J.A. Oteo y O. Varela. Departamento de Física Teórica (UVEG).[MMF3-B:2004-5]

TEMA 7: Solución en serie de ecuaciones diferenciales ordinarias *

25 de mayo de 2005

1. //Oteo// Dada la ec. $(1-z^2)y'' - 2zy' + 20y = 0$ entonces una de las sol. linealmente independientes

   a) Es un polinomio
   b) Tiene un término logarítmico
   c) Diverge en $z = 0$

2. //Oteo// Dada la ec. $z^2y'' + zy' + z^2y - 2y = 0$ entonces el pto. del infinito es

   a) Singularidad esencial
   b) Singular regular
   c) Regular

3. //Varela// Una de las dos soluciones de la ecuación diferencial $y'' + p(z)y' + q(z)y = 0$, donde $q(z) = -\frac{1}{4z^2}$, es $y_1(z) = \frac{1}{\sqrt{z}}$.

   a) La otra solución linealmente independiente es $y_2(z) = z$.
   b) La solución más general a la ecuación diferencial es $y(z) = \frac{c_1+c_2z^2}{\sqrt{z}}$, donde c_1, c_2 son constantes.
   c) El wronskiano es $W = \frac{1}{z}$.

4. //Varela// Si $z = 0$ y $z = i$ son, respectivamente, un punto singular y un punto ordinario de la ecuación diferencial $y'' + p(z)y' + q(z)y = 0$,

   a) las soluciones en serie en torno a $z = i$ convergen para z tales que $|z-i| < 1$.
   b) existen dos soluciones en serie de Taylor en torno a $z = i$, no necesariamente linealmente independientes.
   c) existen dos soluciones en serie de Frobenius en torno a $z = 0$, linealmente independientes.

5. //Varela// La integral $\int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}}e^{-2x}dx$ vale

   a) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
   b) $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.
   c) $-2\sqrt{\pi}$.

*Preguntas y respuestas contrastadas por [...]

6. `//Varela//` La función Beta es $\beta(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.
   - *a)* $\beta(-\frac{2k+1}{2}, \frac{2k+3}{2}) = (-1)^{k+1}\pi,\ k = 0, 1, \ldots$
   - *b)* $\beta(-\frac{9}{2}, 5) = \frac{315}{2}$.
   - *c)* $\beta(-\frac{7}{2}, \frac{11}{2}) = \frac{21\cdot 15^2}{2^9}\pi$.

7. `//Varela//` Las funciones reales $\phi_n(x)$, $n = 0, 1, \ldots$, son ortogonales (con peso 1) y forman base para las funciones bien comportadas en el intervalo $[a, b]$, con $\int_a^b \phi_n(x)\phi_m(x)dx = \pi n!\ \delta_{nm}$.
   - *a)* Toda función $f(x)$ bien comportada sobre $[a, b]$ se puede escribir como combinación lineal de ellas, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\phi_n(x)$, con $a_n = \frac{1}{\sqrt{\pi n!}} \int_a^b \phi_n(x)f(x)dx$.
   - *b)* $\phi_n(x)$ no son necesariamente polinomios.
   - *c)* $\phi_n(x)$ no son necesariamente linealmente independientes.

8. `//Varela//` Los polinomios de Legendre satisfacen la relación de recurrencia $(n + 1)P_{n+1} - (2n + 1)zP_n + nP_{n-1} = 0$. Sabiendo que $P_0(z) = 1$, $P_1(z) = z$, $P_2(z) = \frac{1}{2}(3z^2 - 1)$, ¿Cuál de las siguientes expresiones es correcta?
   - *a)* $P_3(z) = \frac{1}{2}(5z^3 - 2z)$.
   - *b)* $P_4(z) = \frac{1}{8}(35z^4 - 30z^2 + 2)$.
   - *c)* $P_5(z) = \frac{1}{8}(63z^5 - 70z^3 + 15z)$.

9. `// Adriá [Pastor]//` La función Gamma es:
   - *a)* $\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} \exp(x)dx$.
   - *b)* $\Gamma(n) = \int_{-\infty}^\infty x^{n-1} \exp(-x)dx$.
   - *c)* $\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} \exp(-x)dx$.

10. `// Espuch [García Ramírez]//` La función β viene definida por
    - *a)* $\beta(p, q) = \int_0^1 t^{1-p}(1 - t)^q dt$, para $\mathrm{Re}\{p\} > 0$, $\mathrm{Re}\{q\} > 0$.
    - *b)* $\beta(p, q) = \int_0^1 t^{p-1}(1 - t)^{q-1} dt$, para $\mathrm{Re}\{p\} > 0$, $\mathrm{Re}\{q\} > 0$.
    - *c)* $\beta(p, q) = \int_0^1 t^{p-1}(1 - t)^q dt$, para $\mathrm{Re}\{p\} < 0$, $\mathrm{Re}\{q\} > 0$.

11. `// Espuch [García Ramírez]//` Haciendo uso de $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$, calcular $\Gamma(\frac{2k+1}{2})$:
    - *a)* $\Gamma(\frac{2k+1}{2}) = \frac{(2k)!\sqrt{\pi}}{2^{2k}k!}$
    - *b)* $\Gamma(\frac{2k+1}{2}) = \frac{2(k+1)!\sqrt{\pi}}{2^{2k}k!}$
    - *c)* $\Gamma(\frac{2k+1}{2}) = \frac{(2k)!\sqrt{\pi}}{2^{k}k!}$

12. `// García Ramírez [Espuch]//` La función Gamma viene definida por
    - *a)* $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z+1}e^{-t}dt$, $z \in \mathbb{C}/\mathrm{Re}\{z\} > 0$.
    - *b)* $\Gamma(z) = \int_{-\infty}^\infty t^{z+1}e^{-t}dt$, $z \in \mathbb{C}/\mathrm{Re}\{z\} > 0$.
    - *c)* $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$, $z \in \mathbb{C}/\mathrm{Re}\{z\} > 0$.

13. `// García Ramírez [Espuch]//` Encontrar $p(x)$, $q(x)$ de la siguiente ecuación $(2x^2 + x)y'' + 2x^3y' - xy = 0$.

a) $p(x) = \frac{2x^2}{2x+1}$, $q(x) = -\frac{1}{2x-1}$.
b) $p(x) = -\frac{2x^2}{2x-1}$, $q(x) = \frac{1}{2x+1}$.
c) $p(x) = \frac{2x^2}{2x+1}$, $q(x) = -\frac{1}{2x+1}$.

14. `//Martí [Navarro]//` Resuelve la ecuación indicial para la EDO $-4zy''+ 2zy' + \frac{3}{z}y = 0$.

a) 1 y 3
b) $3/2$ y $-1/2$
c) $1/2$ y 2

15. `//Escobar [Cantos]//` Dada la ecuación $z(z-1)y'' + 3zy' + y = 0$, una solución es $y_1 = -\frac{z}{(1-z^2)}$. ¿Cuál es la otra solución?

a) y_2 es una función trigonométrica.
b) y_2 es un polinomio.
c) y_2 es una función logarítmica.

16. `//Escobar [Cantos]//` El teorema de Fuch afirma:

a) Toda EDO singular tiene al menos una solución.
b) Toda EDO de orden n tiene n soluciones.
c) Toda EDO singular regular tiene al menos una solución.

17. `//Cantos [Escobar]//` La ecuación de Bessel es $z^2y'' + zy' + (z^2 - \nu^2)y = 0$. Resolviendo la ecuación alrededor de $z = 0$ observamos que:

a) $z = 0$ es un punto singular regular, ya que $t(0) = 1$, $s(0) = -\nu^2$.
b) $z = 0$ es un punto singular regular, ya que $t(0) = -1$, $s(0) = \nu^2$.
c) $z = 0$ no puede estudiarse, ya que en ese punto la ecuación de Bessel no está definida.

18. `//Cantos [Escobar]//` La relación de recurrencia en la ecuación de Bessel para $\nu \notin \mathbb{Z}$ y $\nu \neq \pm 1/2$ se corresponde con:

a) $a_n = \frac{-1}{n(n\pm 2\nu)} a_{n-2}$, $n \geq 2$.
b) $a_n = \frac{1}{2n(\pm\nu - n)} a_{n-1}$, $n \geq 1$.
c) $a_n = \frac{1}{n(n\pm 2\nu)} a_{n-2}$, $n \geq 1$.

19. `//Pastor [Navarro]//` Sea la EDO $4zy'' + 2y' + y = 0$. ¿Qué tipo de punto es $z = 0$?

a) ordinario
b) singular regular
c) singular esencial

20. `//Pastor [Navarro]//` Señala la sentencia correcta. W',

a) depende de $p(z)$.
b) depende de $q(z)$.
c) ninguna de las anteriores.

21. `// Navarro [Pastor]//` La función β se define, para $\text{Re}\{p\} > 0$, $\text{Re}\{q\} > 0$, como

    a) $\beta(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt$

    b) $\beta(p,q) = \int_0^\infty t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt$

    c) $\beta(p,q) = \int_0^1 t^p(1-t)^q dt$

22. `// Forneli [García Ramírez]//` Dada la ecuación diferencial $(2+z^2)y'' - 3zy' + y = 0$, señala los valores de $p(z)$ y $t(z)$:

    a) $p(z) = \frac{3z^2}{2+z^2}$, $t(z) = -\frac{z^2}{2+z^2}$.

    b) $p(z) = -\frac{3z}{2+z}$, $t(z) = \frac{z^2}{2+z^2}$.

    c) $p(z) = -\frac{3z}{2+z^2}$, $t(z) = \frac{z^2}{2+z^2}$.

23. `// Pérez [Martí]//` En la ecuación de Bessel, $z^2y''+zy'+(z^2-\nu^2)y = 0$, $y(z) = z^\sigma \sum_0^\infty a_n z^n$ ($z = 0$ singular regular) y $\sigma = \pm\nu$. Señala la respuesta correcta:

    a) Si $\nu \neq$ entero, las soluciones con $\sigma = \nu$ y $\sigma = -\nu$ son linealmente independientes.

    b) Si $\nu =$ entero, las soluciones con $\sigma = \nu$ y $\sigma = -\nu$ son linealmente independientes.

    c) Las soluciones con $\sigma = \nu$ y $\sigma = -\nu$ son siempre linealmente independientes.

24. `// Gisbert [Pastor]//` La solución en serie de una EDO ha resultado $y = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$ (cuyo radio de convergencia es $|z| < 1$), que es el desarrollo de $y = \ln(1+z)$. Ésta última solución es válida

    a) $\forall z$ menos $z = -1$.

    b) $\forall |z| < 1$.

    c) $\forall z \geq 0$.