J.A. Oteo. Departamento de Física Teórica (UVEG).[MMF3-B]

TEMA 6: Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden: Sistemas Lineales

24 de marzo de 2006

1. Sistema lineal de EDO con coeficientes constantes

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = A\mathbf{x}(t)+\mathbf{f}(t), \qquad A \in \mathrm{R}^{N\times N}, \mathbf{f}(t), \mathbf{x}(t) \in \mathrm{R}^N \tag{1}$$

Supondremos que A es diagonalizable, con valores propios $\{\lambda_k\}_{k=1}^N$ y vectores propios $\{\mathbf{y}_k\}_{k=1}^N : A\mathbf{y}_k = \lambda_k \mathbf{y}_k$, $k = 1...N$.

Tres métodos de resolución. Cada uno tiene un interés especial según las características del problema que debamos resolver.

1.1. $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}$: Valores propios no degenerados

Interesa cuando: No se dan conds. iniciales, *i.e.*, $\mathbf{x}(t)$ en función de N ctes. arbitrarias $\{c_k\}_{k=1}^N$.

$$\mathbf{x}(t)=\sum_{i=1}^{N} c_i \exp(\lambda_i t)\mathbf{y}_i \tag{2}$$

1.2. $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}$: $\mathbf{x}(t)$ en función de conds. iniciales $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$

¿Cómo evoluciona el vector de conds. iniciales $\mathbf{x}_0$?

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} A\mathbf{x}(s)\mathrm{d}s$$

Sol. $\times$ iteraciones (Picard): $\mathbf{x}_{(n)}(t)$

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_{(0)}(t) &= \mathbf{x}_0 \\
\mathbf{x}_{(1)}(t) &= \mathbf{x}_0 + \textstyle\int_{t_0}^{t} A\mathbf{x}_{(0)}\mathrm{d}s = [I + A(t-t_0)]\,\mathbf{x}_0 \\
\mathbf{x}_{(2)}(t) &= \mathbf{x}_0 + \textstyle\int_{t_0}^{t} A\mathbf{x}_{(1)}\mathrm{d}s = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} A\,[I + A(s-t_0)]\,\mathbf{x}_0 \\
&= \left[I + A(t-t_0) + \frac{1}{2}A^2(t-t_0)^2\right]\mathbf{x}_0 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Solución:

$$\mathbf{x}(t) = \exp\left[A(t-t_0)\right]\mathbf{x}_0$$

1.3. $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x} + \mathbf{f}(t)$

$\mathbf{x}(t)$ en función de conds. iniciales. Solución: "complementaria+particular"

$$\begin{aligned} &\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_c(t) + \mathbf{x}_p(t) \\ &\frac{d\mathbf{x}_c}{dt} = A\mathbf{x}_c \\ &\frac{d\mathbf{x}_p}{dt} = A\mathbf{x}_p + \mathbf{f}(t) \\ &\mathbf{x}(t) = \exp\left[A(t-t_0)\right]\left\{\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \exp\left[-A(s-t_0)\right]\mathbf{f}(s)ds\right\} \end{aligned} \tag{3}$$

2. Ejemplo: $\begin{cases} \dot{y} = & z+2 \\ \dot{z} = & y+2 \end{cases}$

Siendo $y(0) = 1, z(0) = 1$, determinar la solución en $t = \ln 2$. Notación: $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Solución:

$$\mathbf{x}(t) = \exp\begin{pmatrix} 0 & t \\ t & 0 \end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^t \mathrm{d}s \exp\left[-\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}s\right]\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right\} \tag{4}$$

Utilizamos la serie de Taylor para la func. exponencial $\exp At = I + At + A^2t^2/2! + \dots$ Encontramos además $A^2 = I$. Ergo: $\exp At = I\cosh t + A\sinh t$ en este caso.

$$\int_0^t \mathrm{d}s \exp\left[-\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}s\right] = \int_0^t \mathrm{d}s \begin{pmatrix} \cosh s & -\sinh s \\ -\sinh s & \cosh s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sinh t & 1-\cosh t \\ 1-\cosh t & \sinh t \end{pmatrix}$$

Por tanto, (11)

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) = & \begin{pmatrix} \cosh t & -\sinh t \\ -\sinh t & \cosh t \end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sinh t & 1-\cosh t \\ 1-\cosh t & \sinh t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right\} \\ = & \left[3\exp(t) - 2\right]\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Solución: $y(\ln 2) = z(\ln 2) = 4$.

■

3. Exponencial de una matriz

La resolución de (1) puede requerir el cálculo de $\exp[A(t-t_0)]$. Notación: $\exp[A(t-t_0)] \equiv \exp B$. Autovalores: $B\mathbf{y}_k = \beta_k\mathbf{y}_k$, $k = 1...N$. Ec. característica: $|B - \beta I| = a_0 + a_1\beta + ... + a_N\beta^N \equiv P(\beta) = 0 \Longrightarrow N$ raíces

Th. Cayley-Hamilton: $P(B) = 0$

Consecuencia: $P(B) = 0 \Longrightarrow B^N = \sum_{k=0}^{N-1} b_k B^k$

Ergo: $\exp B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}B^k \underset{C-H}{=} d_0 + d_1 B + ... + d_{N-1}B^{N-1} \rightsquigarrow$ ¿$\{d_n\}_{n=0}^{N-1}$?

En general: $f(B)=\sum_{k=0}^{N-1} f_k B^k \rightsquigarrow$ ¿$\{f_n\}_{n=0}^{N-1}$?

Tenemos el **resultado abstracto** siguiente: $\{B^n\}_{n=0}^{N-1}$ constituye una **base** de matrices en la cual expresar $f(B)$ y corresponde hallar los coefs. $\{d_n\}_{n=0}^{N-1}$. Sin embargo, desde un punto de vista práctico es más eficaz proceder al revés: fijar de entrada los coefs. y determinar una base de matrices alternativa: $\{Q_k\}_1^N$.

3.1. Caso: A sin degeneración

Teorema-1:

$$f(B)=f(\beta_1)Q_1+f(\beta_2)Q_2+\ldots+f(\beta_N)Q_N \tag{5}$$

siendo $\{Q_k\}_{k=1}^N$ **independientes** de f.
Ejps.:

$$\begin{aligned} \exp B = &\quad \exp(\beta_1)Q_1+\ldots+\exp(\beta_N)Q_N \\ B^{-1} = &\quad \frac{1}{\beta_1}Q_1+\ldots+\frac{1}{\beta_N}Q_N \\ B^{999} = &\quad \beta_1^{999}Q_1+\ldots+\beta_N^{999}Q_N \end{aligned}$$

3.2. Caso: A con degeneración

Sea β_1 degenerado n veces: $\{\beta_1,\ldots,\beta_1,\beta_{n+1},\ldots,\beta_N\}$.
Teorema-2: Teorema-1 se generaliza a:

$$\begin{aligned} f(B) = &\quad f(\beta_1)Q_1+f^{(1)}(\beta_1)Q_2+\ldots+f^{(n-1)}(\beta_1)Q_n+ \\ &\quad f(\beta_{n+1})Q_{n+1}+\ldots+f(\beta_N)Q_N \end{aligned} \tag{6}$$

3.3. Determinación de $\{Q_k\}_{k=1}^N$ (A sin degeración)

$\{Q_k\}_{k=1}^N$ son indeps. de f, por tanto elijo las más simples:

$$f(x)=1,x,x^2,\ldots,x^{N-1} \tag{7}$$

Construyo el sistema

$$\begin{aligned} I = &\quad Q_1+\ldots+Q_N \\ B = &\quad \beta_1Q_1+\ldots+\beta_NQ_N \\ B^2 = &\quad \beta_1^2Q_1+\ldots+\beta_N^2Q_N \\ \vdots\ &\quad \vdots \\ B^{N-1} = &\quad \beta_1^{N-1}Q_1+\ldots+\beta_N^{N-1}Q_N \end{aligned} \tag{8}$$

Si se resuelve *por Cramer* aparece determinante de Vandermonde:

$$\Delta=\prod_{1\le i<j\le N}(\beta_j-\beta_i)$$

3.4. Determinación de $\{Q_k\}_{k=1}^N$ (A con degeración)

Se generaliza facilmente.

4. Ejemplo: $\exp\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$

Ec. característica: $\beta^2 - 2a\beta + a^2 - b^2 = 0 \rightsquigarrow \beta = a \pm b$.

$$\exp\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \exp(a+b)Q_+ + \exp(a-b)Q_- \tag{9}$$

Según (5)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Q_+ + Q_-, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = (a+b)Q_+ + (a-b)Q_-$$

Podemos determinar Q_+, Q_-. Encontramos:

$$\begin{aligned} \exp\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \exp(a+b)+\exp(a-b) & \exp(a+b)-\exp(a-b) \\ \exp(a+b)-\exp(a-b) & \exp(a+b)+\exp(a-b) \end{pmatrix} \\ &= \exp(a)\begin{pmatrix} \cosh b & \sinh b \\ \sinh b & \cosh b \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{10}$$

Otro ejercicio: Utilizando Q_+, Q_-, encontrar A^{-1} y comparar con el cálculo directo de la matriz inversa.

5. Ejemplo: $\begin{cases} \dot{y} = & z + \exp(-t) \\ \dot{z} = & y \end{cases}$

Siendo $y(0) = 1, z(0) = 1$, determinar la solución en t. Notación: $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Solución:

$$\mathbf{x}(t) = \exp\begin{pmatrix} 0 & t \\ t & 0 \end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^t \mathrm{d}s \exp\left[-\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}s\right]\begin{pmatrix} \exp(-t) \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \tag{11}$$

Utilizando (10) con $a = 0$, $b = -s$ encontramos

$$\int_0^t \mathrm{d}s \exp\left[-\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}s\right]\begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix} = \int_0^t \mathrm{d}s \begin{pmatrix} \cosh s \\ -\sinh s \end{pmatrix} e^{-s} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1+2t-e^{-2t} \\ 1-2t-e^{-2t} \end{pmatrix}$$

Por tanto, (11)

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \begin{pmatrix} \cosh t & -\sinh t \\ -\sinh t & \cosh t \end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1+2t-\exp(-2t) \\ 1-2t-\exp(-2t) \end{pmatrix}\right\} \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5\exp t - \exp(-t) + 2t\exp(-t) \\ 5\exp t - \exp(-t) - 2t\exp(-t) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

■