J.A. Oteo. Departamento de Física Teórica (UVEG).[MMF1-B]

TEMA 2: **EDO: Sistemas lineales con coeficientes constantes**

26 de octubre de 2011

1. Sistema lineal: Notación

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = A\mathbf{x}(t)+\mathbf{f}(t), \qquad A \in \mathrm{R}^{N\times N}, \qquad \mathbf{f}(t),\ \mathbf{x}(t) \in \mathrm{R}^N \tag{1}$$

Supondremos que la matriz de los coeficientes A es diagonalizable, con valores propios $\{\lambda_k\}_{k=1}^N$ y vectores propios $\{\mathbf{y}_k\}_{k=1}^N$: $A\mathbf{y}_k = \lambda_k \mathbf{y}_k$, $k = 1...N$.

2. Ecuación homogénea: $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}$.

Solución en función de constantes arbitrarias. Resolvemos $\mathbf{x}(t)$ en función de N constantes arbitrarias $\{c_k\}_{k=1}^N$. En el caso sin degeneración la solución es

$$\mathbf{x}(t)=\sum_{i=1}^{N} c_i \exp(\lambda_i t)\mathbf{y}_i \tag{2}$$

3. Ejemplo 1

Siendo $y(0) = 1, z(0) = 1$, determinar la solución del sistema:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \quad z \\ \dot{z} &= \quad y \end{aligned} \tag{3}$$

Notación: $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Además: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Valores propios $\lambda = \pm 1$.
Solución:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = C_1 \exp(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \exp(-t) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Condiciones iniciales: $C_1 = 1,\ C_2 = 0$. Solución

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \exp(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

4. Ecuación inhomogénea: $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x} + \mathbf{f}(t)$

Convertimos el sistema a una EDO de orden N inhomogénea.

4.1. Ejemplo 2

Siendo $y(0) = 1, z(0) = 1$, determinar la solución del sistema:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \quad z + 2 \\ \dot{z} &= \quad y + 2 \end{aligned} \tag{6}$$

Notación: $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Además: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.
Convertimos a EDO segundo orden:

$$\ddot{y} - y = 2, \qquad Sol.: \; y(t) = D_1 \exp(t) + D_2 \exp(-t) - 2 \tag{7}$$

Obtenemos z a partir de $z = \dot{y} - 2$:

$$z(t) = D_1 \exp(t) - D_2 \exp(-t) - 2 \tag{8}$$

Condiciones iniciales: $D_1 = 3,\; D_2 = 0$. Solución:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = [3\exp(t) - 2] \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{9}$$