

J.A. Oteo. Departamento de Física Teórica
(UVEG).[MMF3-B]

TEMA 5: Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden: Sistemas Lineales

13 de mayo de 2005

1. Sistema lineal de EDO con coeficientes constantes

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t), \quad A \in \mathbb{R}^{N \times N}, \mathbf{f}(t), \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^N \quad (1)$$

Supondremos que A es diagonalizable, con valores propios $\{\lambda_k\}_{k=1}^N$ y vectores propios $\{\mathbf{y}_k\}_{k=1}^N : A\mathbf{y}_k = \lambda_k\mathbf{y}_k, k = 1 \dots N$.

Tres métodos de resolución. Cada uno tiene un interés especial según las características del problema que debamos resolver.

1.1. $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}$: Valores propios no degenerados

Interesa cuando: No se dan conds. iniciales, *i.e.*, $\mathbf{x}(t)$ en función de N ctes. arbitrarias $\{c_k\}_{k=1}^N$.

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^N c_i \exp(\lambda_i t) \mathbf{y}_i \quad (2)$$

1.2. $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}$: $\mathbf{x}(t)$ en función de conds. iniciales $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$

¿Cómo evoluciona el vector de conds. iniciales \mathbf{x}_0 ?

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t A\mathbf{x}(s) ds$$

Sol. \times iteraciones (Picard): $\mathbf{x}_{(n)}(t)$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{(0)}(t) &= \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}_{(1)}(t) &= \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t A\mathbf{x}_{(0)} ds = [I + A(t - t_0)] \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}_{(2)}(t) &= \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t A\mathbf{x}_{(1)} ds = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t A [I + A(s - t_0)] \mathbf{x}_0 \\ &= \left[I + A(t - t_0) + \frac{1}{2} A^2 (t - t_0)^2 \right] \mathbf{x}_0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Solución:

$$\mathbf{x}(t) = \exp [A(t - t_0)] \mathbf{x}_0$$

1.3. $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x} + \mathbf{f}(t)$

$\mathbf{x}(t)$ en función de conds. iniciales. Sin pérdida de generalidad: $t_0 = 0$. Sol.: "complementaria+particular"

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_c(t) + \mathbf{x}_p(t)$$

$$\frac{d\mathbf{x}_c}{dt} = A\mathbf{x}_c$$

$$\frac{d\mathbf{x}_p}{dt} = A\mathbf{x}_p + \mathbf{f}(t)$$

$$\mathbf{x}(t) = \exp[At] \left\{ \mathbf{x}_0 + \int_0^t \exp[-As] \mathbf{f}(s) ds \right\}$$

(3)

2. Ejemplo: $\begin{cases} \dot{y} = z + 2 \\ \dot{z} = y + 2 \end{cases}$

Siendo $y(0) = 1, z(0) = 1$, determinar la solución en $t = \ln 2$. Notación: $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Solución:

$$\mathbf{x}(t) = \exp \begin{pmatrix} 0 & t \\ t & 0 \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^t ds \exp \left[- \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} s \right] \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \quad (4)$$

Utilizamos la serie de Taylor para la func. exponencial $\exp At = I + At + A^2 t^2 / 2! + \dots$. Encontramos además $A^2 = I$. Ergo: $\exp At = I \cosh t + A \sinh t$ en este caso.

$$\int_0^t ds \exp \left[- \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} s \right] = \int_0^t ds \begin{pmatrix} \cosh s & -\sinh s \\ -\sinh s & \cosh s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sinh t & 1 - \cosh t \\ 1 - \cosh t & \sinh t \end{pmatrix}$$

Por tanto, (6)

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \begin{pmatrix} \cosh t & -\sinh t \\ -\sinh t & \cosh t \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sinh t & 1 - \cosh t \\ 1 - \cosh t & \sinh t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \\ &= [3 \exp(t) - 2] \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Solución: $y(\ln 2) = z(\ln 2) = 4$. ■

3. Exponencial de una matriz

La resolución de (1) puede requerir el cálculo de $\exp(At)$. Notación: $\exp(At) \equiv \exp B$. Autovalores: $B\mathbf{y}_k = \beta_k \mathbf{y}_k$, $k = 1 \dots N$. Ec. característica: $|B - \beta I| = a_0 + a_1 \beta + \dots + a_N \beta^N \equiv P(\beta) = 0 \implies N$ raíces

Th. Cayley-Hamilton: $P(B) = 0$

Consecuencia: $P(B) = 0 \implies B^N = \sum_{k=0}^{N-1} b_k B^k$

Ergo: $\exp B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B^k \underset{C-H}{=} d_0 + d_1 B + \dots + d_{N-1} B^{N-1} \rightsquigarrow \{d_n\}_{n=0}^{N-1}?$

En general: $f(B) = \sum_{k=0}^{N-1} f_k B^k \rightsquigarrow i\{f_n\}_{n=0}^{N-1}?$

Tenemos el **resultado abstracto** siguiente: $\{B^n\}_{n=0}^{N-1}$ constituye una **base** de matrices en la cual expresar $f(B)$ y corresponde hallar los coefs. $\{d_n\}_{n=0}^{N-1}$.

4. Ejemplo: $\exp \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$

Encontramos:

$$\begin{aligned} \exp \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \exp(a+b) + \exp(a-b) & \exp(a+b) - \exp(a-b) \\ \exp(a+b) - \exp(a-b) & \exp(a+b) + \exp(a-b) \end{pmatrix} \\ &= \exp(a) \begin{pmatrix} \cosh b & \sinh b \\ \sinh b & \cosh b \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{5}$$

■

5. Ejemplo: $\begin{cases} \dot{y} = z + \exp(-t) \\ \dot{z} = y \end{cases}$

Siendo $y(0) = 1, z(0) = 1$, determinar la solución en t . Notación: $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Solución:

$$\mathbf{x}(t) = \exp \begin{pmatrix} 0 & t \\ t & 0 \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^t ds \exp \left[- \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} s \right] \begin{pmatrix} \exp(-t) \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \tag{6}$$

Utilizando (5) con $a = 0, b = -s$ encontramos

$$\int_0^t ds \exp \left[- \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} s \right] \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix} = \int_0^t ds \begin{pmatrix} \cosh s & \\ -\sinh s & \end{pmatrix} e^{-s} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 + 2t - e^{-2t} \\ 1 - 2t - e^{-2t} \end{pmatrix}$$

Por tanto, (6)

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \begin{pmatrix} \cosh t & -\sinh t \\ -\sinh t & \cosh t \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 + 2t - \exp(-2t) \\ 1 - 2t - \exp(-2t) \end{pmatrix} \right\} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 5 \exp t - \exp(-t) + 2t \exp(-t) \\ 5 \exp t - \exp(-t) - 2t \exp(-t) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

■

6. Caso general 2×2 : $\exp \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Podemos escribir

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{a+d}{2}I + \begin{pmatrix} \frac{a-d}{2} & b \\ c & \frac{d-a}{2} \end{pmatrix} \equiv \frac{a+d}{2}I + A \quad (7)$$

y por tanto

$$\exp \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \exp[(a+d)/2] \exp \begin{pmatrix} \frac{a-d}{2} & b \\ c & \frac{d-a}{2} \end{pmatrix} = \exp[(a+d)/2] \exp A \quad (8)$$

Los autovalores de la matriz A en (7) son $\pm [[(a-d)/2]^2 + bc]^{1/2} \equiv \pm\mu$. Entonces resulta

$$\exp \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \exp[(a+d)/2] \left[I \cosh \mu + \frac{\sinh \mu}{2\mu} \begin{pmatrix} a-d & 2b \\ 2c & d-a \end{pmatrix} \right] \quad (9)$$

Que podemos escribir de forma compacta:

$$\exp \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \exp[(a+d)/2] \left[I \cosh \mu + \frac{\sinh \mu}{\mu} A \right] \quad (10)$$

■