J.A. Oteo/O. Maciá. Departamento de Física Teórica (UVEG).[MMF3-B:2005-6]

TEMA 7 Y 8: Solución en series de EDO lineales. Funciones Especiales. *

2 de junio de 2006

1. //Oteo//
   a) Dada la EDO $z(z-1)y'' + 3zy' + y = 0$, si $y_1 = z/(1-z)^2$ es una sol., encontrar la segunda sol. l.i. y_2.
   b) Encontrar las dos sols. l.i. en serie alrededor de $z = 0$ de $y'' + 4y = 0$.
2. //Sandra [Pablo]// Encontrar la recurrencia para la sol. en serie alrededor de $z = 0$ de $2y'' + zy' + y = 0$.
3. //Juan Fran [David]// Encontrar la recurrencia para la sol. en serie alrededor de $z = 0$ de $y''/z - \lambda y' + [3(1 + 1/z)/(z + 1)]y = 0$.
4. //Pablo [Sandra]// Dada la EDO $(4 - z^2)y'' + zy' + \lambda y = 0$
   a) Determinar el radio de convergencia de la sol. en serie de Taylor entorno a $z = 0$
   b) Encontrar un valor de λ que proporcione una sol. polinómica.
   c) Con $\lambda = 15$ escribe dicho polinomio.
5. //Arantxa [Adrián]// Encontrar a sol. en serie alrededor de $z = 0$ de $y'' + zy' - 2y = 0$.
6. //Braulio [Luis]// Obtener la recurrencia para la sol. en serie alrededor de $z = 0$ de $z^2y'' - 5cy' + 8y = 0$, donde c es una constante.
7. //Alex [Arantxa]// Encontrar la sol. en serie alrededor de $z = 2$ de $zy'' - y/(1 - z) = 0$.
8. //Luis [Braulio]// Obtener la recurrencia para la sol. en serie alrededor de $z = 0$ las EDO siguientes: $y'' + y = 1/(1 - z)$; $y'' + y = \cos z$.
9. //Adrián [Pablo]// Obtener la sol. en serie alrededor de $z = 0$ de $y''' + y' = 0$. ¿Cuál es el radio de convergencia de la sol.?

*Preguntas y soluciones contrastadas por [...]

10. `// Maciá //` Sea la EDO inhomogenea de Laguerre
$$xy'' + (1-x)y' = L_2 + L_3$$
donde L_2, L_3 son polinomios de Laguerre de orden 2 y 3 respectivamente.
a) Comprobar que no está en la forma compacta de Sturm-Liouville y hallar un factor multiplicativo que permita transformarlo en una ecuacin equivalente que tenga esa forma.
b) El problema de autofunciones asociado a esta ecuación es
$$xy_n'' + (1-x)y_n' + \lambda_n y_n = 0$$
y utilizando la solución de prueba $y(x) = \sum_n a_n x^n$ hallar la relación de recurrencia. ¿Puede tener soluciones polinomicas?
c) Sea $\lambda_n = n$ un número natural, la fórmula de Rodrigues para los polinomios de Laguerre con autovalor $\lambda_n = n$ es $L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$. Estos polinomios satisfacen la relación de recurrencia $L_{n+1} + (x-2n-1)L_n + n^2 L_{n-1} = 0$. Hallar $L_4(x)$.
d) Teniendo en cuenta la relación de ortogonalidad de los polinomios de Laguerre
$$\int_0^\infty e^{-x} L_n(x) L_m(x) dx = \delta_{nm}(n!)^2$$
y que, en el caso de autofunciones no-normalizadas (que es el de este problema) la función de Green se escribe
$$G(x,z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{-\lambda_n} \frac{L_n(x) L_n^*(z)}{\int_0^\infty e^{-x} L_n(x) L_n^*(x) dx}$$
encontrar la solución general de la ecuación obtenida en el apartado (a).

11. `// Juan Fran [David]//` Dada la ecuación $x^2 y'' - 2xy' + (x+1)y = 0$
a) Transformarla a la forma compacta de Sturm-Liouville.
b) Estudiar sus puntos singulares.
c) Encontrar la relación de recurrencia según su desarrollo de Taylor alrededor de $x = 0$. Econtrar al menso 4 términos de este desarrollo.

12. `// Adrián [Pablo]//` Dada la ecuación de Chebyshev
$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0$$
a) Encontrar su forma compacta de Sturm-Liouville.
b) Si su fórmula de Rodrigues es $T_n(x) = \frac{(-2)^n n! (1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{(2n)!} \frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}$, encontrar T_0, T_1, T_2.

13. `// Braulio [Luis]//` Dada la ecuación $x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$, comprobar si presenta la forma compacta de Sturm-Liouville. En caso negativo obtener el factor multiplicativo necesario para tal fin.

14. `// Luis [Braulio]//` ¿Está la siguiente ecuación la forma compacta de Sturm-Liouville?
$$2y'' + e^x y' + \frac{37}{x} y = 0$$
¿Por qué? En caso de que no lo esté, transformarla a una forma que lo sea y comprobarlo explcitamente.

15. `// David [Juan Fran]//` (a) Sea $z^2y'' + (z^2 + 2z)y' = 0$, dar una solución $y(z)$ en serie alrededor de $z = 0$, y encontrar su forma compacta de Sturm-Liouville. (b) Sea $z^2y'' + (z + 2)y' - Ny = 0$, encontrar su relación de recurrencia y al menos tres soluciones polinómicas alrededor de $z_0 = 0$.

16. `//Sandra [Pablo]//` Obtén la solución general de la ecuación

$$y'' + 2y = sen(4x)$$

utilizando el método de la función de Green sabiendo que con las condiciones de contorno $y(0) = y(\pi) = 0$ para las autofunciones el operador diferencial $D = \frac{d^2}{dx^2} + 2$ es hermítico.

17. `//Pablo [Sandra]//` Sea la ecuación

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + l(l + 1) = 0$$

a) Utilizarndo la solucin en serie de prueba $y(x) = \sum a_n x^n$ encontrar la solución polinómica alrededor de $x = 0$ para $l = 3$.
b) Calcular $P_3(x)$ sabiendo que

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dx^l}(x^2 - 1)^l$$

c) Tomando P_0, P_1 calcular P_3 mediante la relación de recurrencia

$$(n + 1)P_{n+1} - (2n + 1)xP_n + nP_{n-1} = 0$$

d) Dada la ecuación inhomogenea $(1-x^2)y''-2xy' = P_3$, encontrar los puntos oridnarios y singulares de la ecuación.
e) Transforma la ecuación del eapartado (d) a la forma compacta de Sturm-Liouville.
f) Calcula la función de Green.
g) Obtener la solución general de la ecuación que resulta en el eapartado (e).