J.A. Oteo. Departamento de Física Teórica (UVEG).[MMF3-B:2005-6]

TEMA 4: Variable compleja.*

23 de enero de 2006

1. //Oteo//

   a) Desarrollar en serie de potencias alrededor de $z = 4$, hasta tercer orden, la función $\log(1 + x)/(x - 4)^3$.

   b) Calcular los residuos de la función anterior.

   c) ¿En qué dominio del plano complejo es $f(z) = |x| + i|y|$ una función analítica?

   d) Determinar los cortes y puntos de ramificación de $\sqrt{z(z^2+1)}$ (dibujarlos de manera esquemática)

   e) Determinar el valor de $\oint_C \sin(z)/(z-1)\ dz$, donde C es la trayectoria circular de radio $R = 5$, centrada en $z = 0$

   f) Calcular $\int_C z^{-2}\ dz$, donde C es la trayectoria semicircular centrada en $z = 0$, de radio $R = 2$ y con $0 < \theta < \pi$

   g) Calcular
   $$\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x/a)}{(x^2-a^2)(x^2+a^2)}\ dx, \qquad a > 0$$

2. //Sandra [Pablo]//

   a) Estudiar los puntos singulares : a) $z^2/(z^2-1)$, b) $(z^2-z+1)/(z^2(z-1))$

   b) Calcular los radios de convergencia: a)$\sum_1^\infty z^n/(n-1)!$, b) $\sum_0^\infty 2^n z^n$

   c) Buscar la serie de Laurent de: $1/(4z(z-2)^2)$, $(z = 0, 2)$

3. //Jesús [Saúl]//

   a) Calcular
   $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(ax)}{(x^3+x)(x^2-4)} dx, \qquad a > 0$$

   b) Dominio de analiticidad de $f(z) = z^2 + iz$

4. //Saúl [Jesús]//

   a) Demuestra mediante el teorema de los residuos:
   $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x+ia)(x+ib)}, \qquad 0 < a < b$$

*Preguntas y soluciones contrastadas por [...]

b) Dada $f(z) = (x - iy)/(x^2 + y^2)$, ¿cumple las conds. de Cauchy-Riemnann? ¿Qué significa?

5. `//Pablo [Adrián]//`

   a) Calcular
   $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin mx}{(x^2+4)^2}, \qquad 0 < m$$

   b) Determinar las singularidades de: a) $\sinh z$, b) $e^z/(z^3 - z^2 - 3z - 9)$

6. `//Juan Fran [David]//` Calcular el radio de convergencia: a) $\sum_1^\infty z^n/n^3$, b) $\sum_1^\infty z^n/e^n$

7. `//Braulio [Luis]//` Identificar los ceros, polos y singularidades esenciales de la función: $f(z) = z^{2/3}$

8. `//Luis [Braulio]//` Dada $f(z) = [z^3(z+4)]^{-1}$, obtener la serie de Laurent hasta el término de orden 3, alrededor de $z = 0$ y $z = -4$

9. `//Arantxa [Alex]//`

   a) Calcular la serie de Laurent de $f(z) = [(z+1)(z-2)^2]^{-1}$ alrededor de $z = -1$ y $z = 2$

   b) Calcular el valor de la siguiente integral, donde el circuito es una circumferencia de radio 4, centrada en $z = 0$:
   $$\oint \frac{dz}{z(z-1)}$$

   c) Desarrollar $f(z) = [(z-1)(z-4)]^{-1}$ en serie de potencias alrdedor de $z = 0, 1, 4$

   d) Dada $f(z) = 1/(z-2)$, explicar el tipo de singularidad que tiene y calcular el residuo en $z = 2$

10. `//Alex [Arantxa]//` Determinar el radio de convergencia de las series: a) $\sum_1^\infty x^n/n^2$, b) $\sum_0^\infty (-1)^n x^{2n+1}/(2n+1)!$

11. `//David [Juan Fran]//`

    a) Sea $f(z)$ una función analítica, donde $Re(f(z)) = ((e^x - e^{-x})\cos y)/2$. Encontrar la función y expresarla en términos de z

    b) Calcular la integral
    $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x-i)(x+2)}$$

12. `//Adrián [Pablo]//`

    a) Calcular la integral $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2)/(x-i)^2\, dx$

    b) Desarrollar en serie de potencias $\cos(z)/z^2$