

J.A. Oteo. Departamento de Física Teórica
(UVEG).[MMF3-B]

TEMA 5: Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden: Sistemas Lineales

1 de abril de 2004

1. Sistema lineal de EDO con coeficientes constantes

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t), \quad A \in \mathbb{R}^{N \times N}, \mathbf{f}(t), \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^N \quad (1)$$

Supondremos que A es diagonalizable, con valores propios $\{\lambda_k\}_{k=1}^N$ y vectores propios $\{\mathbf{y}_k\}_{k=1}^N : A\mathbf{y}_k = \lambda_k\mathbf{y}_k, k = 1 \dots N$.

Tres métodos de resolución. Cada uno tiene un interés especial según las características del problema que debamos resolver.

1.1. $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}$: Valores propios no degenerados

Interesa cuando: No se dan conds. iniciales, *i.e.*, $\mathbf{x}(t)$ en función de N ctes. arbitrarias $\{c_k\}_{k=1}^N$.

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^N c_i \exp(\lambda_i t) \mathbf{y}_i \quad (2)$$

1.2. $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}$: $\mathbf{x}(t)$ en función de conds. iniciales $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$

¿Cómo evoluciona el vector de conds. iniciales \mathbf{x}_0 ?

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t A\mathbf{x}(s) ds$$

Sol. \times iteraciones (Picard): $\mathbf{x}_{(n)}(t)$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{(0)}(t) &= \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}_{(1)}(t) &= \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t A\mathbf{x}_{(0)} ds = [I + A(t - t_0)] \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}_{(2)}(t) &= \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t A\mathbf{x}_{(1)} ds = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t A [I + A(s - t_0)] \mathbf{x}_0 \\ &= \left[I + A(t - t_0) + \frac{1}{2} A^2 (t - t_0)^2 \right] \mathbf{x}_0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Solución:

$$\mathbf{x}(t) = \exp [A(t - t_0)] \mathbf{x}_0$$

1.3. $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x} + \mathbf{f}(t)$

$\mathbf{x}(t)$ en función de conds. iniciales. Sin pérdida de generalidad: $t_0 = 0$. Sol.: "complementaria+particular"

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_c(t) + \mathbf{x}_p(t)$$

$$\frac{d\mathbf{x}_c}{dt} = A\mathbf{x}_c$$

$$\frac{d\mathbf{x}_p}{dt} = A\mathbf{x}_p + \mathbf{f}(t)$$

$$\mathbf{x}(t) = \exp[At] \left\{ \mathbf{x}_0 + \int_0^t \exp[-As] \mathbf{f}(s) ds \right\}$$

(3)

2. Ejemplo: $\begin{cases} \dot{y} = z + 2 \\ \dot{z} = y + 2 \end{cases}$

Siendo $y(0) = 1, z(0) = 1$, determinar la solución en $t = \ln 2$. Notación: $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Solución:

$$\mathbf{x}(t) = \exp \begin{pmatrix} 0 & t \\ t & 0 \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^t ds \exp \left[- \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} s \right] \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \quad (4)$$

Utilizamos la serie de Taylor para la func. exponencial $\exp At = I + At + A^2 t^2 / 2! + \dots$. Encontramos además $A^2 = I$. Ergo: $\exp At = I \cosh t + A \sinh t$ en este caso.

$$\int_0^t ds \exp \left[- \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} s \right] = \int_0^t ds \begin{pmatrix} \cosh s & -\sinh s \\ -\sinh s & \cosh s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sinh t & 1 - \cosh t \\ 1 - \cosh t & \sinh t \end{pmatrix}$$

Por tanto, (11)

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \begin{pmatrix} \cosh t & -\sinh t \\ -\sinh t & \cosh t \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sinh t & 1 - \cosh t \\ 1 - \cosh t & \sinh t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \\ &= [3 \exp(t) - 2] \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Solución: $y(\ln 2) = z(\ln 2) = 4$.

■

3. Exponencial de una matriz

La resolución de (1) puede requerir el cálculo de $\exp(At)$. Notación: $\exp(At) \equiv \exp B$. Autovalores: $B\mathbf{y}_k = \beta_k \mathbf{y}_k$, $k = 1 \dots N$. Ec. característica: $|B - \beta I| = a_0 + a_1 \beta + \dots + a_N \beta^N \equiv P(\beta) = 0 \implies N$ raíces

Th. Cayley-Hamilton: $P(B) = 0$

Consecuencia: $P(B) = 0 \implies B^N = \sum_{k=0}^{N-1} b_k B^k$

Ergo: $\exp B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B^k \underset{C-H}{=} d_0 + d_1 B + \dots + d_{N-1} B^{N-1} \rightsquigarrow \{d_n\}_{n=0}^{N-1}?$

En general: $f(B) = \sum_{k=0}^{N-1} f_k B^k \rightsquigarrow \{f_n\}_{n=0}^{N-1}$?

Tenemos el **resultado abstracto** siguiente: $\{B^n\}_{n=0}^{N-1}$ constituye una **base** de matrices en la cual expresar $f(B)$ y corresponde hallar los coefs. $\{d_n\}_{n=0}^{N-1}$. Sin embargo, desde un punto de vista práctico es más eficaz proceder al revés: fijar de entrada los coefs. y determinar una base de matrices alternativa.

3.1. Caso: A sin degeneración

Teorema-1:

$$f(B) = f(\beta_1)Q_1 + f(\beta_2)Q_2 + \dots + f(\beta_N)Q_N \quad (5)$$

siendo $\{Q_k\}_{k=1}^N$ independientes de f .
Ejps.:

$$\begin{aligned} \exp B &= \exp(\beta_1)Q_1 + \dots + \exp(\beta_N)Q_N \\ B^{-1} &= \frac{1}{\beta_1}Q_1 + \dots + \frac{1}{\beta_N}Q_N \\ B^{999} &= \beta_1^{999}Q_1 + \dots + \beta_N^{999}Q_N \end{aligned}$$

3.2. Caso: A con degeneración

Sea β_1 degenerado n veces: $\{\beta_1, \dots, \beta_1, \beta_{n+1}, \dots, \beta_N\}$.

Teorema-2: Teorema-1 se generaliza a:

$$f(B) = f(\beta_1)Q_1 + f^{(1)}(\beta_1)Q_2 + \dots + f^{(n-1)}(\beta_1)Q_n + f(\beta_{n+1})Q_{n+1} + \dots + f(\beta_N)Q_N \quad (6)$$

3.3. Determinación de $\{Q_k\}_{k=1}^N$ (A sin degeneración)

$\{Q_k\}_{k=1}^N$ son indeps. de $f \rightsquigarrow$ elijo las + simples:

$$f(x) = 1, x, x^2, \dots, x^{N-1} \quad (7)$$

Construyo el sistema

$$\begin{aligned} I &= Q_1 + \dots + Q_N \\ B &= \beta_1 Q_1 + \dots + \beta_N Q_N \\ B^2 &= \beta_1^2 Q_1 + \dots + \beta_N^2 Q_N \\ &\vdots \\ B^{N-1} &= \beta_1^{N-1} Q_1 + \dots + \beta_N^{N-1} Q_N \end{aligned} \quad (8)$$

Si se resuelve *por Cramer* aparece determinante de Vandermonde:

$$\Delta = \prod_{1 \leq i < j \leq N} (\beta_j - \beta_i)$$

3.4. Determinación de $\{Q_k\}_{k=1}^N$ (A con degeneración)

Se generaliza fácilmente.

4. Ejemplo: $\exp \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$

Ec. característica: $\beta^2 - 2a\beta + a^2 - b^2 = 0 \rightsquigarrow \beta = a \pm b$.

$$\exp \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \exp(a+b)Q_+ + \exp(a-b)Q_- \quad (9)$$

Según (5)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Q_+ + Q_-, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = (a+b)Q_+ + (a-b)Q_-$$

Podemos determinar Q_+, Q_- . Encontramos:

$$\begin{aligned} \exp \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \exp(a+b) + \exp(a-b) & \exp(a+b) - \exp(a-b) \\ \exp(a+b) - \exp(a-b) & \exp(a+b) + \exp(a-b) \end{pmatrix} \\ &= \exp(a) \begin{pmatrix} \cosh b & \sinh b \\ \sinh b & \cosh b \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (10)$$

Otro ejercicio: Utilizando Q_+, Q_- , encontrar A^{-1} y comparar con el cálculo directo de la matriz inversa.

5. Ejemplo: $\begin{cases} \dot{y} = z + \exp(-t) \\ \dot{z} = y \end{cases}$

Siendo $y(0) = 1, z(0) = 1$, determinar la solución en t . Notación: $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Solución:

$$\mathbf{x}(t) = \exp \begin{pmatrix} 0 & t \\ t & 0 \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^t ds \exp \left[- \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} s \right] \begin{pmatrix} \exp(-t) \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad (11)$$

Utilizando (10) con $a = 0, b = -s$ encontramos

$$\int_0^t ds \exp \left[- \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} s \right] \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix} = \int_0^t ds \begin{pmatrix} \cosh s \\ -\sinh s \end{pmatrix} e^{-s} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 + 2t - e^{-2t} \\ 1 - 2t - e^{-2t} \end{pmatrix}$$

Por tanto, (11)

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \begin{pmatrix} \cosh t & -\sinh t \\ -\sinh t & \cosh t \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 + 2t - \exp(-2t) \\ 1 - 2t - \exp(-2t) \end{pmatrix} \right\} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 5 \exp t - \exp(-t) + 2t \exp(-t) \\ 5 \exp t - \exp(-t) - 2t \exp(-t) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

■