lado

$$Im(\int_{-n^n} \frac{xe^{ix}dx}{x^2+4x+20}) = \int_{-n}^{n} \frac{xsen(x)dx}{x^2+4x+20}.$$

Despejando, entonces

$$\begin{aligned}\int_{-n}^{n} \frac{xsen(x)dx}{x^2+4x+20} &= Im(\frac{-1+2i}{2}e^{-4-2i}) \\ &- Im(\int_{[n,n+in]} \frac{ze^{iz}dz}{z^2+4z+20}) \\ &- Im(\int_{[n+in,-n+in]} \frac{ze^{iz}dz}{z^2+4z+20}) \\ &- Im(\int_{[-n+in,-n]} \frac{ze^{iz}dz}{z^2+4z+20}.)\end{aligned}$$

Ahora bien

$$\int_{[n,n+in]} \frac{ze^{iz}dz}{z^2+4z+20} = \int_0^n \frac{(n+it)e^{-t+in}}{(n+it)^2+4(n+it)+20} idt.$$

Llamando $\phi_n(t) = \frac{(n+it)e^{-t+in}}{(n+it)^2+4(n+it)+20}\chi_{[0,n]}$ se tiene, para n grande,

$$|\phi_n(t)| \leq \frac{2ne^{-t}}{n^2-n-20}\chi_{[0,n]} \leq Ce^{-t}\chi_{[0,\infty)}.$$

Por tanto por el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[n,n+in]} \frac{ze^{iz}dz}{z^2+4z+20} = 0.$$

Por otro lado

$$\int_{[n+in,-n+in]} \frac{ze^{iz}dz}{z^2+4z+20} = -\int_n^n \frac{(t+in)e^{it-n}}{(in+t)^2+4(in+t)+20}dt.$$

Es claro que, para n grande, es decir $(n^2-4n-20 \geq 0)$,

$$|\int_{[n+in,-n+in]} \frac{ze^{iz}dz}{z^2+4z+20}| \leq \frac{2n.\sqrt{2}ne^{-n}}{n^2-4n-20} \to 0(n \to \infty).$$

Por último

$$\int_{[n+in,-n]} \frac{ze^{iz}dz}{z^2+4z+20} = -\int_0^n \frac{(-n+it)e^{-t-in}}{(-n+it)^2+4(-n+it)+20}idt.$$

El mismo argumento que en la parte primera permite concluir

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[-n+in,-n]} \frac{ze^{iz}dz}{z^2+4z+20} = 0.$$

Combinando todos los hechos anteriores se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xsen(x)}{x^2+4x+20}dx = Im(\frac{-1+2i}{2}e^{-4-2i}) = \pi e^{-4}(cos2+\frac{sen2}{2}).$$

■

Nota 9.2.2 *El camino anterior se toma para modelos*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}sen(x)dx, \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}cos(x)dx$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios con $grado(Q)-grado(P) \geq 1$ y $\mathcal{Z}_Q \cap \mathbb{R} = \varnothing$.

Ejemplo 9.2.6 *(Cálculo de integrales impropias: Tipo III)*
Calcular

$$\int_0^{\infty} \frac{sen(x)}{x(\pi^2-x^2)}dx.$$

Resolución: Como en el ejemplo anterior

$$\int_0^\infty \frac{sen(x)}{x(\pi^2 - x^2)}dx = \frac{1}{2}Im(\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ix}}{x(\pi^2 - x^2)}dx).$$

Consideremos

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z(\pi^2 - z^2)}$$

que tiene los siguientes polos simples $P_f = \{0, \pi, -\pi\}$.

Consideremos el camino

$$\begin{aligned} \gamma_n &= [-n, -\pi - \frac{1}{n}] \cup S(-\pi, \frac{1}{n}) \cup [-\pi + \frac{1}{n}, -\frac{1}{n}] \\ &\cup S(0, \frac{1}{n}) \cup [\frac{1}{n}, \pi - \frac{1}{n}] \\ &\cup S(-\pi, \frac{1}{n}) \cup [\pi + \frac{1}{n}, n] \cup [n, n + in] \\ &\cup [n + in, -n + in] \cup [-n + in, -n], \end{aligned}$$

donde $S(a, r) = -\{a + re^{it} : t \in [0, 2\pi]\}$.

Observar que con esta elección del camino $\int_{\gamma_n} f(z)dz = 0$.

Utilizando el Corolario 9.1.5 tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \int_{S(-\pi,\frac{1}{n})} f(z)dz = -i\pi Res(f, -\pi) = i\pi\frac{e^{-i\pi}}{2\pi^2} = \frac{-i}{2\pi}.$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{S(\pi,\frac{1}{n})} f(z)dz = -i\pi Res(f, \pi) = i\pi\frac{e^{i\pi}}{2\pi^2} = \frac{-i}{2\pi}.$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{S(0,\frac{1}{n})} f(z)dz = -i\pi Res(f, 0) = \frac{-i}{\pi}.$$

Por otro lado

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\gamma_n} f(z)dz - \int_{[n,n+in]\cup[n+in,-n+in]\cup[-n+in,-n]} f(z)dz = \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ix}}{x(\pi^2 - x^2)}dx - \frac{2i}{\pi}.$$

Calculemos además

$$\int_{[n,n+in]\cup[n+in,-n+in]\cup[-n+in,-n]} f(z)dz = \int_0^n \frac{e^{-t+in}}{(n + it)(\pi^2 - (n + it)^2)}idt$$

$$- \int_{-n}^{n} \frac{e^{it-n}}{(in+t)(\pi^2-(t+in)^2)}dt$$
$$- \int_{0}^{n} \frac{e^{-t-in}}{(-n+it)(\pi^2-(-n+it)^2)}idt.$$

De nuevo, argumentando como en el ejemplo 2, puede verse que en el límite son todos cero, por medio de estimaciones directas, ya que

$$|\int_0^n \frac{e^{-t+in}}{(n+it)(\pi^2-(n+it)^2)}idt| \leq \frac{n}{n(n^2-\pi^2)}.$$

$$|\int_{-n}^n \frac{e^{it-n}}{(in+t)(\pi^2-(t+in)^2)}dt| \leq \frac{2ne^{-n}}{n(n^2-\pi^2)}.$$

$$|\int_0^n \frac{e^{-t-in}}{(-n+it)(\pi^2-(-n+it)^2)}idt| \leq \frac{n}{n(n^2-\pi^2)}.$$

Finalmente, combinando lo anterior, se tiene

$$\int_0^\infty \frac{sen(x)}{x(\pi^2-x^2)}dx = \frac{1}{\pi}.$$

■

Nota 9.2.3 *El camino anterior se toma para modelos*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} R(senx, cosx)dx$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios con $grado(Q) - grado(P) \geq 1$ y $\mathcal{Z}_Q \cap \mathbb{R} \neq \varnothing$ pero la integral impropia es convergente!.

Ejemplo 9.2.7 *(Cálculo de integrales impropias usando ramas del Logarítmo) Sea $-1 < \alpha < 1, \alpha \neq 0$. Calcular*

$$\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{x^2+x+1}dx.$$

Resolución: Observemos que es una integral impropia convergente pues

$$\frac{x^\alpha}{x^2+x+1} \approx \frac{1}{x^{2-\alpha}}, x \to \infty,$$

$$\frac{x^\alpha}{x^2+x+1} \approx x^\alpha, x \to 0.$$

Por tanto

$$\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{x^2+x+1}dx = \lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{n}}^n \frac{x^\alpha}{x^2+x+1}dx.$$

Estudiamos primero los ceros del denominador:

$$x^2+x+1=0 \Longleftrightarrow x_0 = -1/2+\sqrt{3}/2i, x_1 = -1/2-\sqrt{3}/2i.$$

Sea $S_n^1 = \{ne^{it} : t \in [0, \frac{3\pi}{2}]\}$ y $S_n^2 = -\{\frac{1}{n}e^{it} : t \in [0, \frac{3\pi}{2}]\}$, pongamos

$$\gamma_n = S_n^1 \cup [-in, -\frac{1}{n}i] \cup S_n^2 \cup [\frac{1}{n}, n].$$

(El camino elegido no debe de contener singularidades e incluir el intervalo de integración).

Consideremos

$$f(z) = \frac{e^{\alpha Log_{\frac{-\pi}{4}}(z)}}{z^2+z+1}.$$

(La función ha de ser holomorfa en un abierto que contenga el camino elegido.)

Observar que los polos de f están el interior del dominio limitado por la curva y son $z_0 = \frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, z_1 = \frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$, siendo

$$Res(f, \frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i) = \frac{e^{\alpha Log_{\frac{-\pi}{4}}(\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)}}{\sqrt{3}i}.$$

$$Res(f, \frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i) = -\frac{e^{\alpha Log_{\frac{-\pi}{4}}(\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)}}{\sqrt{3}i}.$$

Usando el teorema de los residuos

$$\int_{\gamma_n} f(z)dz = 2\pi i\Big(\frac{e^{\alpha Log_{\frac{-\pi}{4}}(\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)}}{\sqrt{3}i} - \frac{e^{\alpha Log_{\frac{-\pi}{4}}(\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)}}{\sqrt{3}i}\Big).$$

Observar que

$$Log_{\frac{-\pi}{4}}(\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i) = (2\pi/3)i, \quad Log_{\frac{-\pi}{4}}(\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i) = (2\pi/3)i$$

y por tanto

$$\int_{\gamma_n} f(z)dz = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}(e^{\frac{2\alpha\pi}{3}i} - e^{\frac{4\alpha\pi}{3}i}) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}e^{\alpha\pi i}(e^{\frac{-\alpha\pi}{3}i} - e^{\frac{\alpha\pi}{3}i}) = -\frac{4\pi}{\sqrt{3}}ie^{\alpha\pi i}\sin(\frac{\alpha\pi}{3}).$$

Por otro lado,

$$\int_{\gamma_n} f(z)dz = \int_{S_n^1\cup[-in,-\frac{1}{n}i]\cup S_n^2\cup[\frac{1}{n},n]} f(z)dz.$$

Ahora bien, usando $-1 < \alpha < 1$,

$$|\int_{S_n^1} f(z)dz| \leq \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \frac{n^\alpha n dt}{n^2 - n - 1} \leq Cn^{\alpha-1} \to 0(n \to \infty).$$

$$|\int_{S_n^2} f(z)dz| \leq \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\frac{1}{n^\alpha}\frac{1}{n}dt}{1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}} \leq Cn^{-(\alpha+1)} \to 0(n \to \infty).$$

Para el cálculo de $\int_{[-in,-\frac{1}{n}i]} f(z)dz$ consideraremos otra función g que coincida con f en el eje real y de manera que el valor de $\int_{[-in,-\frac{1}{n}i]} f(z)dz = C_\alpha \int_{[-in,-\frac{1}{n}i]} g(z)dz$.

Esto se consigue tomando otra determinación del logaritmo, por ejemplo la rama principal y el recinto complementario. Es decir,

$$g(z) = \frac{e^{\alpha Logz}}{z^2 + z + 1}.$$

Sea $S_n^3 = (-\{ne^{it} : t \in [\frac{-\pi}{2}, 0]\})$, $S_n^4 = \{\frac{1}{n}e^{it} : t \in [\frac{-\pi}{2}, 0]\})$, pongamos

$$\gamma_n' = S_n^3 \cup [-in, -\frac{1}{n}i] \cup S_n^4 \cup [\frac{1}{n}, n].$$

Por tanto, como la singularidades quedan fuera del recinto, usando el teorema de los residuos se tiene

$$0 = \int_{\gamma_n'} g(z)dz = (\int_{S_n^3} + \int_{[-in,-\frac{1}{n}i]} + \int_{S_n^4} + \int_{[\frac{1}{n},n]})g(z)dz.$$

Observese que $g(z) = f(z)$ para $z \in \mathbb{R}$.

Por otro lado para $z \in [-in, -\frac{1}{n}i]$ se tiene $Log_{\frac{-\pi}{4}}z = log|z| + i\frac{3\pi}{2}$ y $Logz = log|z| - i\frac{\pi}{2}$, luego

$$g(z) = \frac{|z|^\alpha e^{i\alpha\frac{-\pi}{2}}}{z^2 + z + 1} = e^{-2\pi\alpha i}\frac{|z|^\alpha e^{i\alpha\frac{3\pi}{2}}}{z^2 + z + 1} = e^{-2\pi\alpha i}f(z)$$

De aqui que

$$\int_{[-in,-i\frac{1}{n}]} f(z)dz = e^{2\pi\alpha i}\int_{[-in,-i\frac{1}{n}]} g(z)dz.$$

Como

$$\int_{[-in,-i\frac{1}{n}]} g(z)dz = -\int_{S_n^3\cup S_n^4} g(z)dz - \int_{[\frac{1}{n},n]} f(z)dz,$$

se concluye que

$$\int_{[-in,-i\frac{1}{n}]} f(z)dz = -e^{2\pi\alpha i}\int_{S_n^3\cup S_n^4} g(z)dz - e^{2\pi\alpha i}\int_{[\frac{1}{n},n]} f(z)dz.$$

Como en el argumento anterior se tiene que

$$\lim_{n\to infty}\int_{S_n^3\cup S_n^4} g(z)dz = 0.$$

Ahora despejando del paso previo, pasando la límite, tenemos

$$(1-e^{2\pi\alpha i})\int_0^\infty f(x)dx = -\frac{4\pi}{\sqrt{3}} ie^{\alpha\pi i}\sin(\frac{\alpha\pi}{3}).$$

De donde, como $\alpha \neq 0$ se tiene

$$\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{x^2+x+1}dx = -\frac{4\pi i}{\sqrt{3}}\frac{e^{\alpha\pi i}}{1-e^{2\pi\alpha i}}\sin(\frac{\alpha\pi}{3}) = \frac{4\pi i}{\sqrt{3}}\frac{\sin(\frac{\alpha\pi}{3})}{e^{\pi\alpha i}-e^{-\pi\alpha i}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\frac{\sin(\frac{\alpha\pi}{3})}{\sin(\alpha\pi)}.$$

■

Ejemplo 9.2.8 *(Aplicación de cambio de variable, evitando las ramas del logarítmo.)*

Calcular

$$\int_0^\infty \frac{logx}{(1+x^2)^2}dx.$$

Resolución: El primer paso es hacer un cambio de variable que evita el uso del logaritmo.

$$\int_0^\infty \frac{logx}{(1+x^2)^2}dx = \int_{-\infty}^\infty \frac{te^t}{(1+e^{2t})^2}dt.$$

Como la integral impropia es convergente se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{te^t}{(1+e^{2t})^2}dt = \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} \frac{te^t}{(1+e^{2t})^2}dt.$$

Consideremos la función

$$f(z) = \frac{ze^z}{(1+e^{2z})^2}.$$

Debido a la periodicidad de la exponencial un posible camino de integración es el siguiente $\gamma_n = [-n,n] \cup [n, n+i\pi] \cup [n+i\pi, -n+i\pi] \cup [-n+i\pi, -n]$.

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_n} f(z)dz &= \int_{[n,n+i\pi]} \frac{ze^z}{(1+e^{2z})^2}dz \\
&+ \int_{[n+i\pi,-n+i\pi]} \frac{ze^z}{(1+e^{2z})^2}dz \\
&+ \int_{[-n+i\pi,-n]} \frac{ze^z}{(1+e^{2z})^2}dz \\
&+ \int_{-n}^{n} \frac{te^t}{(1+e^{2t})^2}dt.
\end{aligned}$$

Observemos que

$$\begin{aligned}
\int_{[n+i\pi,-n+i\pi]} \frac{ze^z}{(1+e^{2z})^2}dz &= -\int_{-n}^{n} \frac{(t+i\pi)e^{t+i\pi}}{(e^{i2\pi+2t}+1)^2}dt \\
&= +\int_{-n}^{n} \frac{te^t}{(e^{2t}+1)^2}dt + i\pi \int_{-n}^{n} \frac{e^t}{(e^{2t}+1)^2}dt.
\end{aligned}$$

Notar que $P_f = \{\frac{(2k+1)\pi i}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$ y usando el Teorema de los residuos,

$$\int_{\gamma_n} f(z)dz = 2\pi i Res(f, \frac{\pi}{2}i).$$

Luego concluimos que

$$\begin{aligned}
2\pi i Res(f, \frac{\pi}{2}i) &= \int_{[n,n+i\pi]} \frac{ze^z}{(1+e^{2z})^2}dz \\
&+ \int_{[-n+i\pi,-n]} \frac{ze^z}{(1+e^{2z})^2}dz
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \quad 2\int_{-n}^{n} \frac{te^t}{(1+e^{2t})^2}dt \\ &+ \quad i\pi\int_{-n}^{n} \frac{e^t}{(e^{2t}+1)^2}dt. \end{aligned}$$

Ahora bien, por un lado,

$$\int_{[n,n+i\pi]} \frac{ze^z}{(1+e^{2z})^2}dz = \int_0^\pi \frac{(n+it)e^{n+it}}{(e^{2n+2it}+1)^2}idt.$$

Es decir,

$$|\int_{[n,n+i\pi]} \frac{ze^z}{(1+e^{2z})^2}dz| \leq \pi\frac{(n+\pi)e^n}{(e^{2n}-1)^2} \to 0(n\to\infty).$$

Por otro lado

$$\int_{[-n+i\pi,-n]} \frac{ze^z}{(1+e^{2z})^2}dz = -\int_0^\pi \frac{(-n+it)e^{-n+it}}{(e^{-2n+2it}+1)^2}idt.$$

Es decir,

$$|\int_{[-n+i\pi,-n]} \frac{ze^z}{(1+e^{2z})^2}dz| \leq \pi\frac{(n+\pi)e^{-n}}{(1-e^{-2n})^2} \to 0(n\to\infty).$$

Combinando lo anterior

$$\begin{aligned} 2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{te^t}{(1+e^{2t})^2}dt &= 2\pi i Res(f,\frac{\pi}{2}i) \\ &- i\pi\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^t}{(e^{2t}+1)^2}dt \end{aligned}$$

Combinando todos los hechos anteriores se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{te^t}{(1+e^{2t})^2}dt = -\pi Im(Res(f,\frac{\pi}{2}i)).$$

Además se concluye también que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^t}{(e^{2t}+1)^2}dt = \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^2} = 2Re(Res(f,\frac{\pi}{2}i)).$$

El resultado final se consigue calculando el $Res(f,\frac{\pi}{2}i)$ siendo $\frac{\pi}{2}i$ un polo doble. ∎

Para el cálculo de sumas de series necesitamos los siguientes lemas.

Lema 9.2.1 *Sea* $\gamma_n = \partial Q_n$ *donde* $Q_n = co(\{z_i : i = 1, ..., 4\})$ *con* $z_1 = (1+i)(n+\frac{1}{2}), z_2 = (1-i)(n+\frac{1}{2}), z_3 = (-1+i)(n+\frac{1}{2})$ *y* $z_4 = (-1-i)(n+\frac{1}{2})$. *Existe* n_0 *tal que*

$$|cotag\pi z| \leq 2 \ \forall z \in \gamma_n, \forall n \geq n_0.$$

Demostración Observar que

$$|cos(\pi z)|^2 = cos^2(\pi x) + sh^2(\pi y),$$

$$|sen(\pi z)|^2 = sen^2(\pi x) + sh^2(\pi y).$$

Considerando los lados horizontales

$$z \in [n+\frac{1}{2}+i(n+\frac{1}{2}), -n-\frac{1}{2}+i(n+\frac{1}{2})] \cup [-n-\frac{1}{2}-i(n+\frac{1}{2}), n+\frac{1}{2}-i(n+\frac{1}{2})],$$

entonces $z = t \pm (n+\frac{1}{2})i, t \in [-(n+\frac{1}{2}), (n+\frac{1}{2})]$. Entonces

$$|cotag(\pi z)|^2 \leq \frac{1 + sh^2(\pi(n+\frac{1}{2}))}{sh^2(\pi(n+\frac{1}{2}))} \leq 1 + \frac{1}{sh^2(\pi(n+\frac{1}{2}))}.$$

Por tanto existe n_0 tal que $\frac{1}{sh^2(\pi(n+\frac{1}{2}))} \leq 1, n \geq n_0$.

Considerando, ahora los lados verticales

$$z \in [-n-\frac{1}{2}+i(n+\frac{1}{2}), -n-\frac{1}{2}-i(n+\frac{1}{2})] \cup [n+\frac{1}{2}-i(n+\frac{1}{2}), n+\frac{1}{2}+i(n+\frac{1}{2})]$$

entonces $z = it \pm (n+\frac{1}{2}), t \in [-(n+\frac{1}{2}), (n+\frac{1}{2})]$. Entonces

$$|cotag(\pi z)|^2 \leq \frac{cos^2(\pi(n+\frac{1}{2})) + sh^2(\pi t)}{sen^2(\pi(n+\frac{1}{2})) + sh^2(\pi t)} = \frac{sh^2(\pi t)}{1 + sh^2(\pi t)} \leq 1.$$

■

Ejemplo 9.2.9 *(Suma de series)*

Calcular

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Resolución: La idea básica consiste en encontrar una función con polos en $\mathbb{N}$ y de modo que los residuos en los mismos sean $\frac{1}{n^2}$.

Esto se consigue con

$$f(z) = \frac{cotag(\pi z)}{z^2}.$$

Observemos que $P_f = \mathbb{Z}$, y tenemos $o(f,k) = 1, k \neq 0$ y $o(f,0) = 3$.

Además si $k \neq 0$

$$Res(f,k) = \lim_{z\to k} \frac{(z-k)cos\pi z}{z^2 sen\pi z} = \frac{1}{\pi k^2}.$$

$$Res(f,0) = \lim_{z\to 0} \frac{1}{2}(zcotag(\pi z))'' = A.$$

Consideremos el camino

$$\begin{aligned}
\gamma_n &= [n+\frac{1}{2}+i(n+\frac{1}{2}), -n-\frac{1}{2}+i(n+\frac{1}{2})] \\
&\quad \cup[-n-\frac{1}{2}+i(n+\frac{1}{2}), -n-\frac{1}{2}-i(n+\frac{1}{2})] \\
&\quad \cup[-n-\frac{1}{2}-i(n+\frac{1}{2}), n+\frac{1}{2}-i(n+\frac{1}{2})] \\
&\quad \cup[n+\frac{1}{2}-i(n+\frac{1}{2}), n+\frac{1}{2}+i(n+\frac{1}{2})].
\end{aligned}$$

Por tanto

$$\int_{\gamma_n} f(z)dz = 2\pi i(\sum_{k=-n}^{-1} + \sum_{k=1}^{n})Res(f,k) + 2\pi i Res(f,0).$$

De donde

$$4i\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = \int_{\gamma_n} f(z) - 2\pi i Res(f,0).$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{1}{4i}\lim_{n\to\infty}\int_{\gamma_n} f(z) - \frac{\pi}{2}Res(f,0).$$

Utilizando el Lema 9.2.1 se tiene

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\gamma_n} f(z) = 0,$$

pues

$$|\int_{\gamma_n} f(z)dz| \leq 2\frac{long(\gamma_n)}{n^2}.$$

Para el cálculo de $Res(f,0)$ denotemos $zcotag(\pi z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{2n}$ y calculemos b_1.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n}}{(2n)!} z^{2n+1} = (\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n+1}}{(2n+1)!} z^{2n+1})(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{2n})$$

Identificando coeficientes se obtiene $b_1 = \frac{-\pi}{3}$. De aqui se concluye que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

■

Para el estudio de series alternadas es de utilidad el siguiente resultado:

Lema 9.2.2 *Sea $\gamma_n = \partial Q_n$ donde $Q_n = co(\{z_i : i = 1,...,4\})$ con $z_1 = (1+i)(n+\frac{1}{2}), z_2 = (1-i)(n+\frac{1}{2}), z_3 = (-1+i)(n+\frac{1}{2})$ y $z_4 = (-1-i)(n+\frac{1}{2})$. Existe n_0 tal que*

$$|cosec\pi z| \leq 1 \ \forall z \in \gamma_n, \forall n \geq n_0.$$

Demostración Observar que

$$|sen(\pi z)|^2 = sen^2(\pi x) + sh^2(\pi y).$$

Considerando el caso

$$z \in [n+\frac{1}{2}+i(n+\frac{1}{2}), -n-\frac{1}{2}+i(n+\frac{1}{2})] \cup [-n-\frac{1}{2}-i(n+\frac{1}{2}), n+\frac{1}{2}-i(n+\frac{1}{2})],$$

entonces $z = t \pm (n+\frac{1}{2})i, t \in [-(n+\frac{1}{2}), (n+\frac{1}{2})]$. Entonces existe n_0 tal que si $n \geq n_0$ se tiene que

$$|cosec(\pi z)|^2 \leq \frac{1}{sh^2(\pi(n+\frac{1}{2}))} \leq 1.$$

Considerando, ahora el caso

$$z \in [-n-\frac{1}{2}+i(n+\frac{1}{2}), -n-\frac{1}{2}-i(n+\frac{1}{2})] \cup [n+\frac{1}{2}-i(n+\frac{1}{2}), n+\frac{1}{2}+i(n+\frac{1}{2})]$$

entonces $z = it \pm (n+\frac{1}{2}), t \in [-(n+\frac{1}{2}), (n+\frac{1}{2})]$. Entonces

$$|cosec(\pi z)|^2 = \frac{1}{1+sh^2(\pi t)} \leq 1.$$

∎

Ejemplo 9.2.10 *(Series alternadas)*
Calcular

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

Resolución: La idea básica, de nuevo, consiste en encontrar una función con polos en $\mathbb{N}$ y de modo que los residuos en los mismos sean $\frac{(-1)^n}{n^2}$.

Esto se consigue con

$$f(z) = \frac{cosec(\pi z)}{z^2}.$$

Observemos que $P_f = \mathbb{Z}$, y tenemos $o(f,k) = 1, k \neq 0$ y $o(f,0) = 3$.

Además si $k \neq 0$

$$Res(f,k) = \lim_{z\to k} \frac{(z-k)}{z^2 sen\pi z} = \frac{1}{k^2\pi cos(\pi k)} = \frac{(-1)^k}{\pi k^2}.$$

$$Res(f,0) = \lim_{z\to 0} \frac{1}{2}(zcosec(\pi z))'' = A.$$

Consideremos el camino

$$\begin{aligned} \gamma_n &= [n+\frac{1}{2}+i(n+\frac{1}{2}), -n-\frac{1}{2}+i(n+\frac{1}{2})] \\ &\cup[-n-\frac{1}{2}+i(n+\frac{1}{2}), -n-\frac{1}{2}-i(n+\frac{1}{2})] \\ &\cup[-n-\frac{1}{2}-i(n+\frac{1}{2}), n+\frac{1}{2}-i(n+\frac{1}{2})] \\ &\cup[n+\frac{1}{2}-i(n+\frac{1}{2}), n+\frac{1}{2}+i(n+\frac{1}{2})]. \end{aligned}$$

Por tanto

$$\int_{\gamma_n} f(z)dz = 2\pi i(\sum_{k=-n}^{-1} + \sum_{k=1}^{n})Res(f,k) + 2\pi i Res(f,0).$$

De donde

$$4i\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k^2} = \int_{\gamma_n} f(z) - 2\pi i Res(f,0).$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2} = \frac{1}{4i}\lim_{n\to\infty}\int_{\gamma_n} f(z) - \frac{\pi}{2}Res(f,0).$$

Utilizando ahora el Lema 9.2.2 se tiene

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\gamma_n} f(z) = 0,$$

pues

$$|\int_{\gamma_n} f(z)dz| \leq \frac{long(\gamma_n)}{n^2}.$$

Para el cálculo de $Res(f,0)$ denotemos $zcosec(\pi z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{2n}$ y calculemos b_1.

$$z = (\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\pi^{2n+1}}{(2n+1)!}z^{2n+1})(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{2n}).$$

Identificando coeficientes se obtiene $b_1 = \frac{\pi}{6}$. De aqui se concluye que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{-\pi^2}{12}.$$

∎

9.3 Consecuencias del Teorema de los residuos.

La primera de las aplicaciones es el conocido como Principio del Argumento, que entre otras cosas permite calcular el número de ceros y el de polos dentro de recintos.

Teorema 9.3.1 *(Principio del argumento) Sea* $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ *y supongamos que* $\mathcal{P}_f(\Omega) = \{p_1, p_2, ..., p_m\}$ *y* $\mathcal{Z}_f(\Omega) = \{z_1, z_2, ..., z_m\}$ *siendo* $m_k = o(f, p_k)$ *y* $n_k = m(f, z_k)$.

Sea $\gamma \subset \Omega$ *un ciclo tal que* $\gamma \sim 0(resp.\Omega)$ *y* $\gamma^* \cap (\mathcal{Z}_f(\Omega) \cup \mathcal{P}_f(\Omega)) = \varnothing$.

Entonces

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{k=1}^{n} n_k Ind_\gamma(z_k) - \sum_{k=1}^{m} m_k Ind_\gamma(p_k).$$

Demostración:

Sea $a \in \mathcal{Z}_f(\Omega)$ con $m(f,a) = k$.

Si $f(z) = (z-a)^k g(z)$, para $g \in \mathcal{H}(D(a,r))$ y $g(z) \neq 0$ entonces

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)},$$

Por tanto $\frac{g'}{g} \in \mathcal{H}(D(a,r))$ y $a \in \mathcal{P}_{\frac{f'}{f}}, o(\frac{f'}{f}, a) = 1$ y $Res(\frac{f'}{f}, a) = k$.

Sea $b \in \mathcal{P}_f(\Omega)$ con $o(f,b) = k$.

Si $f(z) = \frac{g(z)}{(z-b)^k}$, para $g \in \mathcal{H}(D(b,r))$ y $g(z) \neq 0$ entonces

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-k}{z-b} + \frac{g'(z)}{g(z)},$$

Por tanto $\frac{g'}{g} \in \mathcal{H}(D(b,r))$ y $b \in P_{\frac{f'}{f}}, o(\frac{f'}{f}, b) = 1$ y $Res(\frac{f'}{f}, b) = -k$.

La consecuencia de este argumento es que si $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ entonces $\frac{f'}{f} \in \mathcal{M}(\Omega)$ y $\mathcal{P}_{\frac{f'}{f}} = Z_f \cup P_f$ y son todos simples.

Usando el teorema de los residuos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz &= \sum_{a\in\mathcal{Z}_f(\Omega)\cup\mathcal{P}_f(\Omega)} Ind_\gamma(a) Res(\frac{f'}{f}, a)\\ &= \sum_{a\in\mathcal{Z}_f(\Omega)} Ind_\gamma(a) m(f,a) - \sum_{b\in\mathcal{P}_f(\Omega)} Ind_\gamma(b) o(f,b).\end{aligned}$$

■

Siguiendo las mismas ideas puede obtenerse la siguiente generalización inmediata.

Teorema 9.3.2 *(Principio del argumento generalizado) Sean $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ y supongamos que $\mathcal{P}_f(\Omega) = \{p_1, p_2, ..., p_m\}$ y $\mathcal{Z}_f(\Omega) = \{z_1, z_2, ..., z_m\}$ siendo $m_k = o(f, p_k)$ y $n_k = m(f, z_k)$.*

Sea $\gamma \subset \Omega$ un ciclo tal que $\gamma \sim 0(resp.\Omega)$ y $\gamma^* \cap \mathcal{Z}_f(\Omega) \cup \mathcal{P}_f(\Omega) = \varnothing$.

Entonces

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma g(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{k=1}^{n} n_k g(z_k) Ind_\gamma(z_k) - \sum_{k=1}^{m} m_k g(p_k) Ind_\gamma(p_k).$$

Nota 9.3.1 *Supongamos que $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ con Ω simplemente conexo y γ es una curva cerrada simple orientada positivamente que no contiene ceros de la función. Denotemos $N_0(f,A)$ el número de ceros de f en A (contados con sus multiplicidades). Entonces*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = N_0(f, Int(\gamma)).$$

Recordemos del Capítulo VII que $\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz$ tiene una interpretación en términos del argumento continuo sobre la curva. Concretamente tenemos el siguiente resultado:

Proposición 9.3.3 *Sea $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un camino, $\gamma^* \subset \Omega$ y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es holomorfa verificando*

i) $f(z) \neq 0 \ \forall\, z \in \gamma^*$
ii) $f(\gamma(a)) = f(\gamma(b))$. Entonces

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\ dz = \frac{\theta(b)-\theta(a)}{2\pi}$$

donde $\theta(t)$ es un argumento contínuo sobre $f(\gamma)$.

Demostración: Notar que $\sigma(t) = f(\gamma(t))$ es una curva cerrada y si $\theta(t)$ es un argumento contínuo sobre $f(\gamma)$ entonces, usando (ii) en la Proposición 7.1.4, se tiene que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\ dz = Ind_\sigma(0) = \frac{\theta(1)-\theta(0)}{2\pi}.$$

■

Nota 9.3.2 *Supongamos que $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ con Ω simplemente conexo y γ es una curva cerrada simple orientada positivamente que no contiene ni polos ni ceros. Denotemos $N_0(f,A)$ el número de ceros de f en A (contados con sus multiplicidades) y $N_p(f,A)$ el número de polos de f en A (contados con sus órdenes). Entonces*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = N_0(f, Int(\Omega)) - N_p(f, Int(\Omega)) = \frac{\theta(1)-\theta(0)}{2\pi}$$

donde $\theta(t)$ es una determinación contínua del argumento sobre la curva $f(\gamma)$.

Ejemplo 9.3.1 *Cálculo del número de ceros del polinomio*

$$p(z) = z^8 + 3z^3 + 7z + 5$$

en el primer cuadrante.

Demostración: Dado $R > 0$, consideremos la curva cerrada

$$\gamma_R = [0, R] \cup \{Re^{it} : t \in [0, \frac{\pi}{2}]\} \cup [iR, 0].$$

Si $N_R = N_0(p, Int(\gamma_R))$ tenemos que

$$2\pi i N_R = \int_{[0,R]} \frac{p'(z)}{p(z)} dz + \int_{\sigma_R} \frac{p'(z)}{p(z)} dz + \int_{[iR,0]} \frac{p'(z)}{p(z)} dz.$$

Observar que
$P(t) = t^8 + 3t^3 + 7t + 5 > 0$ si $t > 0$,
$P(it) = t^8 - 3it^3 + 7ti + 5 = (t^8 + 5) + i(-3t^3 + 7t)$ si $t > 0$.
Así que $Re(P(z)) > 0$ si $[iR, 0] \cup [0, R]$, y por tanto $Arg(P(z))$ es continua en dicho conjunto.
De aquí que

$$\int_{[iR,0]\cup[0,R]} \frac{p'(z)}{p(z)} dz = log \frac{|P(R)|}{|P(iR)|} + i(Arg(P(R)) - arctag \frac{-R^3 + 7R}{R^8 + 5}).$$

Para tratar $z = Re^{it}, t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ tenemos

$$P(z) = z^8(1 + \frac{3}{z^5} + \frac{7}{z^7} + \frac{1}{z^8}) = z^8 q(z).$$

$$P(Re^{it}) = R^8 e^{8it}(1 + 3R^{-5}e^{-5it} + 7R^{-7}e^{-7it} + 5R^{-8}e^{-8it}),$$

ahora bien si R es sufientemente grande

$$q(Re^{it}) = Q_R(t) = 1 + 3R^{-5}e^{-5it} + 7R^{-7}e^{-7it} + 5R^{-8}e^{-8it}$$

está próximo a 1 y por tanto $ArgQ_R(t)$ está próximo a 0.

Por tanto si $z \in \sigma_R$, $8Arg(z) + Arg(q(z))$ es un argumento continuo de $P(z)$ sobre σ_R para R grande y $8Log(z) + Log(q(z))$ es un logaritmo continuo de $P(z)$ sobre σ_R.

Por eso,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_R}\frac{p'(z)}{p(z)}dz &= \frac{1}{2\pi}(8Arg(Re^{is})+Arg(q(iR))-8Arg(R)-Arg(q(R)))\\ &+ \frac{1}{2\pi i}log\frac{|q(iR)|}{|q(R)|}.\end{aligned}$$

Por consiguiente, usando que $log\frac{|P(R)|}{|P(iR)|}+log\frac{|q(iR)|}{|q(R)|}=0$, se tiene

$$N_R = 2+\frac{1}{2\pi}(Arg(q(iR))-Arg(q(R)))-\frac{1}{2\pi}arctag\frac{-R^3+7R}{R^8+5}.$$

Ahora pasando al límite cuando $R\to\infty$ se obtiene $N_0(f,\Omega)=2$. ∎

Ejemplo 9.3.2 *Cálculo del número de ceros del polinomio*

$$p(z)=z^5+z^4+2z^3-8z-1$$

en el semiplano $\{Re(z)>0\}$.

Demostración: Dado $R>0$, consideremos la curva cerrada

$$\gamma_R=[iR,-iR]\cup\{Re^{it}:t\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\}.$$

Si $N_R=N_0(p,Int(\gamma_R))$ tenemos que

$$N_R=\int_{[iR,-iR]}\frac{p'(z)}{p(z)}dz+\int_{\sigma_R}\frac{p'(z)}{p(z)}dz.$$

Para tratar $z=Re^{it}, t\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ tenemos

$$P(Re^{it})=R^5e^{5it}(1+R^{-1}e^{-it}+2R^{-2}e^{-2it}-8R^{-4}e^{-4it}-R^{-5}e^{-5it}),$$

ahora bien si R es sufientemente grande

$$q(Re^{it})=Q_R(t)=1+R^{-1}e^{-it}+2R^{-2}e^{-2it}-8R^{-4}e^{-4it}-R^{-5}e^{-5it}$$

está próximo a 1 y por tanto $ArgQ_R(t)$ está próximo a 0. Por tanto si $z=Re^{it}:t\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, $5Arg(z)+Arg(q(z))\in arg(P(z))$ es un argumento continuo de $P(z)$ sobre la semicircunferencia para R grande. Usando el logaritmo correspondiente se tiene

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_R}\frac{p'(z)}{p(z)}dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi}(5Arg(iR)+Arg(q(iR))-5Arg(-iR)-Arg(q(-iR)))+\frac{1}{2\pi i}\log\frac{|q(iR)|}{|q(-iR)|}$$

$$= \frac{5}{2}+\phi(R)+\frac{1}{2\pi i}\log\frac{|q(iR)|}{|q(-iR)|}.$$

Por otro lado en el segmento se observa que
$p(it) = t^4 - 1 + i(t^5 - 2t^3 - 8t) = u(t) + iv(t)$ si $-R \leq t \leq R$.
$u(t) = (t-1)(t+1)(t^2+1)$,
$v(t) = t(t-2)(t+2)(t^2+2)$.

Analizando el comportamiento de la curva cuando variamos de $t \in [-R, R]$ se tiene

$$u(t) > 0, v(t) < 0, t < -2$$

$$u(t) > 0, v(t) > 0, -2 < t < -1$$

$$u(t) < 0, v(t) > 0, -1 < t < 0$$

$$u(t) < 0, v(t) < 0, 0 < t < 1$$

$$u(t) > 0, v(t) < 0, 1 < t < 2$$

$$u(t) > 0, v(t) > 0, t > 2$$

Por ésto la curva da una vuelta al origen y está orientada en sentido negativo. De aquí que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{[iR,-iR]}\frac{p'(z)}{p(z)}dz$$

$$= -1+\frac{1}{2\pi}(arctag\frac{v(-R)}{u(-R)} - arctag\frac{v(R)}{u(R)})+\frac{1}{2\pi i}\log\frac{|p(-iR)|}{|p(iR)|}.$$

Por consiguiente

$$N_R = \frac{5}{2}+\phi(R)-1-\frac{1}{2\pi}arctag\frac{R^5-2R^3-8R}{R^4-1}+\frac{1}{2\pi}arctag\frac{-R^5+2R^3+8R}{R^4-1}.$$

Ahora pasando al límite cuando $R \to \infty$ se obtiene $N_0(f,\Omega) = 1$. ■

Teorema 9.3.4 *(Teorema de Rouche) Sean* $g, f \in \mathcal{M}(\Omega)$ *y supongamos que* $\mathcal{P}_f(\Omega) = \{p_1, p_2, ..., p_m\}$, $\mathcal{Z}_f(\Omega) = \{z_1, z_2, ..., z_n\}$, $\mathcal{P}_g(\Omega) = \{p'_1, p'_2, ..., p'_{m'}\}$ *y* $\mathcal{Z}_g(\Omega) = \{z'_1, z'_2, ..., z'_{n'}\}$ *siendo* $m_k = o(f, p_k)$, $n_k = m(f, z_k)$ $m'_k = o(g, p'_k)$ *y* $n'_k = m(g, z'_k)$.

Sea $\gamma \subset \Omega$ *un ciclo tal que* $\gamma \sim 0(resp.\Omega)$.

Supongamos que

$$|f(z) + g(z)| < |f(z)| + |g(z)| \qquad \forall z \in \gamma^*,$$

entonces

$$\sum_{k=1}^{n} n_k Ind_\gamma(z_k) - \sum_{k=1}^{m} m_k Ind_\gamma(p_k) = \sum_{k=1}^{n'} n'_k Ind_\gamma(z'_k) - \sum_{k=1}^{m} m'_k Ind_\gamma(p'_k).$$

En particular, si $g, f \in \mathcal{H}(\Omega)$ *y* $\bar{D}(a, R) \subset \Omega$ *y se cumple que*

$$|f(z) - g(z)| < |g(z)| \qquad \forall |z - a| = R.$$

Entonces

$$N_0(f, D(a, R)) = N_0(g, D(a, R)).$$

Demostración: La condición impuesta implica $\gamma^* \cap (\mathcal{Z}_f(\Omega) \cup \mathcal{P}_f(\Omega) \cup \mathcal{Z}_g(\Omega) \cup \mathcal{P}_g(\Omega)) = \varnothing$.

Es claro que no hay polos pues las funciones están determinadas en la curva γ^* y es inmediato que no hay ceros ni de f ni de g en γ^*, pues caso de que un cero de g estuviera en la curva se tendría $|f(z)| < |f(z)|$ y análogamente para los ceros de f.

Tomar entonces Ω_1 un abierto que contiene a γ^* de manera que f, g ni se anula ni tiene polos en él y definamos

$$\Omega_2 = \{z \in \Omega_1 : |f(z) + g(z)| < |f(z)| + |g(z)|\}.$$

Es inmediato observar que Ω_2 es un abierto y que $\gamma^* \subset \Omega_2$. En dicho abierto se tiene que

$$|1 + \frac{f(z)}{g(z)}| < |\frac{f(z)}{g(z)}| + 1.$$

Por tanto si $z \in \Omega_2$ entonces $\frac{f(z)}{g(z)} \notin \mathbb{R}^+$. Esto permite definir la función $Log_{[0,2\pi)} \frac{f(z)}{g(z)} \in \mathcal{H}(\Omega_2)$. Así pues

$$0 = \int_\gamma \frac{\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)'}{\frac{f(z)}{g(z)}} dz = \int_\gamma \Big(\frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{g'(z)}{g(z)} \Big) dz.$$

El resultado se sigue ahora del principio del argumento.

Para probar el caso particular, basta observar que $\gamma_R = \partial D(a, R)$ verifica que $\gamma_R \sim 0(resp.\Omega)$. Tomando $g_1(z) = -g(z)$ se tiene

$$|f(z) + g_1(z)| < |g_1(z)| \leq |f(z)| + |g_1(z)| \qquad \forall |z - a| = R.$$

Como f, g_1 no tienen polos y $Ind_{\gamma_R}(z_k) = 1$ si $z_k \in D(a, R)$ se sigue del caso anterior. ∎

Corolario 9.3.5 *Sean $g, f \in \mathcal{M}(\Omega)$ y $\bar{D}(a, R) \subset \Omega$. Supongamos que*

$$|f(z) + g(z)| < |f(z)| + |g(z)| \qquad \forall |z - a| = R.$$

Entonces

$$N_0(f, D(a, R)) - N_0(g, D(a, R)) = N_p(f, D(a, R)) - N_p(g, D(a, R)).$$

Demostración: Inmediata. ∎

Ejemplo 9.3.3 *Probar que $z^8 - 4z^5 + z^2 - 1 = 0$ tiene cinco ceros en $|z| < 1$.*

Demostración: Sea $g(z) = -4z^5$.

Es claro que si $|z| = 1$ entonces

$$|P(z) - g(z)| = |z^8 + z^2 - 1| \leq 3 < |g(z)|.$$

Ahora usando el Teorema de Rouche se tiene $N_0(P, D) = N_0(g, D) = 5$. ∎

Teorema 9.3.6 *(Teorema fundamental del álgebra) Si $P(z)$ es un polinomio no constante de grado n. Entonces $N_0(P, \mathbb{C}) = n$.*

Demostración: Tomemos $g(z) = a_n z^n$ siendo $P(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n$.

Como $lim_{z\to\infty} \frac{P(z)-g(z)}{g(z)} = 0$ entonces existe $R > 0$ tal que

$$|P(z) - g(z)| < |g(z)| \qquad \forall |z| = R.$$

Aplicando ahora el teorema de Rouche se tiene que

$$N_0(P, D(0, R)) = N_0(g, D(0, R)) = n.$$

∎

Teorema 9.3.7 *(Teorema de Hurwitz) Sea* Ω *una región,* $\{f_n\}, f \in \mathcal{H}(\Omega)$ *tales que* $f_n \to f$ *uniformemente en compactos de* Ω.

Si $\bar{D}(a,R) \subset \Omega$ *y* $f(z) \neq 0$ *para* $z \in \partial D(a,R)$ *entonces existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $N_0(f_n, D(a,R)) = N_0(f, D(a,R))$ *para* $n \geq n_0$.

Demostración: Tomar $\varepsilon = min_{|z-a|=R}|f(z)| > 0$ entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq n_0$

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon \leq |f(z)|, \qquad \forall |z-a| = R.$$

Por tanto el resultado se sigue, ahora del teorema de Rouche. ∎

Corolario 9.3.8 *Sea* Ω *una región,* $\{f_n\}, f \in \mathcal{H}(\Omega)$ *tales que* $f_n \to f$ *uniformemente en compactos de* Ω *donde* $f_n(z) \neq 0\ \forall z \in \Omega$. *Entonces o bien* $f(z) \neq 0\ \forall z \in \Omega$ *o bien* $f(z) = 0\ \forall z \in \Omega$.

Demostración: Si f no es identicamente nula entonces para cada $a \in \Omega$ existe $\bar{D}(a,R) \subset \Omega$ donde f no se anula en $\partial D(a,R)$. Aplicando el teorema de Hurwitz se tiene que $f(a) \neq 0$. ∎

Ejemplo 9.3.4 *Si* $r < 1$ *entonces* $P_n(z) = 1 + 2z + 3z^2 + ... + nz^n$ *no se anula en* $D(0,r)$ *para* n *suficientemente grande.*

Demostración: Observar que

$$P_n(z) \to \frac{-1}{(1-z)^2}$$

uniformemente en compactos (por el teorema de Weierstrass) de $D(0,1)$, y como $\frac{-1}{(1-z)^2} \neq 0$ si $|z| = r$ entonces por el Teorema de Hurwitz se obtiene el resultado. ∎

Teorema 9.3.9 *(Teorema m-1) Sea* Ω *un abierto,* $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ *no constante y* $z_0 \in \Omega$ *con* $f(z_0) = w_0$ *y* $m(f - w_0, z_0) = m$. *Entonces existen dos abiertos no vacíos* V, W *en* $\mathbb{C}$ *con* $z_0 \in V \subset \Omega$, $W = f(V)$ *tales que* $card(f^{-1}(w)) = m$ *para todo* $w \in W \setminus \{w_0\}$, *es decir si* $w \in W \setminus \{w_0\}$ *existen* m *puntos distintos en* V *tales que* $f(z) = w$.

Demostración: Sea $r > 0$ tal que $\bar{D}(z_0, r) \subset \Omega$ con $f - w_0$ y f' funciones que no se anulan en $\bar{D}(z_0, r) \setminus \{z_0\}$. Tomemos $\alpha = min\{|f(z) - w_0| : |z - z_0| = r\}$.

Definimos $V = \{z \in D(z_0, r) : |f(z) - w_0| < \alpha\}$ y $W = D(w_0, \alpha)$.

Es claro que V es abierto y no vacío ($z_0 \in V$) y que $f(V) \subset W$.

Dado $w \in W \setminus \{w_0\}$ consideremos $f_1(z) = f(z) - w$ y $g_1(z) = f(z) - w_0$. Se tiene que

$$|f_1(z) - g_1(z)| = |w - w_0| < \alpha \leq |g_1(z)|, \forall z \in \partial D(z_0, r).$$

Por tanto, por Rouche, se tiene

$$N_0(f_1, D(z_0, r)) = N_0(g_1, D(z_0, r) = m.$$

Además son todos ceros simples por la hipótesis $f'(z) \neq 0$ en $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$, lo que demuestra que $card(f^{-1}(w)) = m$ y que $W \subset f(V)$. ∎

Corolario 9.3.10 *(Teorema de la aplicación abierta) Sea Ω un abierto no vacío y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ no constante. Entonces f es abierta.*

Demostración: Sea U un abierto de Ω. Si $w = f(z) \in f(U)$ entonces (aplicando en teorema m-1 a $f : U \to \mathbb{C}$ existen V, W donde $V \subset U$, $f(V) = W$ luego $w \in W \subset f(U)$. ∎

Corolario 9.3.11 *Sea γ una curva. Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $f(z) \in \gamma$ para todo $z \in \Omega$ entonces f es constante*

Demostración: Caso de no ser constante, teniendo en cuenta que $f(\Omega) \subset \gamma^*$ y $f(\Omega)$ tiene que ser un abierto en $\mathbb{C}$ se llega a una contradicción. ∎

Corolario 9.3.12 *(Principio del módulo máximo) Sea Ω un abierto no vacío, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ no constante y $z \in \Omega$. Entonces $|f(z)|$ no es un máximo local de $|f|$.*

Demostración: Como $f(\Omega)$ es un abierto entonces existe $D(f(z), r) \subset f(\Omega)$ lo que implica que hay valores $z' \in \Omega$ con $|f(z')| > |f(z)|$. ∎

Corolario 9.3.13 *Sea Ω abierto acotado no vacío y $f \in \mathcal{H}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. Entonces*

$$max_{z \in \bar{\Omega}} |f(z)| = max_{z \in \partial\Omega} |f(z)|$$

Demostración: Usando el Teorema de Weierstrass se tiene que el máximo se alcanza en el compacto $\bar{\Omega}$, y como no puede estar en el interior ha de estar en la frontera. ∎

Teorema 9.3.14 *(Teorema de la función inversa global) Sea Ω un abierto no vacío y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ e inyectiva. Entonces $f'(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega$ y $f^{-1} : f(\Omega) \to \Omega$ es holomorfa.*

Además $(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))}$ para todo $w \in f(\Omega)$.

Demostración: En primer lugar observar que f^{-1} es continua, por ser f abierta. Si existe $z \in \Omega$ con $f'(z) = 0$ entonces por el teorema m-1, no sería inyectiva. Finalmente es inmediato comprobar que f^{-1} es derivable en $w = f(z)$ y el valor de la derivada es el inverso de $f'(z)$.

En efecto, usando $u = f(v)$,

$$lim_{u \to w} \frac{f^{-1}(u) - z}{u - f(z)} = \frac{1}{lim_{v \to z} \frac{f(v)-f(z)}{v-z}} = \frac{1}{f'(z)}.$$

∎

Teorema 9.3.15 *(Teorema de la función inversa local) Sea Ω un abierto no vacío, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $z_0 \in \Omega, f(z_0) = w_0$ y $f'(z_0) \neq 0$. Entonces existen dos abiertos no vacíos V, W en $\mathbb{C}$ con $z_0 \in V \subset \Omega$, $w_0 \in W$ tales que $f : V \to W$ es una biyección. Además $f^{-1} : W \to V$ es holomorfa y si $\bar{D}(z_0, R) \subset V$ y $\gamma_R = \partial D(z_0, R)$ entonces para todo $w \in f(D(z_0, R))$ se tiene*

$$(i) \qquad f^{-1}(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{z f'(z)}{f(z) - w} dz.$$

Además si $|w - w_0| < \delta$ donde $\delta = d(w_0, f(\partial D(z_0, R)))$ se tiene

$$(ii) \qquad f^{-1}(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{z f'(z)}{(f(z) - w_0)^{n+1}} dz \right) (w - w_0)^n,$$

o equivalentemente podemos expresar, para $|w - w_0| < \delta$,

$$(iii) \qquad f^{-1}(w) = z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (\phi(z)^n) \right)_{z=z_0} (w - w_0)^n,$$

donde $\phi(z) = \frac{z-z_0}{f(z)-w_0}$.

Demostración: Una consecuencia inmediata del teorema m-1 es que se tiene una biyección local.

Para el cálculo de la fórmula de (i), observar que si $w \in f(D(z_0, r))$ como $f_1(z) = f(z) - w$ no tiene polos y sólamente tiene un cero (digamos en $f^{-1}(w) = a$) entonces usando el principio del argumento generalizado (aplicado a las funciones f_1 y $g(z) = z$) se concluye que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R}\frac{zf'(z)}{f(z)-w}dz = aInd_{\gamma_R}(a) = f^{-1}(w).$$

Para comprobar la expresión (ii) tomemos una bola $D(w_0, s) \subset f(D(z_0, r))$. Si $|w - w_0| < s$ se tiene que

$$f^{-1}(w) = \sum_{n=0}\frac{(f^{-1})^{(n}(w_0)}{n!}(w-w_0)^n,$$

donde, derivando bajo el signo integral en (i), se obtiene

$$\frac{(f^{-1})^{(n}(w_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R}\frac{zf'(z)}{(f(z)-w_0)^{n+1}}dz.$$

Para saber el máximo valor s donde vale el desarrollo es suficiente recordar que (por prolongación analítica) como f^{-1} es holomorfa en $f(D(z_0, r))$ se tendrá $s \geq d(w_0, \mathbb{C} \setminus f(D(z_0, r))$. Nótese que $f : \bar{D}(z_0, R) \to f(\bar{D}(z_0, R))$ es un homeomeorfismo y usando el teorema de la aplicación abierta se puede ver que necesariamente $f(\partial D(z_0, R)) = \partial f(D(z_0, R))$, de donde se concluye que $s = \delta = d(w_0, f(\partial D(z_0, R))$.

Para obtener la expresión (iii) observemos que para $n = 0$ se tiene $z_0 = f^{-1}(w_0)$ y para $n \geq 1$ podemos integrar por partes del siguiente modo

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R}\frac{zf'(z)}{(f(z)-w_0)^{n+1}}dz &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{\gamma_R'(t)\gamma_R(t)f'(\gamma_R(t))}{(f(\gamma_R(t))-w_0)^{n+1}}dt \\
&= \frac{1}{2\pi i}\frac{-\gamma_R(2\pi)}{n(f(\gamma_R(2\pi))-w_0)^n} - \frac{1}{2\pi i}\frac{-\gamma_R(0)}{n(f(\gamma_R(0))-w_0)^n} \\
&+ \frac{1}{2n\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{\gamma_R'(t)}{(f(\gamma_R(t))-w_0)^n}dt \\
&= \frac{1}{2n\pi i}\int_{\gamma_R}\frac{1}{(f(z)-w_0)^n}dz \\
&= \frac{1}{n}Res(\frac{1}{(f(z)-w_0)^n}, z_0)
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{n(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(\frac{(z-z_0)^n}{(f(z)-w_0)^n})_{z=z_0}.$$

■

Ejemplo 9.3.5 *Probar que si $|w| < 1$ entonces $z^2 + 2z - w = 0$ tiene una única raiz en $D(0,1)$. Desarrollar la solución en serie de potencias.*

Demostración: En primer lugar aplicamos el teorema de Rouche con las funciones $g(z) = z^2 + 2z - w$ y $h(z) = 2z$.

Es claro que

$$|g(z) - h(z)| = |z^2 - w| \leq |z|^2 + |w| < 2 \leq |h(z)|, \forall |z| = 1.$$

De ahí que $N_0(g, D) = 1$.

Llamemos $f(z) = z^2 + 2z$. Entonces $f^{-1} : D \to D$ tal que $f^{-1}(w) = z$ de modo que $g(z) = 0$. Para desarrollarla en potencias de w en el disco unidad aplicamos (iii).

$$f^{-1}(w) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\frac{d^{(n-1}}{dz^{n-1}}(\frac{z^n}{f(z)^n})_{z=0}w^n.$$

Notar que $\frac{z^n}{f(z)^n} = \frac{1}{(z+2)^n}$, y por tanto

$$\frac{d^{(k}}{dz^k}(\frac{1}{(z+2)^n}) = (-1)^k n(n+1)...(n+k-1)(z+2)^{-(n+k)}.$$

Por consiguiente

$$f^{-1}(w) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}\frac{1}{2n-1}(-1)^{n-1}(\frac{w}{4})^n.$$

■

9.4 Problemas propuestos

Cálculo de integrales y series

1.- Calcular las siguientes integrales:

a) $\int_{|z|=r} \frac{z^2+z^{-2}}{(z-a)(b-z)}dz$, $0 < |a| < r < |b|$.

b) $\int_{|z|=r} \frac{2-z}{zsen\pi z} dz$ con $r \notin \mathbb{N}$.
c) $\int_{|z|=r} \frac{z^2}{e^{2\pi i z^3}-1} dz$ con $n < r^3 < n+1$ para un $n \in \mathbb{N}$.
d) $\int_{|z|=1} e^{sen 1/z} dz$.

2.- Calcular:
a) $\int_0^{2\pi} e^{2cost} dt$.
b) $\int_0^{\pi} \frac{dx}{5+4cosx}$.
c) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+sen2x}$.

3.- Probar que si $a, b \in (0, \infty)$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)^2(x^2+b^2)} = \frac{\pi(2a+b)}{4a^3b(a+b)^2}.$$

Utilizar este resultado para calcular $\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^2}$.

4.- Probar que si $\alpha \in (-1, 1)$ y $a > 0$ entonces

$$\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{x^2+a} dx = \frac{\pi a^{(\alpha-1)/2}}{2cos\frac{\alpha\pi}{2}}.$$

5.- Probar que si $\alpha \in (0, 1)$ y $b > 0$ entonces

$$\int_0^\infty \frac{senbx}{x^\alpha} dx = \frac{\Gamma(1-\alpha)}{b^{1-\alpha}} sen\frac{\pi}{2}(1-\alpha).$$

Indicaciones: i) Si $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $sen\theta \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} sen\theta$.
ii) Puede considerarse el recinto: $\{(x, y) : x > 0, y > 0, r < x^2 + y^2 < R\}$.

6.- Sea $s \in \mathbb{C}$ tal que $-1 < Re(s) < 1$. Calcular $\int_0^\infty \frac{x^s}{(x+1)(x+2)} dx$.

7.- Calcular la suma de las series:
a) $\sum_1^\infty \frac{1}{n^6}$
b) $\sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$

8.- Dado $a \in \mathbb{C} \setminus \{i\mathbb{Z}\}$, probar que:

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^2+a^2} = \frac{\pi}{2a} coth\pi a - \frac{1}{2a^2}.$$

Cuestiones

1.- Si f es holomorfa en $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$ y $a \in \mathbb{C}$ es tal que $f(z) \neq a$ para todo $z \in \Omega$, probar que $Ind_{\gamma_t}(a)$ tiene el mismo valor para todo $t \in (r, R)$, siendo $\gamma_t = f(\{z : |z| = t\})$

2.- Sea $f \in \mathcal{H}(D(0,2))$ con $f(z) > 0$ en $|z| = 1$. ¿Puede ser $f(0) = 0$?.

3.- Sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $\bar{D}(0,1) \subset \Omega$ tal que $Ref(z).Imf(z) > 0$ para $z \in \partial D(0,1)$. Probar que f no tiene ceros en $D(0,1)$. ¿Es cierto este resultado si $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$ y es contínua en $\partial D(0,1)$?.

4.- Sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $\bar{D}(0,1) \subset \Omega$ y $|f(z)| < 1$ si $|z| = 1$. ¿Cuántos puntos fijos tiene f en $D(0,1)$?.

5.- Sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $\bar{D}(0,1) \subset \Omega$ tal que $|f(z)| > 2$ si $|z| = 1$ y $f(0) = 1$. ¿Debe tener f un cero en $D(0,1)$?.

6.- ¿Cómo debe ser una función entera para que sea constante en cada circunferencia de centro el origen?.

7.- Sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $z_0 \in \Omega$ un cero de f de orden p.

Probar que si $|z - z_0| \leq R < d(z_0, \partial\Omega)$

$$|f(z)| \leq (\frac{|z - z_0|}{R})^p \sup_{|w-z_0|=R} |f(w)|.$$

8.- Sean $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$, Ω una región con $\bar{D}(0,R) \subset \Omega$ tal que $|f(z)| = |g(z)|$

si $|z| = R$. Probar que si $Z(f) = \varnothing = Z(g)$ en $D(0,R)$, existe λ constante tal que $|\lambda| = 1$ y $f = \lambda g$.

9.- Sea $0 < r < R$ y $A = \{z : r < |z| < R\}$. Probar que existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo polinomio P, $sup\{|P(z) - z^{-1}| : z \in A\} \geq \varepsilon$ (En particular, $\frac{1}{z}$ no es límite uniforme de polinomios en A).

10.- Sea Λ frontera de una región no acotada Ω, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y contínua en Λ tal que $|f| \leq M$ sobre Λ, $|f| \leq B$ en Ω (M y B constantes). Probar que $|f| \leq M$ en Ω.

11.- Sea Ω una región y D un disco tal que $\bar{D} \subset \Omega$. Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ es no constante con $|f|$ constante en ∂D, probar que f tiene al menos un cero en D.

12.- Sea Ω una región acotada, (f_n) una sucesión de funciones contínuas sobre $\bar{\Omega}$, holomorfas en Ω tal que $f_n \to f$ uniformemente sobre $\partial\Omega$. Probar que $f_n \to f$ uniformemente sobre $\bar{\Omega}$.

13.- Sea f holomorfa en un abierto que contiene a $\bar{D}(0, R)$, verificando $|f(z)| \leq M$ si $|z| \leq R$ y $|f(0)| = a > 0$. Demostrar que el número de ceros de f en $D(0, R/3)$ es menor o igual que $\frac{1}{log2} log(M/a)$.

14.- Sea $f \in \mathcal{H}(D(0, R))$ no constante. Probar que $M(r) = \sup\limits_{|z|=r} |f(z)|$ es una función estrictamente creciente en $[0, R)$.

15.- Sea f holomorfa, en $\{|z| > 1\}$ y contínua en $\{|z| \geq 1\}$ tal que existe $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) \in \mathbb{C}$. Demostrar que $|f|$ alcanza su máximo absoluto en $\{|z| = 1\}$ y que $M(r) = \sup\limits_{|z|=r} |f(z)|$ es una función decreciente en $[1, \infty)$.

16.- Si P es un polinomio de grado n y $|P(z)| \leq M$ en $\{|z| > 1\}$, probar que $|P(z)| \leq M|z|^n$ en $\{|z| > 1\}$.

17.- Sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ no constante. Si $z_0 \in \Omega$ y $f(z_0) = 0$, probar que existe V entorno abierto de z_0 en Ω y $\phi \in \mathcal{H}(V)$ inyectiva sobre V tal que $f(z) = [\phi(z)]^m$ para todo $z \in V$, siendo m el orden de z_0 como cero de f.

18.- Sea $f : \mathbb{C} - \{\alpha\} \to \mathbb{C}$ holomorfa e inyectiva. Probar que $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, con $ad - bc \neq 0$ y $d + ac \neq 0$. En particular, si f es entera y biyectiva, $f(z) = Az + B$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

19.- Sean $P_n(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + + \frac{z^n}{n!}$ y $Q_n(z) = P_n(z) - 1$. ¿Qué puede decirse sobre la localización de los ceros de P_n y Q_n para n suficientemente grande?.

20.- Probar que para $r > 0$ suficientemente pequeño todos los ceros de $f_n(z) = 1 + \frac{1}{z} + \cdots + \frac{1}{n!z^n}$ pertenecen, para n suficientemente grande al círculo $|z| < r$.

21.- Probar el siguiente principio del mínimo: Si f es no constante, holomorfa en Ω y contínua en $\bar{\Omega}$ con Ω acotado, entonces f tiene un cero en Ω o $|f|$ alcanza su valor mínimo en la frontera de Ω.

Problemas del Teorema de Rouche y aplicación abierta

1.- Si $\lambda > 1$, demostrar que $\lambda - z - e^{-z} = 0$ tiene una solución con parte real positiva. Probar que ésta debe ser real. ¿Qué le sucede a la solución cuando λ decrece hacia 1?.

2.- Hallar el número de ceros de

$$z^4 - 5z + 1 \text{ en } 1 < |z| < 2;$$

$$z^4 + z^3 + 1 \text{ en el 1er cuadrante.}$$

3.- Probar que el polinomio $z^4+2z^3-2z+10$ posee una raíz en cada cuadrante.

4.- Sea $P(z) = z^4 + iz^3 + 1$.
a) Probar que todas las raíces de P están en $D(0, \frac{3}{2})$.
b) Estudiar cuántas raíces de P hay en el primer cuadrante.

5.- Demostrar que todos los ceros de $P(z) = z^5 - z + 16$ están en $\{1 < |z| < 2\}$ y dos de ellos tienen parte real positiva.

6.- Probar que $w = \frac{z}{(z+1)^2}$ posee una única solución en un cierto entorno del origen. Desarrollar esta solución en serie de potencias de w.

7.- Resolver la ecuación $w^3+3w-z = 0$, encontrando $w = w(z)$ como función analítica en un entorno de cero.

8.- Sea $g(w) = \int_{|z-2|=1} \frac{z^2}{z^2-w} dz$.¿Dónde define esta fórmula una función holomorfa?. Probar que en un entorno de $w = 4$ se tiene $g^2(w) = -\pi^2 w$.

9.- Sea $g(w) = \int_{|z-1|=1} \frac{ze^z}{e^z-w} dz$. ¿Dónde define dicha fórmula una función holomorfa?.

10.- Sea $0 < |a| < 1$ y $p \in \mathbb{N}$. Probar que la ecuación $(z-1)^p = ae^{-z}$ tiene exactamente p raíces con parte real positiva, simples y que todas ellas están en $D(1, 1)$.