Pablo Roig. Instituto de Física Corpuscular (IFIC). [MMF3-B:2006-7]

TEMA 6: Ecuaciones diferenciales ordinarias de orden superior *

13 de abril de 2007

1. //Pablo Roig// Considerar el problema de las oscilaciones libres (sin fuerza externa aplicada) de una masa m acoplada a un muelle de cte. elástica k en presencia de una fuerza de rozamiento proporcional a la velocidad. Es decir, resolver la edo
$$m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = -k\,y - \lambda\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\,,$$
sujeta a las c.i. $y(0) = 0$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(0) = 0$. Se recomienda escribir la edo en la forma $(' \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t})$ $y'' + p\,y' + q\,y = 0$ y tener en cuenta la distinta naturaleza que pueden tener las raíces dependiendo de los valores de p y q (reales y distintas, reales e iguales, imaginarias puras o complejas).

2. //Pablo Roig// Resolver la edo que describe el siguiente Oscilador Armónico Forzado
$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2\,x = \cos(\omega_0\,t)\,.$$
Obsérvese que la frecuencia de la fuerza aplicada es la misma que la propia del oscilador.

3. //Pablo Roig// Hallar la solución general de la ecuación:
$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + 9\,y = \left(x^2 + 1\right)\,e^{3\,x}\,.$$

4. //Pablo Roig// Hallar la solución general de la ecuación:
$$\frac{\mathrm{d}^4y}{\mathrm{d}x^4} - y = f(x)\,,$$
con
   a) $f(x) = x^3 + 1$.
   b) $f(x) = 5\cos(x)$.

5. //Pablo Roig// Resolver la ecuación diferencial (en este ejercicio, y en los siguientes, $' \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$):
$$x\,y'' + y' = x^2\,.$$
Determinar las constantes de integración usando que se debe cumplir simultáneamente que $y(1) = 1$ y que $y'(1) = \frac{1}{9}$.

*Preguntas y soluciones contrastadas por [...]

6. `//Pablo Roig//` Hallar la solución general de la siguiente ecuación diferencial:

$$y'' - 2\,y' + y = x\,e^{x}\,.$$

7. `//Pablo Roig//` Resolver la siguiente ecuación diferencial:

$$y'' + y' = x\,\mathrm{sen}(x)\,,$$

sujeta a las condiciones iniciales $y(0) = y'(0) = \frac{1}{2}$.

8. `//Pablo Roig//` Resolver la ecuación diferencial siguiente:

$$(1 + x^2)\,y'' - 3\,(1 + x)\,y' + 4\,y = (1 + x)^3\,.$$

Hallar, de entre la familia de infinitas soluciones obtenidas, la que cumple que $y(0) = 0\,,\, y(1) = 8$.

9. `//Pablo Bellido [Antonio Crespo, Adaptado por P. Roig]//` La edo que describe el movimiento de un cuerpo de masa m sometido a la acción gravitatoria terrestre es

$$m\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} = -G\frac{M\,m}{r^2}\,.$$

Introduciendo $v = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ y tomando las c.i. $r(t = 0) = 0$ y $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}(t = 0) = v_0$ -donde v_0 corresponde a la velocidad de lanzamiento del móvil-, resolver la edm anterior para obtener la trayectoria $v = v(r)$. La condición de escape requiere que la velocidad en el infinito (tanto de r como de t) no haya cambiado de signo respecto a v_0 (que es mayor o igual que cero, tal y como se ha introducido). Obtener así la condición para v_0^{esc}, o velocidad mínima para que el cuerpo escape a la atracción terrestre (velocidad de escape). Introducir en la expresión obtenida para v_0^{esc} la aceleración de la gravedad experimentada por el móvil en el instante de su lanzamiento, $g = G\frac{M}{R^2}$, para escribir la velocidad de escape en su forma usual $v_0^{\mathrm{esc}} = \sqrt{2\,G\,R} \sim 11'2\,Km \cdot s^{-1}$.

10. `//Ana Doblas [Laura Molina]//` Resolver la ecuación diferencial de segundo orden:

$$x^2\,\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} - x\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y = \mathrm{Ln(x)}\,.$$

11. `//Ana Doblas [Laura Molina]//` Resolver la ecuación diferencial de segundo orden:

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + y = \mathrm{Sec}(x)\,.$$

12. `//Juan Soria [Pablo Roig]//` Resuelva:

$$4\,y'' + 36\,y = \mathrm{Cosec}(3x)\,.$$

13. `//Juan Soria [Pablo Roig]//` Resuelva:

$$y'' - 4\,y' + 4\,y = x^2\,.$$

14. `//Juan Soria [Pablo Roig]//` Calcular la solución general de la edo:

$$y''' \,-\, 4\,y' \,=\, 3\cos(t)\,.$$

15. `//Juan Soria [Pablo Roig]//` Resolver la ecuación diferencial

$$y'' \,+\, f\,y' \,+\, 25\,y = \,x\,.$$

16. `//Laura Molina [Ana Doblas]//` Resolver la ecuación

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} \,-\, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \,-\, 2\,y \,=\, \mathrm{senh}(x)\,,$$

sujeta a las condiciones iniciales $y_0 \,=\, 0$, $y'_0 \,=\, 0$.

17. `//Pilar Amblar [Antonio Crespo]//` Resolver por el método de variación de parámetros la siguiente edo:

$$2\,\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} \,+\, 4\,y \,=\, \cos(\sqrt{2}\,x)\,.$$

18. `//Pilar Amblar [Antonio Crespo, Adaptado por P. Roig]//` Hallar la solución general de la siguiente ecuación diferencial lineal exacta con coeficientes variables:

$$-\,\mathrm{sen}(x)\,\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} \,+\, 2\cos(x)\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \,-\, 3\,\mathrm{sen}(x)\,y \,=\, 0\,,$$

con las condiciones $\frac{y'}{y} \,=\, 3\,\mathrm{cotan}(x)$ y otra, a voluntad.

19. `//Guadalupe García [Pablo Roig]//` Resolver por el método de variación de parámetros la edo:

$$4\,\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} \,+\, 4\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \,+\, 17\,y \,=\, 0$$

con las condiciones iniciales $y(0) \,=\, -\,1$, $y'(0) \,=\, 2$.

20. `//Viki Sánchez [Laura Molina]//` Calcular la solución general de la ecuación diferencial:

$$\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}t^2} \,+\, 8\,\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} \,+\, 12\,f \,=\, 12\,\mathrm{e}^{-4\,t}\,,$$

con las condiciones de contorno $f(0) \,=\, 0$, $f'(0) \,=\, 0$ y $f\left(\mathrm{Ln}\left(\sqrt{2}\right)\right) \,=\, 0$.

21. `//Viki Sánchez [Laura Molina]//` Se pide resolver la misma edo del ejercicio anterior con condiciones de contorno distintas: $f(0) \,=\, 0$, $f'(0) \,=\, -\,2$ y $f\left(\mathrm{Ln}\left(\sqrt{2}\right)\right) \,=\, 0$.

22. `//Viki Sánchez [Ana Doblas]//` Resolver la ecuación diferencial

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} \,+\, 2\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \,+\, y \,=\, 4\,\mathrm{e}^{-\,x}\,,$$

con las condiciones de contorno $y(0) = 1$, $y(1) = \mathrm{e}^{-\,1}$. ¿Cómo habría que dar la condición de contorno correspondiente a $y(2)$?

23. `//Antonio Crespo [Pablo Bellido]//` Encontrar la solución general a las siguientes ecuaciones:

$$\text{a)}\ \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 6\,y = 0\,,$$

$$\text{b)}\ \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + 2\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y = 0$$

24. `//Antonio Crespo [Pablo Bellido]//` Hállese la solución general a:

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 2\,y = 4\,x^2\,.$$

25. `//Álex [José Martínez, Adaptado por P. Roig]//` Identificar la siguiente ecuación como exacta y resolverla:

$$3\,x^2\,y'' + 2\,x\,(x^2 + 3)\,y' + 6\,x^2\,y = 0\,.$$

Utilizar la condición $y' = -\frac{2\,x\,y}{3}$ y otra, a voluntad, en la resolución.

26. `//José Martínez [Álex]//` Resolver la siguiente ecuación diferencial:

$$-\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + 2\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 3\,y = x\,\mathrm{e}^{2\,x}\,,$$

con las condiciones iniciales $y(0) = e = y'(0)$.

27. `//Néstor Chinillach [Pablo Bellido]//` Encontrar la solución homogénea de la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3} - 6\,\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 30\,y = \mathrm{e}^x\,.$$

28. `//Vicente Montañana [Pablo Roig]//` Resolver:

$$y''' - 3\,y' + 2\,y = \mathrm{e}^{3\,x}\,.$$

29. `//Vicente Montañana [Pablo Roig]//` Resolver:

$$y''' - 4\,y' = 3\cos(t)\,.$$