Pablo Roig. Instituto de Física Corpuscular (IFIC). [MMF3-B:2006-7]

TEMA 5: Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden *

4 de abril de 2007

1. `//Pablo Roig//` Resolver la edo que describe la caída de un cuerpo en presencia de fuerza de rozamiento con el aire proporcional a la velocidad con c.i. $v(t=0) = v_o$:

$$m \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = m\,g - k\,v\,.$$

2. `//Pablo Roig//` Resolver la edo que describe la posición de un hilo flexible suspendido por sus dos extremos (catenaria) con la c.c. de que la tangente en el punto más bajo sea horizontal, es decir, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}|_{(0,\,b)} = 0$. La ecuación de la catenaria es:

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}^2 x} = \frac{1}{a}\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,.$$

Discutir para qué relación entre a y b la respuesta es más sencilla (esto es fijar un sistema de unidades conveniente, a es el cociente entre la tensión en el punto más bajo y el peso específico lineal del hilo).

3. `//Pablo Roig//` Resolver el problema de un cuerpo que, en su movimiento, debe vencer una resistencia a su avance (debida a la presencia de un fluido, como p.ej. aire) de la forma $F = \lambda_1\,v + \lambda_2\,v^n$. Particularizar para $n = 2$ y la c.i. $v(t=0) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$.

$$m \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\,\lambda_1\,v - \lambda_2\,v^n\,.$$

4. `//Pablo Roig//` Dada la edo que satisface una familia de curvas $\Phi(x,\,y,\,z)$ -donde C es el parámetro de dicha familia-, se puede eliminar la dependencia en C usando dicha ecuación y su derivada respecto a x:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0\,.$$

*Preguntas y soluciones contrastadas por [...]

Así, se obtiene una $F\left(x,\, y,\, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)$. La edo de las trayectorias ortogonales viene descrita por $F\left(x,\, y,\, -\frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}\right)$. Considerar la familia de parábolas $y \,=\, C\,x^2$, hallar la trayectoria ortogonal a dicha familia y comprobar que se trata de una elipse de semiejes $a \,=\, 2\,C$ y $b \,=\, \sqrt{2}\,C$.

5. `//Pablo Roig//` Resolver la edo siguiente:

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 \,+\, 2\,x\,y\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \,+\, x^2\,y^2 \,=\, x^2\,,$$

con la c.i. $y(0) \,=\, 1$.

6. `//Pablo Roig//` Resolver la edo siguiente:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \,=\, e^{\frac{y}{x}} \,+\, \frac{y}{x}\,,$$

con la c.c. $y(1) \,=\, 0$.

7. `//Pablo Roig//` Resolver la edo siguiente:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \,=\, 4\,\frac{y}{x} \,+\, x\,\sqrt{y}\,,$$

con la c.c. $y(1) \,=\, 25$.

8. `//Laura Molina [Ana Doblas]//` La fuerza electromotriz (f.e.m., ξ) de un circuito de corriente alterna con intensidad de corriente I, resistencia R e inductancia (autoinducción) L, viene dada por la caída de tensión (potencial) en la resistencia, IR, más la f.e.m. de autoinducción, $L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$. Esto es, el circuito viene gobernado por la siguiente edo:

$$I\,R \,+\, L\,\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \,=\, \xi(t)\,.$$

Determinar la intensidad de corriente, I, en un instante t,

   a) si $\xi(t) \,=\, \xi_0$ y la corriente cuando $t \,=\, 0$ es I_0.

   b) si $\xi \,=\, E\,\mathrm{sen}(\omega\,t)$ (tanto E como ω son constantes conocidas) e $I \,=\, 0$ cuando $t \,=\, 0$.

9. `//Néstor Chinillach [Pablo Bellido]//` Comprobar si las siguientes ecuaciones son exactas y, en dicho caso, resolverlas:

   a)

$$e^y\,\mathrm{d}x \,+\, (x\,e^y \,+\, 2\,y)\,\mathrm{d}y \,=\, 0$$

   b)

$$\left(e^{x+y} - \cos(x)\right)\,\mathrm{d}x \,+\, \left(e^{x+y} - \mathrm{sen}(x)\right)\mathrm{d}y \,=\, 0$$

10. `//Antonio Crespo [Pablo Bellido]//` Resolver la siguiente ecuación homogénea:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \,=\, \frac{y}{x} \,+\, \frac{1}{3}\,\sec(x)\,.$$

11. `//Pilar Amblar [Antonio Crespo]//` Resolver la siguiente edo:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{\left(2\,x^2 + y^2 + x\right)}{x\,y}\,.$$

12. `//Ana Doblas [Laura Molina]//` Resolver la ecuación lineal:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 2\,x\,y = 4\,x\,.$$

13. `//Pablo Bellido [Antonio Crespo]//` Resolver la siguiente edo transformándola previamente en homogénea:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2\,x + 2\,y + 4}{x - 3\,y - 2}\,.$$

14. `//Viki Sánchez [Pablo Roig]//` Obtener la solución a

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2\,x - 5\,y + 3}{2\,x + 4\,y - 6}\,.$$

15. `//Guadalupe García [Viki Sánchez]//` Resolver la siguiente ecuación diferencial exacta con la condición de que la función cuya diferencial es exacta valga 4 y la función solución pase por el origen:

$$[\mathrm{Ln}(x + 1)\cos(y)]\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{\sin(y)}{x + 1} = 0\,.$$

16. `//Vicente Montañana [Guadalupe García]//` Resolver la ecuación diferencial

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \tan(x)\,y = 1\,,$$

sujeta a la condición de que $y(0) = 1$.

17. `//Juan Soria [Pablo Roig]` Resuelva:

$$x\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 4\,y = x^6 - \mathrm{e}^x\,.$$