`J.A. Oteo. Departamento de Física Teórica (UVEG).[MMF3-B]`

TEMA 4: Variable compleja*

16 de enero de 2002

1. `//Oteo//` Si $f(z)$ es analítica dentro de y sobre un círculo C de radio R centrado en $z = z_0$, $|f(z)| \leq M$ sobre C (siendo M constante), entoces:

   (a) $f^{(n)}(z_0) \leq \dfrac{Mn!}{R^n}$

   (b) $f^{(n)}(z_0) \leq \dfrac{Mn!}{R}$

   (c) $f^{(n)}(z_0) \leq \dfrac{M}{R^n}$

2. `//López//` De qué depende el radio exterior de convergencia del desarrollo de Laurent:

   (a) Del residuo

   (b) De la parte regular del desarrollo

   (c) De la parte principal del desarrollo

3. `//Almendros//` Dada la función $f(z) = \sqrt{z + 2i}$ decir por qué cuadrantes debe pasar un circuito cerrado para determinar que $f(z)$ es multivaluada

   (a) III

   (b) IV

   (c) III,V

4. `//Galarza//` Sea $f(z)$ analítica, y $f'(z)$ contínua en el dominio D. Entonces:

   (a) $\int_\gamma f(z)dz = 0$

   (b) $\oint_C f(z)dz \neq 0$

   (c) $\oint_C f(z)dz = 0$

5. `//Gómez Salcedo//` Encontrar el residuo de la función $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$ en el polo $z_0 = i$.

   (a) $\dfrac{1}{2i}$

   (b) $\dfrac{1}{2}$

   (c) $\dfrac{1}{i}$

6. `//Piñó//` Las realciones de Cauchy-Riemann son:

*Autores: verificar!!

(a) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \qquad \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial x}$

(b) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{\partial v}{\partial y}, \qquad \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial x}$

(c) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \qquad \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$

7. `//Pla Moreno//` Dada $f(z) = \dfrac{z}{z^3 - 4z^2 + 4z}$, señala la opción correcta

   (a) $f(z)$ tiene dos polos de orden 2 en $z = 0$ y $z = 2$
   (b) $f(z)$ tiene un polo de segundo orden en $z = 2$
   (c) $f(z)$ tiene un polo simple en $z = 0$ y otro de segundo orden en $z = 2$

8. `//Villaplana//` Sea $f(z)$ analítica en todo su dominio D y $f'(z)$ contínua en C. Entonces:

   (a) $\oint_C f(z)dz = 0$
   (b) $\oint_C f(z)dz = 2\pi i a_{-1}$
   (c) Ninguna de las anteriores

9. `//Hernández Saz//` Cuál de las siguientes condiciones no es Cauchy-Riemann

   (a) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$
   (b) $-\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial x}$
   (c) $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$

10. `//Navalón//` Teniendo en cuenta las de Cauchy-Riemann indicar cuál de las siguientes expresiones NO es correcta $(f = u + iv)$:

    (a) $\dfrac{df}{dz^*} = 0$
    (b) $\left|\vec{\nabla} u\right|^2 = \left|\vec{\nabla} v\right|^2$
    (c) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{\partial v}{\partial y}; \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial x}$

11. `//Martín-Albo//` Considérese el desarrollo de Laurent de $f(z) = \dfrac{\pi z^4 + \sinh z}{(z-1)^{81}}$. El residuo a_{-1} en $z = 1$ es

    (a) $81 \cdot 2\pi i$
    (b) $\dfrac{1}{80!}\dfrac{e^2 - 1}{2e}$
    (c) $\dfrac{1}{81!}\cosh \pi$

12. `//Mtnez. Torres//` En aerodinámica y en mecánica de fluídos, las funciones ϕ y ψ en $f(z) = \phi + i\psi$, donde $f(z)$ es análitica, se llaman potencial de velocidad y función de flujo o corriente, respectivamente. Si $\phi = x^2 + 4x - y^2 + 2y$:

(a) $f(z) = z^2 + 4z - 2iz + C_1$, siendo C_1 una constante imaginaria
(b) $f(z) = z^2 + 4z - 2i + C_2$, siendo C_2 una constante real
(c) Ninguna de la anteriores

13. //Pastor// ¿Cuál es la derivada de $f(z) = z \sin z$?

(a) $\sin x \cosh y + x \cos x \cosh y + y \sinh y \sin x + i[\sinh y \cos x - x \sin x \sinh y + y \cosh y \cos x]$
(b) $\sin x + x \cos x + i(\sin y + y \cos y)$
(c) No es derivable

14. //Doménech// Las relaciones de Cauchy-Riemann:

(a) Son la condición necesaria para que una función sea singular
(b) Son la condición necesaria para que una función sea regular
(c) Son las siguientes: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{\partial v}{\partial y}; \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial x}$

15. //Clemente// Si $f(z)$ y g(z) son analíticas en R y $f(z) = g(z)$ en $S \subset R$, entonces

(a) $f(z) \neq g(z)$ en R
(b) $f(z) = g(z)$ en R
(c) Ninguna de las anteriores

16. //Rdgz. Sánchez// ¿Cuál de esta afirmaciones es falsa?

(a) $f(z)$ es analítica si $\dfrac{df}{dz^*} \neq 0$
(b) $\left|\vec{\bigtriangledown} u\right|^2 = \left|\vec{\bigtriangledown} v\right|^2$ con $f(z) = u + iv$ analítica
(c) $\oint_C f(z)dz = 0$ si $f(z)$ analítica en D, $f'(z)$ continua en C y la curva C encierra el dominio D del plano complejo

17. //Mateu// Dada la función $f(z) = |\cos x| - |\sin x + \cos y|\, i$, hallar el dominio del plano complejo donde la función va a ser analítica.

(a) Primero y tercero
(b) Primero, segundo y tercero
(c) Segundo y cuarto

18. //López Villarroya// Sea $f(z) = \sqrt{z^3 + z}$. $\forall z \in C$

(a) $f(z)$ no tiene puntos de ramificación
(b) $z = i$, $z = -i$, $z = 0$ sonpuntos de ramificación de $f(z)$
(c) Sólo $z = i$, $z = -i$ son puntos de ramificación de $f(z)$

19. //Glez. Gala// El valor de la integral $\oint_{|z|=2} \dfrac{1}{(z-3)(z-1)^2 z} dz$ es:

(a) $-\dfrac{7\pi i}{6}$

(b) $-\dfrac{\pi i}{6}$

(c) $-\dfrac{3\pi i}{2}$

20. `//Gosálbez//` Definimos como fuerza conservativa compleja aquella que cumple $\oint f(z)dz = 0$ para cualquier camino en plano complejo. Se podría definir un potencial del siguiente tipo de fuerza $\exp\left(\dfrac{1}{z^2+1}\right)$

   (a) Sí

   (b) No

   (c) Según el camino