J.A. Oteo. Departamento de Física Teórica (UVEG).[MMF3-B:2008-9]

TEMA 4: Solución en serie de potencias de EDO lineales. Funciones especiales

15 de enero de 2010

Resolver en serie de potencias las siguientes EDO lineales (determinar $y_1(x)$ e $y_2(x)$). Si no se indica lo contrario, desarrollar alrededor de $x_0 = 0$. Determinar el radio de convergencia de la serie, cuando sea posible.

1. `//Oteo//` $(x+1)(x-1)y'' - 2y = 0$
2. `//Oteo//` $y'' - 2xy' - 2y = 0$
3. `//Oteo//` $y'' + (3x+2)y' + 8y = 0$ (hasta orden 6)
4. `//Oteo//` $y'' - 2xy' - 2y = 0$ (hasta orden 6)
5. `//Adrián [Jorge G.]//` Dada $(z-1)y'' + by' = 0$ (b entero), demostrar de que la sol. general es $y(z)$ abajo. Hacer una comprobación en el caso particular $b = 2$.
$$y(z) = k_1 \sum_1^\infty \frac{(b+n-2)!}{(b-1)!n!} z^n + k_2$$
6. `//Laborda [Andrés U.]//` $y'' + y'/z + y/z = 0$, alrededor de $z_0 = 1$.
7. `//Andrés U. [Laborda]//` $z^2 y'' + 2y' + y = 0$, alrededor de $z_0 = 1$.
8. `//Leo [Mario]//` $(z^2+1)y'' - 2y = 0$.
9. `//Pablo C. [Carlos F.]//` $(z^2-1)y'' + zy' - y = 0$.
10. `//Carlos F. [Pablo C.]//` $y'' + z(z+1)y = 0$.
11. `//Aitor L. [Aitor G.]//` $(z-1)(z-3)y'' - zy' + y = 0$.
12. `//Aitor G. [Aitor L.]//` $y'' + (z+1)y' - zy = 0$.
13. `//Gonzalo [Luis G.]//` $4y'' - 8zy' + 15y = 0$.
14. `//Jorge P. [Carlos S.]//` $y'' - zy' + y = 0$.
15. `//Carlos S. [Jorge P.]//` $(1+z^2)y'' + \lambda zy' + 2\lambda y = 0$. Valores de λ para los que la sol. es polinómica. Resolver hasta orden 5 con $\lambda = 6$.
16. `//Luis [Carlos S.]//` $y'' + 2xy = 0$.
17. `//Cristina [Roser]//` $y'' + x^2 y = 0$.
18. `//Roser [Cristina]//` $y'' + y' + zy = 0$.
19. `//Pablo Z. [Carlos M.]//` $(1+x)y'' - 2y' + 2y/(1+x) = 0$.

20. `//Carlos M. [Pablo Z.]//` $y'' - 2zy' - (1-z)^2 y = 0.$

    Las siguientes dos ODEs no pueden resolverse en series de potencias por el método usual: $\sum_0^\infty a_n z^n$*. Explicar por qué. A peser de ello, si intentamos una resolución así, el método parece funcionar. Explicar por qué. Determinar la solución.*

21. `//Luis G. [Gonzalo]//` $z^2 y'' - zy' + y = 0.$
22. `//Mario [Leo]//` $y'' + y'/z + y/(z(1-z)) = 0.$

    Funciones especiales

23. `//Oteo//` Legendre: Conociendo la relación de recurrencia $(n+1)P_{n+1} - (2n+1)xP_n + nP_{n-1} = 0$, y $P_0 = 1, P_1 = x$; obtener $P_5(x)$.
24. `//Oteo//` Conociendo la relación $\Gamma(1-z)\Gamma(z) = \pi/\sin(\pi z)$ determinar el valor de $\Gamma(1/2)$ y $\Gamma(5/2)$.
25. `//Oteo//` Comprobar la relación de ortogonalidad entre armónicos esféricos:
    $\int_{-1}^{1}\int_0^{2\pi} [Y_l^m(\theta,\phi)]^* \; Y_{l'}^{m'}(\theta,\phi)\; d\phi\; d(\cos\theta) = \delta_{ll'}\delta_{mm'}$,
    utilizando $Y_1^0 = \sqrt{\dfrac{3}{4\pi}}\cos\theta, \quad Y_1^{\pm 1} = \mp\sqrt{\dfrac{3}{8\pi}}\sin\theta\exp(\pm i\phi)$
26. `//Oteo//` Si $\Gamma(m+2) = 3!$ y $n = 5/2$, calcula $\beta(m,n)$
27. `//Oteo//` Sabiendo $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, dar una expresión de $\Gamma(m/2)$ para m par e impar.
28. `//Oteo//` Hermite: Dada la fórmula de Rodrigues
    $H_n(x) = (-1)^n \exp(x^2/2)\frac{d^n}{dx^n}\exp(x^2/2)$, determinar $H_5(x)$.