OBJETIVOS

- Determinación de la constante recuperadora de un muelle espiral.
- Comprobación del teorema de Steiner.
- Determinación experimental del momento de inercia de diferentes cuerpos y su comparación con los correspondientes valores teóricos.

MATERIAL

- Soporte con resorte espiral
- Barra con dos masas móviles
- Esfera
- Cilindro macizo
- Cilindro metálico hueco
- Disco
- Disco con agujeros
- Regla
- Cronómetro y célula fotoeléctrica
- Dinamómetro de 1 N
- Dinamómetro de 3 N

FUNDAMENTO

Muelle espiral

El muelle o resorte espiral es un sistema elástico que cumple la ley de Hooke. Cuando el sistema sufre un desplazamiento desde la posición de equilibrio, aparece un par recuperador que tiende a llevarlo de nuevo a la posición inicial. Para pequeñas oscilaciones, se puede considerar, aplicando la ley de Hooke, que el par recuperador es proporcional al ángulo girado:

$$\Gamma = R\varphi \qquad [1]$$

donde R se denomina constante recuperadora del muelle espiral.

El período de oscilación de un sistema físico sujeto al muelle espiral viene dado, para pequeñas oscilaciones, por la expresión:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{R}} \qquad [2]$$

siendo I el momento de inercia del sistema respecto al eje de rotación. Una vez conocido el valor de R, es fácil estimar el momento de inercia, I, de un sistema físico, con sólo medir el período de las oscilaciones como se deduce de la ecuación [2].

Teorema de Steiner

El teorema de Steiner se enuncia de la siguiente manera: *el momento de inercia de un cuerpo respecto de un eje cualquiera, es igual al momento de inercia respecto a un eje, paralelo al dado, que pase por su centro de masas, más el producto de la masa del cuerpo por el cuadrado de la distancia que separa ambos ejes:*

$$I = I_{CM} + md^2 \qquad [3]$$

siendo I_{CM} el momento de inercia respecto al eje que pasa por el centro de masas, y d la distancia entre ambos ejes.

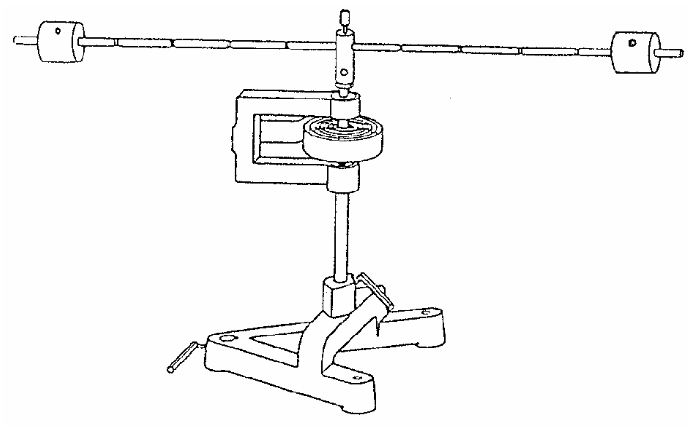

Figura 1.- Muelle espiral y montaje de la barra con las masas móviles

Variación del momento de inercia de una cuerpo con la distancia al eje

El momento de inercia del sistema, *I*, formado por una barra delgada y dos masas cilíndricas movibles dispuestas en forma simétrica sobre ella (Figura 1), respecto a un eje perpendicular a la barra que pase por su centro es:

$$I = I_b + 2(I_c + md^2) \qquad [4]$$

siendo I_b el momento de inercia de la barra respecto a dicho eje, I_c el momento de inercia de las masas cilíndricas con respecto a un eje paralelo al anterior que pasa por su centro de masas, y d la distancia desde éste al centro de cada una de las masas móviles. Para un sistema como éste el periodo de las oscilaciones valdrá, sustituyendo [4] en [2]:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{R}\left[I_b + 2I_c + 2md^2\right] \qquad [5]$$

REALIZACIÓN

Para la realización de esta práctica se va a utilizar el muelle espiral con el montaje que se muestra en la Figura 1 (las masas movibles no son necesarias).

Ley de Hooke

Una forma de determinar la constante *R* del muelle espiral que se emplea en la práctica, es usar la ley de Hooke (ecuación [1]). Para ello,

1. Se monta simétricamente la varilla en el muelle espiral.
2. Mediante un dinamómetro y empleando el soporte adicional para su correcta posición (horizontal y perpendicularmente a la varilla), se hace girar la varilla un ángulo $\varphi = \frac{\pi}{2}$, anotando la lectura de la fuerza que registra el dinamómetro y el brazo al eje de giro (d) en la Tabla 1. Préstese especial atención para que el ángulo entre el dinamómetro y la varilla sea en todos los casos 90°.
3. La operación se repite para ángulos sucesivamente crecientes: π/2, π, 3π/2, 2π, ..., 5π/2.
4. Se representa gráficamente $\Gamma = f(\varphi)$
5. Del ajuste de los datos a una recta por mínimos cuadrados se deduce el valor de *R*.

Tabla 1.- Cálculo de la constante del muelle *R*

Brazo = d = ± m
Ángulo (Brazo, Fuerza) = 90° ± °

i	φ_i (°)	φ_i (rad)	F_i (N)	$\Gamma_i = F_i d \sin(90^\circ)$ (N m)	$\varepsilon(\Gamma_i)$ (N m)
1	±	±	±		
2	±	±	±		
3	±	±	±		
..	..	..	..		

Teorema de Steiner

Para comprobar el teorema de Steiner y obtener de forma alternativa la constante del muelle espiral, se emplea el disco con agujeros. El método a seguir será hallar el momento de inercia con respecto a los ejes definidos por los orificios y comprobar si siguen la expresión [3]. Para ello, mediremos el periodo de oscilación para cada eje ya que combinando las expresiones [2] y [3]:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{R}\left[I_{CM} + md^2\right] \qquad [6]$$

El procedimiento que se va a seguir es el siguiente:

1. Se monta el disco con agujeros sobre el muelle espiral.
2. Se gira el disco un ángulo pequeño (siempre el mismo), se suelta y se mide el periodo de oscilación para todo los ejes, anotando los datos en la Tabla 2
3. Se representa gráficamente $T^2 = \mathrm{f}(d^2)$ que debe seguir un comportamiento lineal**.**
4. Del ajuste de los datos a una recta por mínimos cuadrados de acuerdo con la ecuación [6] se deduce el valor de R y el del momento de inercia del disco con respecto al eje que pasa por el centro de masas.
5. Compárese este último con el valor teórico aproximado.

Tabla 2. Comprobación del teorema de Steiner para el disco con orificios

Masa del disco, $m =$ ± g
Diámetro del disco, $\phi =$ ± cm

Orificio i	d_i (cm)	d_i^2 (cm^2)	T_i (s)	T_i^2 (s^2)
1	0		±	±
2	3		±	±
3	6		±	±
4	9		±	±
5	12		±	±

Variación del momento de inercia de una cuerpo con la distancia al eje

Para estudiar cómo, para la misma masa, el momento de inercia depende de la distancia de ésta al eje, se emplea la varilla con las masas móviles con el montaje que se muestra en la Figura 1, y se determina el momento de inercia del sistema barra-masas para diferentes distancias de las masas móviles al eje (dispuestas en forma simétrica respecto al eje).

Para la realización de la práctica se procede como sigue:

1. Se monta el sistema como (Figura 1) colocando las masas movibles cerca del eje.
2. Se hace oscilar el sistema y se mide el periodo de las oscilaciones, *T*.
3. Se efectúan medidas para distintos valores de *d* (en pasos de 2 cm) y se recopilan los datos en la Tabla 3.
4. Se llevan a una gráfica $T^2 = \mathrm{f}(d^2)$ que debe presentar un comportamiento lineal de acuerdo con la ecuación [5].
5. Del ajuste de los datos a una recta por mínimos cuadrados (ecuación [5]) se deduce el momento de inercia $I_b + 2I_c$ (a partir de la ordenada en el origen) y el valor de R (a partir de la pendiente).
6. Compárese el valor obtenido para $I_b + 2I_c$ con el valor teórico dado por la expresión [4] de la práctica 4 "El péndulo de torsión".

Tabla 3. Momento de inercia de una masa en función de la distancia al eje

Barra delgada			Masas móviles		
Masa, $m_b =$	$\pm$	g	Masas móviles, $2m =$	$\pm$	g
Longitud, $L =$	$\pm$	cm	Longitud, $h =$	$\pm$	cm
Diámetro, $\phi =$	$\pm$	cm	Diámetro interior $\phi_{\text{int}} =$	$\pm$	cm
			Diámetro exterior $\phi_{ext} =$	$\pm$	cm

i	d_i (cm)	d_i^2 (cm^2)	T_i (s)	T_i^2 (s)
1	$\pm$	$\pm$	$\pm$	$\pm$
2	$\pm$	$\pm$	$\pm$	$\pm$
	....	....	....	....

Determinación de la constante elástica del muelle espiral

Como valor de la constante elástica del muelle espiral, tomaremos la media ponderada de los tres valores anteriores.

Momento de inercia de sólidos de geometría sencilla

En este apartado se van a comparar los momentos de inercia teóricos con los experimentales para algunos sistemas físicos sencillos: una esfera, un disco, un cilindro hueco, un cilindro macizo y una varilla.

Se procede de la siguiente manera:

1. Se determinan los valores teóricos empleando las expresiones de la Tabla 4 y anotando en ésta los valores.
2. Se determinan los valores experimentales usando el valor de *R* obtenido en el apartado anterior y empleando la ecuación [2]. Para ello:

   a) Se sujetan éstos, sucesivamente, al muelle espiral.
   b) Se desplaza el sistema de su posición de equilibrio un ángulo pequeño, se libera y se mide el período de oscilación, *T*.
   c) Se halla el momento de inercia experimental del objeto en cuestión, anotando los datos en la Tabla 5.

3. Se comparan los valores obtenidos por ambos métodos y se estudia su discrepancia.

Tabla 4. Momentos de Inercia "teóricos"

Sistema	diámetro ϕ (cm)	m (g)	Momento de Inercia	I (g cm^2)
Esfera	$\pm$	$\pm$	$I = \left(2/5\right) mr^2 =$	$\pm$
Disco	$\pm$	$\pm$	$I = \left(1/2\right) mr^2 =$	$\pm$
Cilindro hueco	$\pm$	$\pm$	$I = mr^2 =$	$\pm$
Cilindro macizo	$\pm$	$\pm$	$I = \left(1/2\right) mr^2 =$	$\pm$
Varilla	$L =$ $\pm$	$\pm$	$I = \left(1/12\right) mL^2 =$	$\pm$

Tabla 5. Valores "experimentales" del momento de inercia

Sistema	T (s)	$I = \dfrac{T^2}{4\pi^2} R$ (g cm^2)
Esfera	$\pm$	$\pm$
Disco	$\pm$	$\pm$
Cilindro hueco	$\pm$	$\pm$
Cilindro	$\pm$	$\pm$
Varilla	$\pm$	$\pm$

RESULTADOS Y CONCLUSIONES

a) Gráfica $\Gamma = \mathrm{f}(\varphi)$, y valor de la constante R del muelle espiral deducido del ajuste por mínimos cuadrados.
b) Para el disco con orificios, gráfica $T^2 = \mathrm{f}(d^2)$ y ajuste por mínimos cuadrados para verificar que se cumple del teorema de Steiner, y valor de la constante R del muelle espiral.
c) Gráfica $T^2 = \mathrm{f}(d^2)$, para las masas móviles en la varilla según varias posiciones simétricas, ajustada por mínimos cuadrados. Valores obtenidos para $I_b + 2I_c$ y R.
d) Media ponderada de los valores de R obtenidos.
e) Valor teórico y experimental del momento de inercia de los diversos objetos (esfera, disco, cilindro macizo y cilindro hueco y varilla) y su comparación.