J.A. Oteo. Departamento de Física Teórica (UVEG).[MMF3-B:2002-3]

TEMA 7: Solución en serie de EDO.*

6 de junio de 2003

1. `//Oteo//` Dada la EDO $(z^2+z-6)y''+y=0$, la solución en serie de potencias alrededor de $z=0$ tiene un radio de convergencia

   a) 2

   b) 0

   c) 3

2. `//Pérez Ductor [Mayoral]//` Señala cuál de las siguientes afirmaciones sobre el wronskiano es incorrecta:

   a) $W'(x)=pW(x)$

   b) $W'(x)=-pW(x)$

   c) $W(x)=C\exp[-\int p(s)ds]$

3. `//Pérez Ductor [Mayoral]//` Halla la ec. de índices de $y''+y'/2z+y/4z=0$ y obtén la fórmula de recurrencia para $\sigma=1/2$.

   a) $\sigma(\sigma-1)+\sigma/2=0$, $a_n=-a_{n-1}/2n(2n+1)$

   b) $\sigma(\sigma-1)+\sigma/2=0$, $a_n=-a_{n+1}/2n(n+1)$

   c) $\sigma^2+\sigma-3=0$, $a_n=-2a_{n-1}/(3n+1)$

4. `//Mayoral [Planelles]//` La fórmula de Rodrigues y el polinomio de Legendre de orden 2 son respectivamente:

   a) $P_l(z)=\frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dz^l}(z^2-1)^l$, $P_2(z)=(3z^2-1)/2$

   b) $P_l(z)=\frac{d^l}{dz^l}(z^2-1)^l$, $P_2(z)=3z^2/2$

   c) $P_l(z)=\frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dz^l}(z^2-1)^l$, $P_2(z)=z+2$

5. `//Planells [Planelles]//` Dada la EDO $4zy''+2y'+y=0$, donde $z=0$ es pto. singular regular, su ec. de índices es:

   a) $\sigma(\sigma+1)+\sigma/2=0$

   b) $\sigma^2-\sigma/2=0$

   c) $\sigma(\sigma-1)+\sigma/2+1/4=0$

6. `//Planelles,Vargas, Lladró [Planells,Engra,Marín]//` La relación de ortogonalidad de los pols. de Legendre es:

*Preguntas y respuestas contrastadas por [...]

a) $\int_{-1}^{1} P_l(z)P_k(z)dz = \frac{2}{2l+1}\delta_{lk}$

b) $\int_{-1}^{1} P_l(z)P_k(z)dz = \delta_{lk}$

c) $\int_{-1}^{1} P_l(z)P_k(z)dz = \frac{2}{2l+1}$

7. `//Arnau [Ruiz]//` Dada la EDO $z^3y'' - z^2y' + z^2y = 0$, ¿de qué clase es el punto $z = 0$?

   a) Singular regular

   b) Regular

   c) Singular

8. `//Lacomba [Ruiz]//` Sea la EDO $y'' - zy' - 2y = 0$. De la solución en serie de potencias alrededor de $z = 0$ se obtiene la siguiente relación de recurrencia:

   a) $a_{n+1} = a_n/(n+1)$

   b) $a_{n+2} = a_n/(n+1)$

   c) $a_{n+3} = a_n/(n+1)$

9. `//Engra [Marco]` ¿Cuál es la ec. de índices de la serie de Frobenius?

   a) $\sigma^2 - \sigma + s(0)\sigma + t(0) = 0$

   b) $\sigma^2 - \sigma + t(0)\sigma - s(0) = 0$

   c) $\sigma(\sigma + 1) + s(0)\sigma + t(0) = 0$

10. `//Engra [Vargas]` En la EDO $(1-z^2)y'' - 2zy' + \lambda y = 0$, la recurrencia para solución en serie de potencias es:

    a) $a_{n+2} = \frac{(n(n+1)-\lambda)a_n}{(n+2)(n+1)}$

    b) $a_{n+2} = \frac{n(n+1)-\lambda}{(n+2)a_n}$

    c) $a_{n+1} = \frac{(n(n+1)-\lambda)a_n}{(n+2)(n+1)}$

11. `//Engra [Vargas]` Dada la EDO $y'' - \frac{2}{(1-z)^2}y = 0$, caracterizar el punto $z = 1$ según $p(z), q(z)$.

    a) Presenta una singularidad en $q(z)$

    b) Presenta una singularidad en $p(z)$

    c) No presenta ninguna singularidad

12. `//Gascó [Planelles]//` ¿Cuál de las series siguientes es de Frobenius?

    a) $z^\sigma \sum_0^\infty a_n z^n$, $a_0 = 0$, $\sigma \in \mathcal{C}$

    b) $z^{\sigma+1} \sum_0^\infty a_n z^{n-1}$, $a_0 \neq 0$, $\sigma \in \mathcal{C}$

    c) $\sum_0^\infty a_n z^\sigma$, $\sigma \in \mathcal{C}$

13. `//Gascó [Planelles]//` El coeficiente a_n de la serie de Frobenius $4zy'' + 2y' + y = 0$, $z_0 = 0$, $\sigma = 0$, es:

    a) $(-1)^n/2n!$

    b) $1/(3n-1)$

    c) $2n!(n-1)/3n^2$

14. `//Vicente [Gascó]//` Si $P_l(x)$ y $P_k(x)$ son polinomios de Legendre, entonces:

    a) $P_l P_k = \delta_{lk}$

    b) $\int_{-1}^{+1} P_l P_k dx = \delta_{lk}$

    c) $\int_{-1}^{+1} P_l P_k dx = \frac{2}{2l+1}\delta_{lk}$

15. `//J.Navarro [Arnau]//` La fórmula de Rodrigues $P_l(z) = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dz^l}(z^2-1)^l$ es consecuencia de intentar hallar el resultado analítico de:

    a) $\frac{d^l}{dz^l}(z^2-1)^l$

    b) $\frac{d^l}{dz^l}(z^l-1)^2$

    c) $\frac{d^l}{dz^l}(z^{(l-2)}-1)^4$

16. `//Ruiz [Lacomba]//` Dada la EDO $z^2y'' - z(1+z)y' + z^3y = 0$, decir cuál de las siguientes afirmaciones es la correcta.

    a) $z = 0$ es un pto. ordinario

    b) En $z = 0$ los índices valen $\sigma_1 = 0$ y $\sigma_2 = 2$

    c) $z = -1$ es un pto. singular regular

17. `//Marco [Engra]//` Sea la EDO $z^2(z^2-1)y'' + 2z^3y' + \mu y = 0$. Referente a los $p(z)$ y $q(z)$ asociados a ella y desarrollando alrededor de $z_0 = 0$ debemos:

    a) redefinir sólo $p(z)$ como $s(z) = (z - z_0)p(z)$

    b) redefinir sólo $q(z)$ como $t(z) = (z - z_0)^2 q(z)$

    c) Redefinimos ambos como $s(z)$ y $t(z)$

18. `//Marco [Vargas]//` Sean P_l, P_k dos polinomios de Legendre. Definimos $< P_l, P_k >$, ¿cuánto vale dicho producto para $l \neq k$?

    a) $\frac{2}{2l+1}$

    b) 0

    c) 1

19. `//Marco [Engra]//` Siendo la EDO $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$. Siendo el wronskiano

    $$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

    Siendo y_1, y_2 las soluciones de la EDO ¿Cuál de éstas no es expresión del wronskiano?

    a) $W(x) = -W'(x)/p(x)$

    b) $W(x) = C\exp[-\int^x p(s)ds]$

    c) $W(x) = \ln(q(x)/p(x))$

20. `//Marín [Lladró]//` La ec. de Legendre $(1-z^2)y'' - 2zy' + l(l+1)y = 0$ tiene sigularidades en:

    a) $z = 1$ singular regular; $z = 0$ esencial

    b) $z \longrightarrow \infty$, $z = \pm 1$ son regulares; no tiene esenciales

    c) $z = 1$ singular regular; $z \longrightarrow \infty$ esencial

21. `//Limeres [Gascó]//` La solución en serie alrededor de $z_0 = 0$ de la EDO $y'' + 5y/(2-z) = 0$ satisface la ley de recurrencia:

    a) $a_n = [(n+1)a_{n-1} + a_{n-2}]/5$

    b) $a_n = -[2(n+1)(n+2)a_{n-2} - na_{n-1}]/5$

    c) Ninguna de las anteriores

22. `//?????? [J.Navarro]//` Señala cuál es la expresión correcta:

    a) $\frac{d^{2l}}{dz^{2l}}(z^2-1)^l = (2l)!$

    b) $\int_{-1}^{1} P_l(z)P_k(z)dz = \delta_{lk}$

    c) $\int_{-1}^{1} P_l(z)P_l(z)dz = \|P_l\|^2 = \frac{2l}{2l+1}$