J.A. Oteo. Departamento de Física Teórica (UVEG).[MMF3-B:2003-4]

TEMA 4: Variable compleja *

31 de enero de 2005

1. `//Oteo//` Determinar la serie de Laurent alrededor de $z = 1$ de la función $(x+2)/(x^2-1)$

   a) $\frac{3}{2}(x-1)^{-1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8}(x-1) - \frac{1}{16}(x-1)^2 + \frac{1}{32}(x-1)^3 + \frac{1}{64}(x-1)^4 + O\left((x-1)^5\right)$

   b) $\frac{3}{2}(x-1)^{-1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8}(x-1) - \frac{1}{16}(x-1)^2 - \frac{1}{32}(x-1)^3 - \frac{1}{64}(x-1)^4 + O\left((x-1)^5\right)$

   c) $\frac{3}{2}(x-1)^{-1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8}(x-1) - \frac{1}{16}(x-1)^2 + \frac{1}{32}(x-1)^3 - \frac{1}{64}(x-1)^4 + O\left((x-1)^5\right)$

2. `//Oteo//` Determinar el disco de convergencia de la serie anterior

   a) $0 < |z-1| < 1$

   b) $0 < |z-1| < 2$

   c) $1 < |z-1| < 2$

3. `//Oteo//` Calcular el valor ppal. de la integral $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z/(z-1)(z+i)$

   a) $\pi i/(1+i)$

   b) $\pi/(1+i)$

   c) $\pi i/(1-i)$

4. `//Oteo//` Calcular mediante métodos de variable compleja $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{x^4+3\,x^2+2}$

   a) $-\pi\left(-2+\sqrt{2}\right)/2$

   b) $-\pi\left(2-\sqrt{2}\right)/2$

   c) $-\pi\left(2+\sqrt{2}\right)/2$

5. `//Gisbert [Pastor]//` La función $f(z)$ tiene un polo simple en z_0, exterior a un circuito C. La integral $\oint_C f(z)\mathrm{d}z$ vale

   a) 0

   b) cte.$\neq 0$

   c) $= \oint_{C_1} f(z)\mathrm{d}z$, C_1 engloba a z_0

* Preguntas y respuestas contrastadas por [...]

6. `//Pastor [Gisbert]//` Siendo, en el plano complejo, la función$f(z) = 1/z$ ¿cuál es la solución de $\int_C f(z)\mathrm{d}z$?

   a) Depende de R (si $z = 0 \in C$)

   b) πi (sea cual sea C)

   c) 0 (si $z = 0 \notin C$)

7. `//Pastor [Gisbert]//` Siendo C un circuito cerrado, con $f(z)$ analítica dentro y sobre C, y siendo z_0 un pto. interior a C, se cumple

   a) Lema de Jordan: $\oint_C e^{imz} f(z)\mathrm{d}z \to 0$

   b) Th. Cauchy: $\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 0$

   c) Fórmula integral de Cauchy: $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)\mathrm{d}z}{z-z_0}$

8. `//Cantos [Gisbert]//` Sea $f(z) = 1/(z-6)$, entonces

   a) $\exists$ polo orden 6 con $a_{-1} = 3/2$

   b) $\oint_\gamma f(z)\mathrm{d}z$, t.q. γ contiene a los polos presentes, el valor de la integral es $2\pi i$

   c) $\oint_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$, ya que $f(z)$ no contiene ningún polo o singularidad

9. `//Forneli [Pérez]//` Señala la respuesta correcta

   a) $\oint_\gamma \mathrm{d}z/4z = 3\pi$

   b) $\oint_\gamma z\mathrm{d}z = \pi/2$

   c) $\oint_\gamma \mathrm{d}z/(3z(z-2)) = 0$

10. `//Grau [Rodriguez ]//` Si $\lim_{z\to z_0}[(z-z_0)^n f(z)] = \infty$, ¿De qué tipo será la singularidad?

    a) Polo

    b) Esencial

    c) No hay singularidad

11. `//Grau [Rodriguez]//` La fórmula integral de Cauchy es $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)\mathrm{d}z}{z-z_0}$, con las condiciones

    a) $f(z)$ es analítica dentro y sobre C, z_0 es un punto dentro de C

    b) $f(z)$ es analítica dentro y sobre C, z_0 es un punto dentro o sobre C

    c) $f(z)$ es analítica dentro de C, z_0 es un punto dentro de C

12. `//García Ramírez [Mena]//` ¿Qué singularidad tiene la función $f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{1+z}$?

    a) Polo

    b) No tiene singularidades

    c) Polo de orden 3

13. `//García Ramírez [Mena]//` Para un polo de orden m la fórmula que usamos para calcular el residuo es

    a) $a_{-1} = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)]$

b) $a_{-1} = \frac{1}{(m+1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)]$

c) $a_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to 0} \frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)]$

14. `//Rausell [Rodriguez]//` Según la fórmula integral de Cauchy, $f(z_0) = \frac{1}{(n+1)2\pi i} \oint \frac{f(z_0)}{z-z_0}\mathrm{d}z$ equivale a

    a) $f^{(n)}(z_0)/(n+1)$

    b) $f^{(n)}(z_0)/(n+1)!$

    c) $f^{(n)}(z_0)(n-1)^{-1}$

15. `//Raussel [Rodriguez]//` La integral curvilínea de un semicírculo definido sobre una función $f(z)$ arbutraria vale

    a) $i\pi$ si tiene singularidad, 0 si no

    b) $i\pi$ si tiene singularidad, π si no

    c) $i\pi$ en ambos casos

16. `//Rodriguez [Rausell]//` ¿Cuál es el residuo de $1/z$ en $z = 0$?

    a) 1

    b) $2\pi i$

    c) $\pi/2i$

17. `//Rodríguez [Raussel]//` ¿Cuánto vale $\oint_\gamma \mathrm{d}z/z$, donde γ contiene al pto. $z = 0$?

    a) 0

    b) $2\pi i$

    c) 1

18. `//Castelló [Espuch]//` Dí qué tipo de singularidad tiene la función $f(z) = 1/(2-z)$, y averigüa cuál es su residuo en $z = 2$

    a) Polo de orden 0, $a_{-1} = 2$

    b) Polo de orden 1, $a_{-1} = -1$

    c) Polo de orden 1, $a_{-1} = 1$

19. `//Castelló [Espuch]//` ¿Es la función $f(z) = 4x + i$ analítica?

    a) Sí

    b) No

    c) Sólo cuando $x = -i/4$ converge

20. `//Espuch [Castelló]//` ¿Cuál es el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+3)^n}{(n+2)3^n}$?

    a) 3

    b) 5

    c) 0

21. `//Espuch [castelló]//` Calcular $\oint_C \frac{z+1}{z^2+1}\mathrm{d}z$, donde C encierra la singularidades del integrando

a) 0
b) $2\pi(i-1)$
c) $2\pi i$

22. `//Doña [Alcaide]//` Las relaciones de Cauchy-Riemann nos indican

a) Si una función es regular
b) Si el dominio de una función es regular
c) Si una función deja de ser regular

23. `//Doña [Alcaide]//` Decimos que $z = z_0$ es una singularidad aislada si $f(z)$

a) es analítica en z_0 y alrededor de z_0 no lo es
b) no es analítica en z_0 pero alrededor de éste sí lo es
c) no es analítica en z_0 y alrededor de éste tampoco

24. `//Alcaide [Doña]//` Considera la función $f(z) = (z-2)/(z^2-4)$. La función $f(z)$ tiene

a) Un polo simple en $z = 2$
b) Un polo simple en $z = \infty$
c) Un polo simple en $z = -2$

25. `//Alcaide [Doña]//` El valor de la integral $\int_0^\infty \mathrm{d}z/(z^6+1)$ es

a) $2\pi/3$
b) $\pi/3$
c) $-\pi/3$

26. `//Almagro [Escobar]//` ¿En qué dominio del plano complejo es $|x| - i|y|$ una función analítica?

a) En todo el plano complejo
b) En el segundo y cuarto cuadrantes
c) Sólo en $(0,0)$

27. `//Almagro [Escobar]//` Determina los tipos de singularidades que posee la siguiente función en $z_1 = 0$ y $z_2 = \infty$, $f(z) = (1+z^3)/z^2$

a) z_1 polo simple, z_2 sing. esencial
b) z_1 polo doble, z_2 polo simple
c) z_1 polo simple, z_2 polo simple

28. `//Escobar [Almagro]//` Encuentra las partes del plano complejo en las cuales la serie $\sum_0^\infty n! z^{n+1}$ converge

a) En todo el plano complejo
b) Sólo converge en $z = 0$
c) En la circunferencia de radio unidad

29. `//García Saiz [Doña]//` Tenemos la función $f(z) = (z^2+1)/(2z^3 - 3z^2 + 2z - 3)$ y queremos realizar el desarrollo de Taylor alrededor de $z = 2/3$. Decir cuál es la respuesta correcta

a) Se puede realizar y su radio de convergencia es $5/6$

b) Se puede realizar y su radio de convergencia es $1/3$

c) No se puede realizar

30. `//Méndez [Pastor]//` Evalúa $\oint_C \frac{5z^2-3z+2}{(z-1)^3}\mathrm{d}z$, donde C es una curva cerrada simple cualquiera que encierra a $z=1$

    a) $4\pi^2 i/3$

    b) 0

    c) $10\pi i$

31. `//Méndez [Pastor]//` Determina los polos y residuos de la función $z^2/[(z-2)(z^2+1)]$

    a) $z=2$: polo simple, $a_{-1}=(1-2i)/10$; $z=-i$: polo simple, $a_{-1}=1/8$; $z=-2$: polo de orden 3, $a_{-1}=-1/8$

    b) $z=i$: polo simple, $a_{-1}=4/5$; $z=0$: polo simple, $a_{-1}=(1+2i)/10$; $z=2$: polo simple, $a_{-1}=4/5$

    c) $z=0$: polo simple, $a_{-1}=1/8$; $z=-2$: polo simple, $a_{-1}=-1/8$