FUNCIONES CONVEXAS

El concepto de convexidad es fundamental en el análisis y resolución de los problemas de optimización.

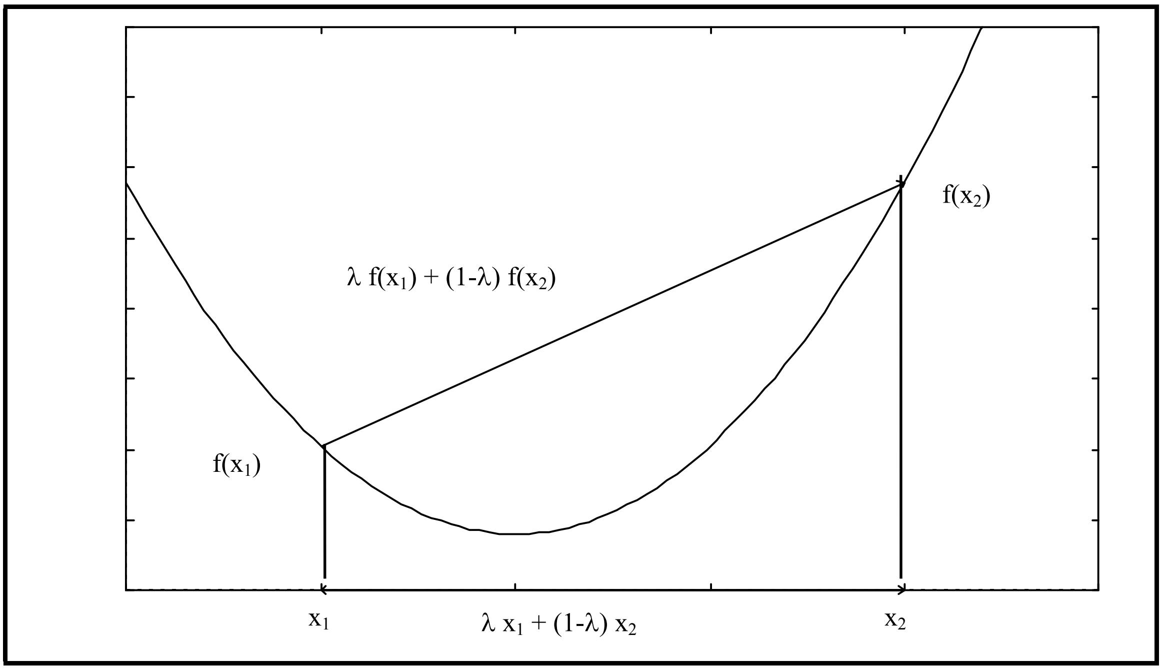
FUNCIONES CONVEXAS Y CÓNCAVAS.

Sea $S \subseteq R^n$, un conjunto convexo y no vacío, y sea $f: S \rightarrow R$ f es una función ***convexa*** *en S*, si y solo si:

$$f[\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2] \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

$$\forall \lambda \in [0,1] \quad y \quad \forall x_1, x_2 \in S.$$

Gráficamente:



Sea $S \subseteq R^n$, un conjunto convexo y no vacío, y sea $f: S \rightarrow R$, f es una función ***estrictamente convexa*** *en S*, si:

$$f[\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2] < \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

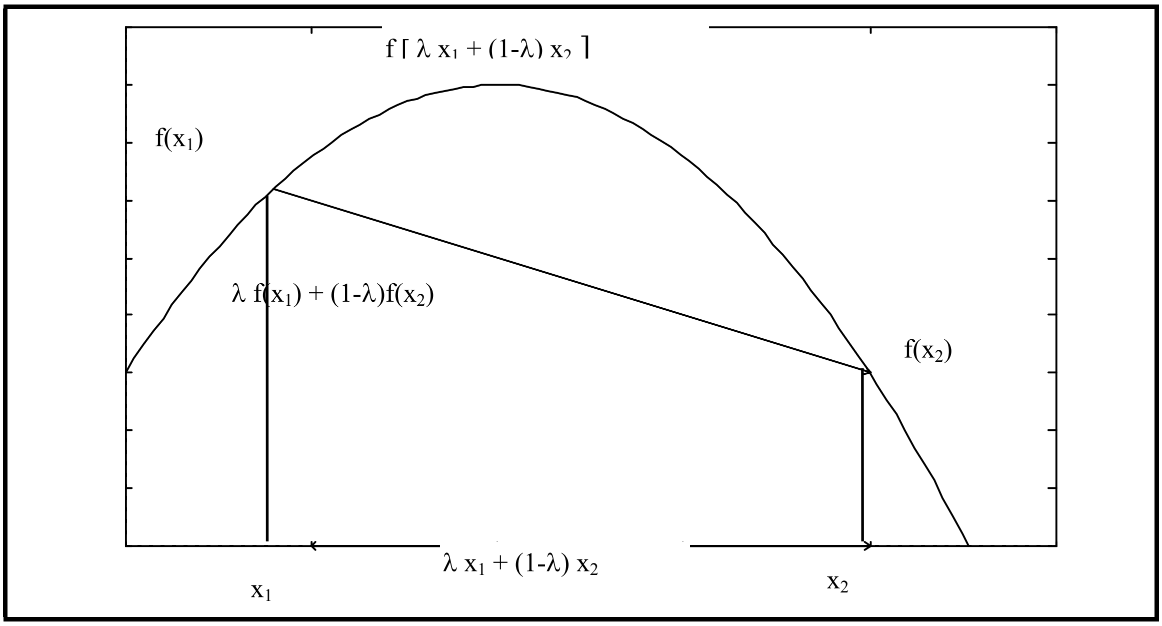
$$\forall \lambda \in]0,1[\quad y \quad \forall x_1, x_2 \in S. \text{ con } x_1 \neq x_2$$

Sea $S \subseteq R^n$, un conjunto convexo y no vacío, y sea $f: S \rightarrow R$ f es una función ***cóncava en S***, si y solo si:

$$f [\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2] \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

$$\forall \lambda \in [0,1] \quad y \quad \forall x_1,x_2 \in S.$$

Gráficamente,



Una función es ***estrictamente cóncava*** si la desigualdad se verifica en sentido estricto, es decir:

$$f [\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2] > \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

$$\forall \lambda \in (0,1) \quad y \quad \forall x_1,x_2 \in S. \text{ con } x_1 \neq x_2$$

Es importante hacer notar que las definiciones que hemos dado con anterioridad no exigen ni la continuidad ni la diferenciabilidad de la función.

Si f(x) es una función convexa en S (convexo y no vacío), entonces la función [-f(x)] es una función cóncava en S.

Prueba:

Si f(x) es una función convexa verifica que :

$$\forall\ \lambda \in [0,1] \quad \text{y} \quad \forall\ x_1, x_2 \in S.$$

$$f[\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2] \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

si multiplicamos esta expresión por (-1), tenemos

$$- f[\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2] \geq - \lambda f(x_1) - (1-\lambda) f(x_2)$$

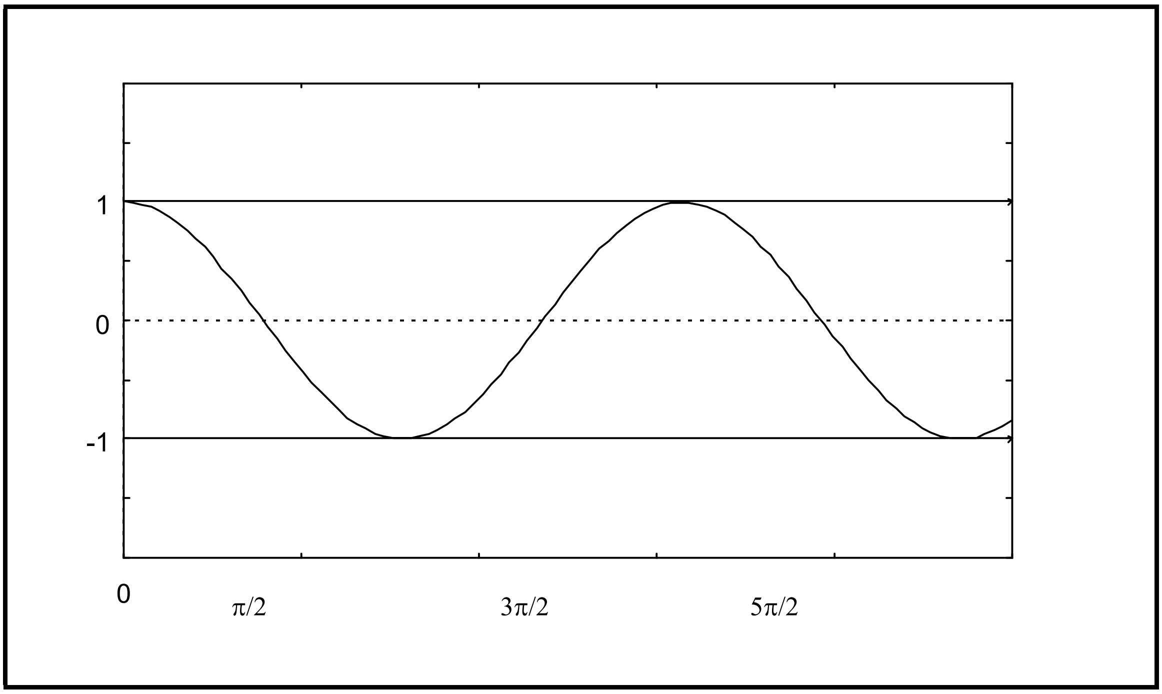
o lo que es lo mismo:

$$(-f)[\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2] \geq \lambda (-f)(x_1) + (1-\lambda) (-f)(x_2)$$

con lo cual (-f) es una función cóncava.

Así por ejemplo, **las funciones lineales** son cóncavas y convexas a la vez, dado que cumplen la definición de función cóncava y convexa como una igualdad entre los dos miembros de la definición, pero precisamente por este motivo no pueden ser ni estrictamente cóncavas ni convexas.

Por el contrario, la función coseno (cos(x)) no es cóncava ni convexa sobre todo su dominio (R), pero sin embargo, sobre ciertos subdominios si tiene algunas de estas propiedades.Así, en el dominio [$\pi/2$, $3\pi/2$] es un función convexa, mientras que en el dominio [$3\pi/2$, $5\pi/2$] se trata de una función cóncava, y además lo es estrictamente en ambos casos.



PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES CONVEXAS.

Toda combinación lineal con coeficientes positivos de funciones convexas es una función convexa.

Sea $S \subseteq R^n$ un conjunto convexo y no vacío, y sea f: $S \rightarrow R$ una función convexa. Entonces el ***conjunto de nivel inferior $S_\alpha = \{ x \in S / f(x) \leq \alpha \}$****, es un conjunto convexo.*

Prueba:

Sean x_1 , $x_2 \in S_\alpha$, lo que significa que:

$f(x_1) \leq \alpha$

$f(x_2) \leq \alpha$

lo que tenemos que probar es que: $\forall \lambda \in [0,1]$ se verifica que: $\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \in S_\alpha$, o lo que es lo mismo que : $f[\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2] \leq \alpha$.

Como ayuda para hacer más compresible esta prueba, definimos:

$$x^o = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$$

por lo que

$$f(x^o) = f[\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2]$$

por ser f un función convexa, se tiene que:

$$f[\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2] \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

y dado que se cumple que: $f(x_1) \leq \alpha$ y $f(x_2) \leq \alpha$, entonces:

$$f[\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2] \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \leq \lambda \alpha + (1-\lambda) \alpha = \alpha$$

lo que significa que

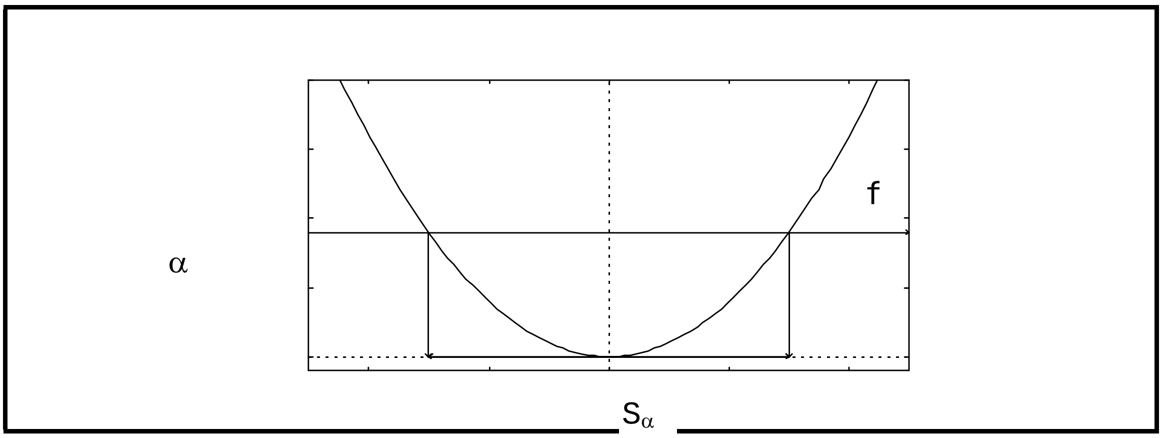
$$\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \in S_\alpha$$

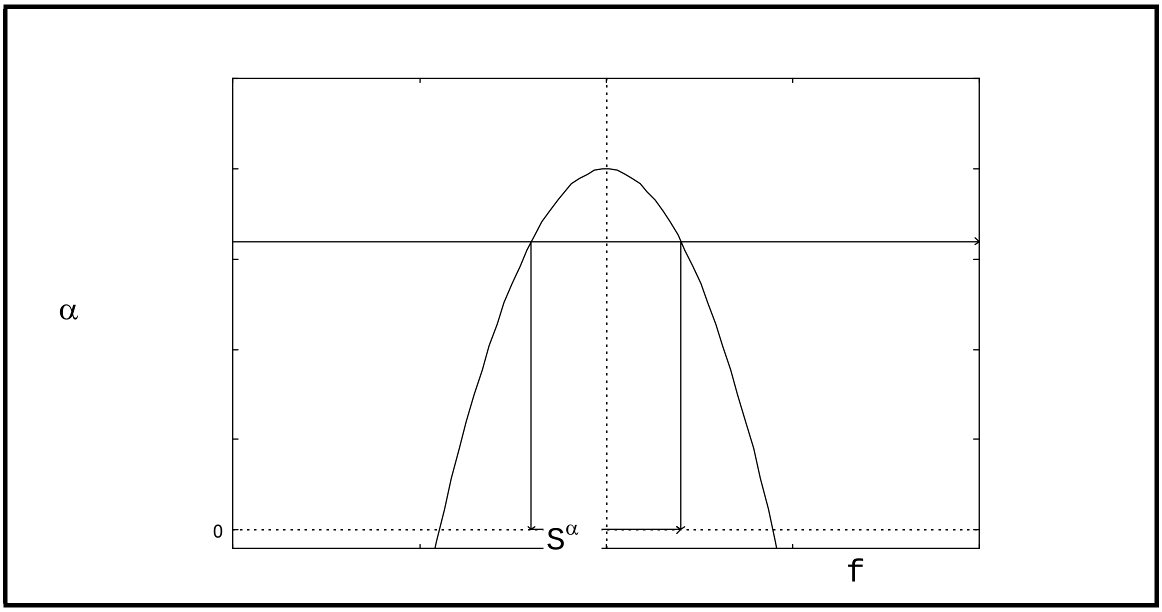
que es lo que queríamos probar, que el conjunto S_α es un conjunto convexo.

De igual manera tenemos la siguiente propiedad:

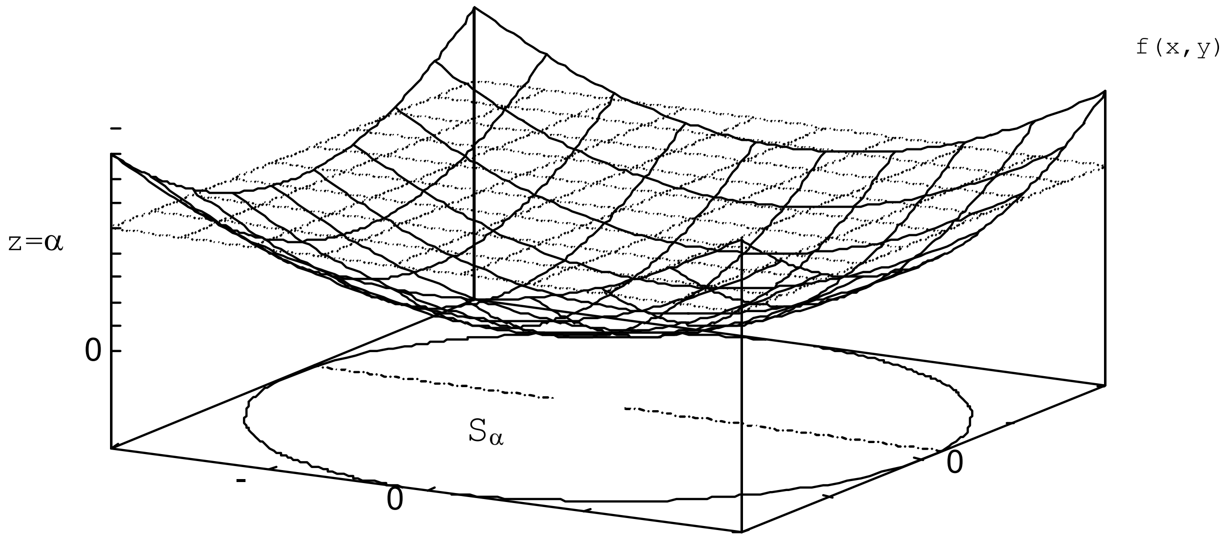
S*i f es un función cóncava el* ***conjunto de nivel superior*** $S^\alpha = \{x \in S / f(x) \geq \alpha\}$*, es un conjunto convexo.*

El reciproco de estas dos propiedades no es cierto, es decir, que el conjunto de nivel sea sea convexo, no implica que la función sea convexa (cóncava), aunque esta propiedad se cumple para las funciones cuasiconcavas y cuasiconvexas.





α
0
S^α
f



f(x,y)
z=α
0
S_α
0
0

CARACTERIZACIONES DE LAS FUNCIONES CONVEXAS.

La aplicación de la definición de convexidad o concavidad a una función puede, en muchas ocasiones, resultar complicado, por lo que se recurre a las caracterizaciones, es decir, a ciertas condiciones que pueden verificar las funciones y que nos permiten clasificar a las funciones en convexas o cóncavas.

Caracterización de funciones de clase C^2.

Para las funciones que admiten derivadas continuas hasta el segundo orden, podemos utilizar una caracterización basada en el hessiano de la función. En este caso podemos acudir a la siguiente proposición.

Dada una función $f: S \subset R^n \longrightarrow R$, donde S es un conjunto convexo y no vacío, y f' $\in C^2(S)$-función con segunda derivada continua en S-, entonces se cumple que:

a) f es convexa en S <u>sii</u> se cumple Hf(x) es semidefinida positiva en S.

b) f es cóncava en S <u>sii</u> se cumple que Hf(x) es semidefinida negativa en S.

c) f es estrictamente convexa <u>solamente si</u> Hf(x) es definida positiva en S.

d) f es estrictamente cóncava <u>solamente si</u> Hf(x) es definida negativa en S.

Ejemplos:

$F(x) = x^2$

En primer lugar, y por representación gráfica de la función (una parábola con centro el origen) podremos aplicarle la definición de función convexa:

$$f[\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2] \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

$$\forall \lambda \in [0,1] \quad y \quad \forall x_1, x_2 \in S$$

Para probar desigualdades recurrimos a probar su diferencia respecto de cero, es decir, poner todos los componentes en un único miembro de la desigualdad, es decir:

$$0 \leq \lambda\ f(x_1) + (1-\lambda)\ f(x_2) - f[\ \lambda\ x_1 + (1-\lambda)\ x_2\ ]$$

Sustituyendo se tiene:

$$\lambda\ x_1^2 + (1-\lambda)\ x_2^2 - (\lambda x_1 + (1-\lambda)\ x_2)^2$$

operando

$$\lambda\ x_1^2 + (1-\lambda)\ x_2^2 - \lambda^2\ x_1^2 - (1-\lambda)^2\ x_2^2 - 2\lambda(1-\lambda)\ x_1\ x_2 =$$

$$x_1^2[\lambda-\lambda^2] + x_2^2[(1-\lambda)-(1-\lambda)^2] - 2\lambda(1-\lambda)\ x_1\ x_2 =$$

$$\lambda(1-\lambda) x_1^2 + (1-\lambda)\lambda\ x_2^2 - 2\lambda(1-\lambda)\ x_1\ x_2 =$$

$$\lambda\ (1-\lambda)\ [x_1^2 + x_2^2 - 2\ x_1\ x_2] = \lambda\ (1-\lambda)\ (x_1 - x_2)^2 \geq 0$$

También recurriendo a la segunda derivada:

$F'(x) = 2\ x$

$F''(x) = 2 > 0$ Definida positiva, por tanto $F(x)$ es **convexa.**

Incluso se podría decir que es estrictamente convexa.

$F(x,y) = (x-3)^2 + y^3$

$$H\ F = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6\ y \end{pmatrix}$$

Para determinar el signo de la forma cuadratica, sabemos que :

$A_1 = 2 > 0$

$A_2 = 6\ y$

Por tanto el signo de la forma cuadratica dependera del signo de la variable y, es decir:

Para valores de $y \geq 0$, la forma cuadratica será postiva (definida o semidefinida), mientras que para valores de $y < 0$, la forma cuadratica será indefinida, por tanto podremos concluir que para valores de $y \geq 0$, la función será una función convexa, y en el caso de que y sea estrictamente positivo, la función será estrictamente convexa.

$F(x,y,z) = x^2 + 5\,y^2 -4\,x + 3y + z^2$

$$H\,F = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La matriz hessiana es una matriz diagonal con todos los auotvalores positivos, por tanto, la forma cuadratica es definida positiva, y con ello la función F(x,y,z) es una función estrictamente convexa.

$F(x,y,z) = x^2 + 3\,y^2 + z^2 + xy - 4\,z - 5\,x +14$

$$H\,F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Los menores principales de esta matriz son:

$A_1 = 2 > 0$

$A_2 = 24 -1 = 23 > 0$

$A_3 = 48 -2 = 46 > 0$

Por tanto esta función es una función estrictamente convexa.

$U(x,y) = 10\,x^{0.3}\,y^{0.7}$, *con* $x \geq 0,\ y \geq 0$

$$H\,U = \begin{pmatrix} -2.1\,x^{-1.7}\,y^{0.7} & 2.1\,x^{-0.7}\,y^{-0.3} \\ -2.1\,x^{-0.7}\,y^{-0.3} & -2.1\,x^{0.3}\,y^{-1.3} \end{pmatrix}$$

Analizando los menores principales, tenemos:

$A_1 = -2.1\,x^{-1.7}\,y^{0.7} < 0 \qquad \forall\ x,y \geq 0$

$A_2 = 0$

Por tanto se trata de una forma cuadratica semidefinida negativa, por tanto la función U(x,y) es una función concava.

Estudiar si el conjunto S definido como: $S = \{(x,y,z) \in R^3 \,/\, x + y + 2z^2 \leq 10\}$ *es un conjunto convexo.*

Para determinar si el conjunto S es convexo, al estar definido por conjunto de nivel inferior de una función, dicha función tiene que ser una función convexa.

La función $F(x, y, z) = x + y + 2z^2$ es una función de clase 2, y por tanto podemos estudiar su Hessiano.

$$H\,F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

como podemos observar se trata de una forma cuadratica semidefinida positiva, por tanto la función F es una función convexa. En base a una de las propiedades de este tipo de funciones podemos concluir que el conjunto S es un conjunto convexo.