COLECCIÓN DE PROBLEMAS

MATEMÁTICAS

EMPRESARIALES

Curso 2009-10

Tema 1
El espacio vectorial $\mathbb{R}^n$

1. Encuentra un conjunto de vectores linealmente independientes con el mayor número posible de vectores de entre los siguientes:

$$(1,2,9),\ (-1,-2,-9),\ (0,1,2),\ (2,-1,8),\ (1,-3,-1)$$

2. Determina los valores de z para los cuales el vector $(1,3,z)$ es combinación lineal de los vectores $(1,2,4),\ (1,-5,1)$. Encuentra los coeficientes de la combinación lineal.

3. Comprueba que el conjunto

$$H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ /\ x+y+z=0\}$$

es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

4. Determina si los siguientes conjuntos de vectores son libres o ligados. Si son ligados, encuentra una combinación lineal no trivial que los relacione.

   (a) $(1,3,1),\ (2,1,0),\ (1,9,2)$
   (b) $(2,3),\ (4,1),\ (1,0),\ (2,2)$
   (c) $(2,5,1,1,0),\ (1,4,0,1,2),\ (2,2,2,0,-4)$
   (d) $(2,1,0,3),\ (-2,1,3,0),\ (0,0,0,0),\ (1,5,2,1)$

5. Calcula una base e indica la dimensión de cada uno de los siguientes espacios vectoriales:

   (a) $S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ /\ x-2y=0\}$
   (b) $S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ /\ 2x+y=0,\ x-y+z=0\}$
   (c) $S_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ /\ 2x-y+z=0,\ y=z+2x\}$

6. Calcula una base, indica la dimensión y halla las ecuaciones características de cada uno de los siguientes espacios vectoriales:

   (a) $S_1 =< (1,-1,0),\ (0,1,-1) >$

(b) $S_2 =< (1,1,0) >$

(c) $S_3 =< (2,1,0),\ (-1,0,1),\ (1,1,1) >$

7. Considera los vectores:

$$\{(1,2,3),\ (1,1,1),\ (0,2,0)\}$$

   (a) Demuestra que son una base de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Calcula las coordenadas en dicha base de los vectores:

$$(3,1,5),\ (2,0,3)$$

   (c) Calcula la expresión general de las coordenadas de un vector (x,y,z) en dicha base.

8. Halla una base de $\mathbb{R}^3$ que contenga a los vectores $(3,1,1)$ y $(2,0,-1)$.

9. Halla una base del espacio vectorial $S =< (1,2,0),\ (1,1,1) >$ que contenga al vector $(1,3,-1)$.

10. Calcula una base del subespacio $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x - y - 2z = 0\}$ que contenga al vector $(1,1,0)$.

Tema 2
Aplicaciones lineales

1. Comprueba si las siguientes aplicaciones son lineales o no

   (a) $f_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, dada por $f_1(x,y,z) = (x,0,x+y+z)$
   (b) $f_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, dada por $f_2(x,y) = (x,y,x+y)$
   (c) $f_3 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $f_3(x,y) = (y,x+y+2)$
   (d) $f_4 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $f_4(x,y,z) = (x^2,x+z)$

2. Obtén la matriz asociada (en las bases canónicas) a las siguientes aplicaciones lineales:

   (a) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, dada por $f(x,y,z) = (3x+y,x-y,x+z)$
   (b) $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $g(x,y,z) = 2x-2y+2z$
   (c) $g \circ f$
   (d) $h : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $h(x,y,z,u,v) = (x,u)$
   (e) $j : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $j(x,y,z) = (2x+y-5z,3x-3y-z)$

3. Dada la aplicación lineal asociada a la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   en las bases canónicas. Calcula la imagen del vector $(4,2)$ y calcula la expresión analítica de dicha aplicación lineal.

4. Halla la matriz asociada (en las bases canónicas) a una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ que cumple:

$$f(1,2) = (3,4) \qquad f(1,1) = (2,0).$$

5. Halla la matriz asociada (en las bases canónicas) a una aplicación lineal $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ que cumple:

$$g(-1,1) = (1,3) \qquad g(2,1) = (0,4).$$

6. a) Estudia si existe una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ que cumpla $f(1,1,1) = (2,2)$ y $f(2,2,2) = (4,3)$. En tal caso, calcula su matriz asociada.

   b) Idem con $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ que cumpla $g(1,0) = (1,1)$ y $g(1,1) = (2,1)$.

   c) Idem con $h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ que cumpla $h(1,1,1) = (2,2)$ y $h(2,2,2) = (4,4)$.

   d) Idem con $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ que cumpla $F(1,0,0) = (2,1)$, $F(0,1,1) = (-1,0)$ y $F(1,1,1) = (1,3)$.

   e) Idem con $j : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ que cumpla $j(0,1) = (1,1)$, $j(2,3) = (0,2)$ y $j(2,4) = (1,3)$.

Tema 3
Funciones de varias variables

1. Calcula el dominio de las funciones:

   $a)\ f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$ $\quad b)\ f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$ $\quad c)\ f(x,y) = \sqrt{y+x}$

   $d)\ f(x,y) = \sqrt[3]{x^2-y}$ $\quad e)\ f(x,y) = (x+3y^2)^{-3}$ $\quad f)\ f(x,y,z) = e^{x+y+z}$

   $g)\ f(x,y) = 3^{\frac{\sqrt{x}}{y-1}}$ $\quad h)\ f(x,y) = \ln(2x-y)$ $\quad i)\ f(x,y) = \sin(xy^2)$

   $j)\ f(x,y) = (x-y, \dfrac{1}{y}, y^2)$ $\quad k)\ f(x,y) = (e^{xy}, \tan(x+y))$

2. Calcula el dominio matemático y económico de las siguientes funciones:

   (a)
   $$D(I,p,p') = \frac{\sqrt{I.p'}}{2p}$$
   siendo D la función de demanda de un producto, I la renta del consumidor, p el precio del producto y p' el precio de un bien sustitutivo

   (b)
   $$C(q) = q^3 - 9q^2 + 36q + 20$$
   siendo C la función de costes y q la producción diaria.

   (c)
   $$Q(K,L) = \sqrt{L^2+K^2}$$
   siendo Q la función de producción, K el capital y L el trabajo.

   (d)
   $$U(C,F) = \sqrt[4]{C^2.F^5}$$
   siendo U la función de utilidad de un consumidor, C el consumo de chocolate y F el consumo de fresas.

   (e)
   $$U(C,F) = \sqrt[4]{C.F^3}$$
   siendo U la función de utilidad de un consumidor, C el consumo de chocolate y F el consumo de fresas.

(f)
$$U(C,F,N)=\sqrt[6]{C^2.F^3.N}$$
siendo U la función de utilidad de un consumidor, C el consumo de chocolate, F el consuma de fresas y N el consumo de nata.

3. Calcula, si existen, los siguientes límites:
$$a)\ \lim_{(x,y)\to(2,-1)}\frac{3xy}{x^2+y^2} \qquad b)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2-y^2+2}$$

4. Dada la función
$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x+y}{x-5} & \text{si } x<0\\ 7 & \text{si } x\geq 0\end{cases}$$
calcula
$$\lim_{(x,y)\to(5,-3)} f(x,y),\qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y).$$

5. Calcula el límite en $(0,0)$ de la función
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x+1}{x^2+y^2+1} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ p & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$
en función de los valores de p.

6. Estudia si existe el límite en $(0,0)$ y $(1,1)$ de la función
$$f(x,y)=\begin{cases}\sin(\pi xy) & \text{si } y>x^2\\ p & \text{si } y=x^2\\ x\cos(\pi y) & \text{si } y<x^2\end{cases}$$
según los valores de p.

7. Dada la función $f(x,y)=(\frac{x-3y}{y},y^2\sin x)$, calcula
$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y).$$

8. Estudia la continuidad de las siguientes funciones
$$a)\ f(x,y)=3x^3+2xy^2-xy+5x^2-y+3 \qquad b)\ f(x,y)=\frac{1}{2x-y}$$
$$c)\ f(x,y)=\frac{4x-y^2}{x^2+y^2} \qquad d)\ f(x,y)=e^{\frac{2xy}{x^2+y^2}}$$
$$e)\ f(x,y)=e^{\frac{(x-3)^2-(y+2)^2}{(x-1)^2+(y+1)^2}} \qquad f)\ f(x,y)=\cos(x-y)$$

9. Estudia la continuidad de la función

$$f(x,y)=\left\{\begin{array}{ll}-x-y^2 & \text{si } x+y\leq 1\\ -x^2+y & \text{si } x+y>1\end{array}\right.$$

en los puntos $(1,0)$, $(1,1)$.

10. Estudia la continuidad de la función

$$f(x,y)=\left\{\begin{array}{ll}x^2-2y & \text{si } y\geq 0\\ 3x-y & \text{si } y<0\end{array}\right.$$

en los puntos $(0,0)$, $(0,2)$ y $)(2,0)$.

11. Estudia la continuidad de las funciones

$$f(x,y)=\left\{\begin{array}{ll}x^2+y^2 & \text{si } x\neq 1\\ 2y & \text{si } x=1\end{array}\right. \qquad g(x,y)=\left\{\begin{array}{ll}x^2 & \text{si } x\geq y\\ 2y-1 & \text{si } x<y\end{array}\right.$$

12. Estudia la continuidad de las funciones

$$f(x,y)=\left\{\begin{array}{ll}1 & \text{si } xy\neq 0\\ 0 & \text{si } xy=0\end{array}\right. \qquad g(x,y)=\left\{\begin{array}{ll}xy & \text{si } xy\neq 0\\ 0 & \text{si } xy=0\end{array}\right.$$

13. Estudia la continuidad de la función

$$f(x,y)=\left\{\begin{array}{ll}x^2+3y^2 & \text{si } x>0,\ y>0\\ 3 & \text{si } x\leq 0,\ y>0\\ xy & \text{si } x\leq 0,\ y\leq 0\\ y+1 & \text{si } x>0,\ y\leq 0\end{array}\right.$$

Tema 4
Diferenciabilidad de funciones de varias variables

1. Calcula las derivadas parciales de las siguientes funciones

a) $f(x,y) = 3x^5y - 2x^2y^2 + 4x - 3y + 1$

b) $f(x,y) = \dfrac{2y}{x+4}$

c) $f(x,y,z) = 2xyz + 3x^2yz^3 + -5xz^3 + y^2z$

d) $f(x,y) = \dfrac{y^2 - x^2}{x+y}$

e) $f(x,y,z) = \dfrac{x^3 + 2x^2y - 8z}{z - 3x}$

f) $f(x,y) = (x^2 + y)\sin 2x$

g) $f(x,y) = \dfrac{x+2}{y}\cos(2x^3 - y)$

h) $f(x,y) = e^{3x^2 - y^3}$

i) $f(x,y) = e^{\frac{x}{3x-y^2}}$

j) $f(x,y) = \dfrac{yx^3}{x^3 + y - 4y^2}e^{3x+5y}$

k) $f(x,y,z) = \sin^5(2z + x^3)$

l) $f(x,y) = \sin(y^2 + xy - x + 3)^5$

ll) $f(x,y) = \tan\dfrac{y}{x}$

m) $f(x,y) = \tan(x+y)^2$

n) $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{2y^3 - x^2}{x}}$

ñ) $f(x,y) = \sqrt[3]{3x^2 - y^3}$

o) $f(x,y) = \sqrt[3]{e^{x+2y}}$

p) $f(x,y) = 2^{\cos(y^2 - x)}$

q) $f(x,y) = \dfrac{y\cos x}{\sqrt{xy+2}}$

r) $f(x,y) = \ln(x + \dfrac{9}{y})$

s) $f(x,y) = \ln\dfrac{y}{x}$

t) $f(x,y) = \ln^3(\dfrac{x}{1-y})$

u) $f(x,y) = \ln(x - 4y)^2$

v) $f(x,y) = \sqrt{x}\sin\dfrac{1}{y}$

w) $f(x,y) = y^3e^{x^2}$

x) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{e^y}}{x-4}$

2. Calcula las derivadas parciales de la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

en cualquier punto distinto de $(0,0)$ y en el punto $(1,2)$.

3. Calcula las derivadas parciales de las siguientes funciones:

$$a) f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)y}{(x-1)^2+(y+2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (1,-2) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (1,-2) \end{cases}$$

en cualquier punto distinto de $(1,-2)$.

$$b) f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3y^3+2x^2-x^2y+2y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

en cualquier punto distinto de $(0,0)$.

4. Calcula el vector gradiente de las siguientes funciones:

$$a) f(x,y) = \sin(3x^2 - y)$$

$$b) f(x,y,z) = x^{\frac{1}{2}} - (yz)^{\frac{2}{3}}, \text{ en el punto } (4,1,1)$$

$$c) f(x,y,z) = \frac{2x^2-3y^3}{xz^3}$$

5. Calcula la matriz jacobiana de las siguientes funciones:

$$a) f(x,y) = (x-y)^3$$

$$b) f(x,y) = (x^2+y, e^{\frac{y}{x}}), \text{ en el punto } (1,1)$$

$$c) f(x) = (x^{\frac{5}{2}}, \frac{1}{x}, \tan x)$$

6. Calcula la matriz hessiana de las siguientes funciones:
   a) $f(x,y) = \cos(x-y^3)$
   b) $f(x,y,z) = 3x^2 - yz^2 + xyz$, en el punto $(1,-2,1)$
   c) $f(x,y,z) = \frac{x^3+2z^2}{4y}$.

7. Estudia la diferencibilidad de las siguientes funciones y calcula su diferencial:

   (a) $f(x,y,z) = x^3y + 2xz^2 - 3xyz$
   (b) $f(x,y,z) = \sin xy^2z$

(c) $f(x,y) = y^{\cos x}$

(d) $f(x,y) = \frac{x^3-2xy}{4x+y^2}$

8. a) Dada la función $f(x,y) = 2x^2 + \ln y$, calcula la diferencial total, la diferencial en el punto $(1,1)$ y la diferencial en el punto $(1,1)$ actuando sobre el vector $(-1,3)$.

   b) Idem con la función $f(x,y) = \sin(x+y)$, el punto $(0,0)$ y el vector $(2,-1)$.

   c) Idem con la función $f(x,y,z) = x^2 - 3y^2 + xz^3$, el punto $(0,1,1)$ y el vector $(2,2,2)$.

9. Dada la función

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y & \text{si } x > 3 \\ x^2 & \text{si } x \leq 3 \end{cases}$$

   a) estudia la continuidad en el punto $(3,1)$

   b) halla las derivadas parciales en los puntos $(2,1)$ y en $(4,3)$.

   c) indica si f es diferenciable en $(3,1)$.

10. Estudia la diferenciabilidad en el punto $(1,1)$ de la función

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{si } x \geq y \\ -\dfrac{x^2}{y-1} & \text{si } x < y \end{cases}$$

11. Estudia la diferenciabilidad en el punto $(0,1)$ de la función

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{si } x \geq y \\ -x^2 - y & \text{si } x < y \end{cases}$$

12. Calcula la derivada direccional de la función $f(x,y) = \sqrt{xy} + y^3$ en el punto $(3,3)$ en la dirección del vector $(1,2)$.

13. Dada la función $f(x,y) = 2x + \dfrac{4y}{x}$, averigua en qué dirección $v = (a,b)$ la derivada direccional de f en el punto $P = (1,-1)$ es nula.

14. Calcula la derivada direccional de la función $f(x,y) = 3x^2y + \dfrac{xy}{x+2} - 4$ en el punto $(1,1)$ en la dirección del vector $(0,-3)$.

15. Calcula las direcciones de máximo crecimiento, máximo decrecimiento y crecimiento nulo de las funciones:

    a) $f(x,y) = (x-y)e^{\frac{3x+y}{x}}$, en el punto $(1,0)$

    b) $f(x,y,z) = \sin(xyz) + \ln(x-z^2)$, en el punto $(1,1,0)$.

16. Sabiendo que el vector gradiente de una función es

$$\nabla f(x,y) = (6xy + 10xy^3, 3x^2 + 15x^2y^2 - 6y^5),$$

    calcula la matriz hessiana de $f(x,y)$.

17. ¿Existe una función f tal que $\nabla f = (3xy + 3x^3 - 2, 4x^4y^2 - 6xy)$?

18. Dada la función $f(x) = xe^x$, calcula el polinomio de Mc Laurin de orden 2.

19. Desarrolla en potencias de $(x-2)$ y de $(y+1)$ la función

$$f(x,y) = 2x + e^{x+2y}$$

    hasta los términos de orden 2.

20. Calcula el polinomio de Taylor de orden 2 de la función $f(x,y) = x\cos y$ en el punto $(2,0)$.

21. Dada la función de producción de Cobb-Douglas $Y(K,L) = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$, $A > 0$, $0 < \alpha < 1$, donde Y es la producción, L es el input trabajo y K es el input capital. Calcula la productividad marginal del trabajo y del capital. Determina su signo e interprétala económicamente sabiendo que $K > 0$ y $L > 0$.

22. La función de beneficios de una empresa depende del precio de venta de su producto (p_0) y de los precios a los que adquiere sus dos inputs (p_1 y p_2):

$$B(p_0, p_1, p_2) = \frac{p_0^4}{64p_1^2p_2}$$

    Calcula el signo de las tres derivadas parciales e interprétalas económicamente.

23. La función de demanda de un bien relaciona la cantidad demandada de ese bien (x) en unidades físicas, la renta per capita del país (Y) en

euros, el precio de ese bien (p_0) en euros, y el precio del resto de bienes (p) en euros:

$$x(Y, p_0, p) = \frac{Y^2 p}{3p_0^2}$$

Calcula el signo de las derivadas parciales e interprétalas económicamente.

24. Sea $U(x)$ la función de utilidad de un consumidor, donde x es la cantidad consumida de un bien.

   (a) Explica la diferencia de interpretación entre $\left.\frac{dU}{dx}\right|_{10}$ y $\left.\frac{dU}{dx}\right|_{1000}$.

   (b) ¿Cuál es el signo que cabría esperar en estas dos derivadas?

   (c) ¿Cuál de las dos es de esperar que sea mayor?

   (d) ¿Cuál es el signo que cabría esperar para $\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{10}$?

   (e) Si $U(10) = 3'65$ y $\left.\frac{dU}{dx}\right|_{10} = 0'22$, calcula aproximadamente $U(10'5)$.

25. Los beneficios (B) de la industria del automóvil en Europa en millones de euros evolucionan en función del precio del petróleo (p) en dólares por barril, del crecimiento económico (g) y de los salarios (w) en euros, No se conoce la forma exacta que relaciona estas variables pero se estiman los efectos de cambios en cada variable por separado en la situación actual. Con el barril a 60 dólares, un crecimiento del 2 por cien y unos salarios medios de 2000 euros al mes, los beneficios han sido de 500 millones de euros y los efectos estimados son:

$$\frac{\partial B}{\partial p} = -15 \text{millones de euros por dólar}$$

$$\frac{\partial B}{\partial g} = 50 \text{millones de euros por punto porcentual}$$

$$\frac{\partial B}{\partial w} = 0'5 \text{millones de euros por euro}$$

   Se pide:

   (a) Obtén los beneficios aproximados que se obtendrán el próximo año si el petróleo se estabiliza a 55 dólares por barril, la economía crece un 1'5 por cien y los salarios suben un 2 por cien.

(b) ¿Qué hipótesis matemática se necesita para contestar al apartado anterior?

(c) Calcula una función de beneficios lineal (de grado uno) y aproximada para situaciones económicas parecidas a la actual.

Tema 5
Funciones compuestas

1. Si $f(x,y) = \frac{x}{y}$ y $g(t) = (2t, \frac{2}{t})$, calcula (si existe) $(f \circ g)$ y $(g \circ f)$.

2. (a) Calcula la composición de la función $f(x,y,z) = y + 3x - z^2$ con las funciones $x = 2u,\ z = -u$.

   (b) Calcula la función compuesta de las funciones $f(x,y) = 3y - x^2$, $y = x + 1$.

3. Calcula las derivadas parciales

$$\frac{\partial z}{\partial u} \text{ y } \frac{\partial z}{\partial v}$$

de la función $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, donde $x = e^u \cos v,\ \ y = e^u \sin v$.

4. Halla $\frac{du}{dx}$, siendo

$$u = \frac{e^{ax}(y - z)}{a^2 + 1}$$

donde $y = a \sin x,\ \ z = \cos x$.

5. Dada la función $z = uv$, donde $u = x + 3y,\ v = 2x - y$, calcula

$$\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y}.$$

6. Dada la función $f(x,y,z) = e^x + y + \sin z$, donde

$$x = x(t) = \ln t, \quad y = y(t) = e^t, \quad z = z(t) = t^3,$$

a) calcula la función compuesta $F(t) = f(x(t), y(t), z(t))$,

b) halla $F'(t)$ en $t = 1$ mediante la regla de la cadena.

7. Calcula las derivadas parciales

$$\frac{\partial z}{\partial x} \text{ y } \frac{\partial z}{\partial y}$$

de la función $z = u^3v^3 + u + 1$, donde $u = x^2 + y^2,\ v = e^{x-y} - 1$.

8. Calcula las derivadas parciales

$$\frac{\partial w}{\partial u} \text{ y } \frac{\partial w}{\partial v}$$

de la función $w = \ln \frac{x}{y}$, donde $x = 3^{u+v}$, $y = \sin^2 u$.

9. Dadas las funciones $f(u, v) = (u - v, u^2)$, $g(x, y) = \frac{y}{x}$,

   (a) calcula la diferencial de f en el punto $(2, 1)$,

   (b) calcula la diferencial de g en el punto $(2, 1)$,

   (c) calcula la diferencial de $(g \circ f)$ en el punto $(2, 1)$ mediante la regla de la cadena.

10. Dadas las funciones $f(x, y, z) = (x - z, y^2 + xz)$, $g(u, v) = (v^2, \cos u)$, razona, aplicando la regla de la cadena, que $g \circ f$ es diferenciable en $(1, 0, 1)$ y calcula $J(g \circ f)(1, 0, 1)$.

11. La función de beneficios de una empresa que fabrica un único producto es

$$B(x, D, P) = 8D - 3x - P - 100$$

donde x es la cantidad de producto que fabrica, D es la demanda de dicho producto y P son los costes destinados a publicidad. Se pide:

   (a) calcular las derivadas parciales de B es interpretarlas

   (b) si se supone que la empresa para no incurrir en costes de almacenamiento ajusta su producción a su demanda, es decir, considera que $x = D$, calcula la función compuesta $B(D, P)$ así como sus derivadas parciales y explica las diferencias de interpretación entre estas derivadas y las obtenidas en el apartado anterior.

   (c) el signo de $\dfrac{\partial B}{\partial P}$ es negativo, ¿cómo se interpreta esto?, ¿es razonable?

   (d) la demanda de la empresa depende su inversión en publicidad, es decir, la demanda es una función $D(P)$. La empresa no conoce esta función, pero estima que, para la inversión actual en publicidad P_0, se cumple $\left.\dfrac{dD}{dP}\right|_{P_0} = \dfrac{2}{5}$, ¿es esto razonable?

(e) no podemos calcular la función compuesta $B(P)$, pero sí podemos calcular $\left.\dfrac{dB}{dP}\right|_{P_0}$. Calcula esta derivada e interprétala. ¿Le conviene a la empresa aumentar su inversión en publicidad?

12. Sea $B(x,p,p')$ la función de beneficios de una empresa que fabrica un único bien, donde x es la cantidad fabricada del bien, p es su precio y p' es el precio medio de la competencia. En el instante actual para el nivel de fabricación $x = 100$ unidades, y los precios $p = 30$ u.m. y $p' = 32$ u.m. se estima que :

$$\left.\frac{\partial B}{\partial x}\right|_{(100,30,32} = 4 \qquad \left.\frac{\partial B}{\partial p}\right|_{100,30,32)} = -2 \qquad \left.\frac{\partial B}{\partial p'}\right|_{(100,30,32} = 3$$

supongamos que la competencia ajusta sus precios según los de la empresa, de modo que $p' = p + 2$.

(a) Calcula $\left.\dfrac{\partial B}{\partial x}\right|_{(100,30)}$ $\left.\dfrac{\partial B}{\partial p}\right|_{(100,30)}$ y explica la diferencia entre estas derivadas y las dos primeras del enunciado, desde un punto de vista matemático y en cuanto a su interpretación económica. ¿Cuál de ellas nos indica el efecto que tendría sobre los beneficios un aumento del precio p de una unidad monetaria?.

(b) Estima el incremento de la función de beneficios de la empresa si se produce simultáneamente un aumento del nivel producción de una unidad y un aumento del precio de una u.m. ¿Qué hipótesis se necesita sobre la función $B(x,p)$ para realizar esta aproximación?

Tema 6
Funciones homogéneas

1. Estudia si la función $U = e^{\frac{y}{x}-e} \sin \dfrac{y}{x}$ es homogénea.

2. Dada la función $z = xy\left(\frac{y}{x} - 2\right)^{\frac{1}{3}}$,

   a) estudia su homogeneidad y su grado,

   b) estudia la homogeneidad y el grado de las funciones $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

3. Calcula $x\,\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\,\dfrac{\partial z}{\partial y}$, donde $z = \sin \dfrac{2x+y}{2x-y}$.

4. Calcula la expresión $x\,\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\,\dfrac{\partial f}{\partial y}$, siendo

$$f(x,y) = \sqrt[3]{\frac{x^2y - 3y^3}{x \tan\left(\frac{x-2y}{y}\right)}}.$$

5. Dada la función $f(x,y) = \left(xy + 3y^2 - \dfrac{x^3}{y}\right) e^{\frac{x+3y}{x}}$, razona si la siguiente función $F(x,y) = x\,\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\,\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ es homogénea. En caso afirmativo, indica de qué grado.

6. Estudia la homogeneidad de la función $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, siendo

$$f(x,y) = \frac{(y-x)\ln \dfrac{y+1}{x+1}}{y}.$$

7. Sea $u(x,y) = ax^by^c$, donde a, b, c son constantes. Se pide:

   a) Encontrar la relación que ha de existir entre las constantes para que $u(x,y)$ sea homogénea.

   b) Encontrar la relación que ha de existir entre las constantes para que $u(x,y)$ sea homogénea de grado 1.

   c) Aplicar en cada caso, si es posible, el teorema de Euler.

8. La función de producción de una empresa es $Q(L,K) = A + \beta\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha}$, donde α, β, A son parámetros reales con $\alpha, \beta > 0$.

   a) Estudia su homogeneidad en función de los parámetros y el tipo de rendimiento a escala que presenta.

   b) Calcula $L\dfrac{\partial Q}{\partial L} + K\dfrac{\partial Q}{\partial K}$.

9. La función de producción de una empresa en función de los factores de trabajo (L) y capital (K) viene dada por $Q(L,K) = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$, donde A, α son parámetros reales con $A > 0,\ 0 \leq \alpha \leq 1$. Se pide:

   (a) estudiar si la función de producción es homogénea. En caso afirmativo, indica el tipo de rendimientos a escala de la empresa.

   (b) supongamos que los dos factores dependen d la variable tiempo (t) según las funciones

   $$K(t) = \beta + \gamma t \qquad L(t) = \delta e^{t}$$

   donde β, γ, δ son parámetros reales estrictamente positivos. Calcula la tasa de cambio del producto respecto al tiempo, $\dfrac{dQ}{dt}$. Razona si $Q(t)$ es o no una función homogénea.

Tema 7
Formas cuadráticas reales

1. Calcula la expresión analítica de la forma cuadrática asociada a la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Clasifica, según el signo, las formas cuadráticas:

   a) $Q(x, y) = x^2 + y^2 + 2xy$.

   b) $Q(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xy - 2yz$.

3. Dada
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   se pide:

   a) la expresión analítica de la forma cuadrática asociada,

   b) el signo de dicha forma cuadrática.

4. Idem para
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

5. Clasifica, según el signo, las formas cuadráticas:

   a) $Q(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xz + yz$

   b) $Q(x, y, z) = xy - 2yz + 4xz$.

6. Clasifica la forma cuadrática $Q(x, y, z) = -2x^2 - y^2 + z^2 + xz$ restringida a $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + z = 0\}$.

7. Clasifica la forma cuadrática $Q(x, y, z) = -x^2 + y^2 + z^2$ restringida a $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + 2y - z = 0\}$.

8. Clasifica la forma cuadrática asociada a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

restringida a $S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x + y - t = 0,\ 2y - z = 0\}$.

Tema 8
Convexidad

1. Usando la definición de conjunto convexo, demuestra la convexidad de los siguientes conjuntos:

   a) $A = \{x \in \mathbb{R} \ / \ -1 \leq x \leq 1\} = [-1, 1]$

   b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x + y = 4\}$

   c) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x + y \leq 2\}$

2. Representa gráficamente el menor conjunto convexo que contiene a los puntos $P_1 = (0, 1)$, $P_2 = (-1, -1)$ Y $P_3 = (1, -1)$ y expresa el punto $(0, 0)$ como combinación lineal convesa de P_1, P_2 y P_3.

3. Representa gráficamente el conjunto $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y = x^2\}$ y razona gráficamente si el conjunto es convexo o no.

4. Estudia si los siguientes conjuntos son convexos:

   a) $A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x + y = 3, \ x + 2y \geq 8\}$

   b) $A_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y + z = 6, \ x - 2y + 3z = 8\}$

5. Estudia gráficamente la convexidad de los siguientes conjuntos:

   a) $B_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x + y \leq 4, \ x \geq 0, \ y \geq 0\}$

   b) $B_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y = x^2 + 1, \ y = -x^2 - 1\}$

   c) $B_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y \leq x^2\}$

   d) $B_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y \geq x^2\}$

6. Estudia la convexidad de las siguientes funciones en todo su dominio:

   a) $f(x) = e^x$

   b) $f(x, y) = x^2 + y^2$

   c) $f_1(x, y) = e^{x+y}$

   d) $f_2(x, y) = -e^x - e^y$

   e) $f_3(x, y) = \ln(x + y)$

   f) $f_4(x, y) = x^2 + y$

   g) $f_5(x, y) = (x + y)^2$

h) $f_6(x,y) = 3x^2 + 2y^2 - 3x$

i) $f_7(x,y,z) = x^3 + y^2 + z$

j) $f_8(x,y) = x^2 + 2xy - y^2$

7. Estudia la convexidad o concavidad de las siguientes funciones en el conjunto de puntos interiores del primer cuadrante ($x > 0,\ y > 0$):

   a) $g_1(x,y) = x^3 + y^3$

   b) $g_2(x,y) = \frac{1}{xy}$

   c) $g_3(x,y) = \ln(x+y)$

8. Estudia la convexidad de los siguientes conjuntos:

   a) $C_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 + y \leq 4\}$

   b) $C_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 + y^2 - 4x + 2y \leq -2,\ x - 2y \leq 0\}$

   c) $C_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \ln(x+y) \geq 2\}$

   d) $C_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y^2 - x^2 \leq 4\}$

Tema 9
Optimización

1. Dada la función $z(x,y) = x^3 + x^2y + y^2 + 2y + a$, con $a \in \mathbb{R}$, se pide:

   a) Hallar los puntos óptimos relativos

   b) Calcular el valor que debe tomar el parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que se verifique que $z = 0$ en los puntos óptimos.

2. Dada la función $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 25$, obtén sus óptimos locales.

3. Busca los óptimos relativos de la función $z(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

4. Estudia la existencia de óptimos locales de la función

   $$f(x,y,z) = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4xy + 4xz + 16yz.$$

5. Dada la función $f(x,y) = 3x^4 - 4x^2y + y^2$, se pide:

   a) hallar los puntos críticos

   b) discutir el carácter de los puntos hallados.

6. Obtén los extremos globales de la función

   $$z(x,y) = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20$$

   en el conjunto $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x > 3\}$.

7. Estudia los óptimos globales de la función

   $$f(x,y,z) = 7x^2 + 10y^2 + 7z^2 - 4xy + 2xz - 4yz.$$

8. Determina los óptimos locales de la función $f(x,y,z) = xy + 2xz + yz$, restringida por las ecuaciones

   $$\begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ x - y &= 1 \end{aligned}$$

9. Si consideramos que la función de utilidad correspondiente a unos bienes sustitutivos A y B viene dada por $u = xy$, donde x e y son el número de unidades de A y B, respectivamente, y que los precios unitarios de mercado pon $p_A = 2$ y $p_B = 3$, determina la combinación óptima de ambos productos que debe adquirir un consumidor que dispone de un presupuesto de 100 u. m. para obtener la máxima utilidad. Estudia qué aumento de utilidad se puede conseguir con un aumento de una unidad de presupuesto.

10. Se estima que la función de utilidad de un trabajador es $u = Ty - 0'1T^2 - 0'1y^2$, que depende de la renta y recibida por su trabajo diario y de las horas de ocio diarias T. Para simplificar, supongamos que $T = 12 - x$, donde x es el número de horas trabajadas al día. Sabiendo que el salario por hora es de una unidad monetaria, halla la cantidad de horas x que debe trabajar cada día para maximizar su utilidad.

11. Determina los óptimos de la función $u = x^2 + y^2 + z^2$ sujeta a la restricción $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 9$.

12. Una empresa fabrica tres tipos de artículos. A, B y C, en las cantidades respectivas de x, y, z unidades. La relación entre las cantidades fabricadas y el beneficio, expresado en u. m., viene dada por la función $f(x, y, z) = xy + xz + yz - 80.000$. Si la empresa debe entregar un total de 600 unidades entre los tres artículos y no puede haber excedentes, ¿qué cantidad deberá producir de cada artículo para maximizar el beneficio?

13. Calcula qué cantidad de bienes x, y satisfacen a un individuo cuya utilidad está dada por $u = xy$, sabiendo que su ingreso es de 4 u.m. y que los precios respectivos de los bienes son $p_x = 1,\ p_y = 2$. Estudia qué variación sufriría la utilidad si el ingreso disminuye en una unidad monetaria.

14. Una fábrica tiene dos líneas de fabricación, la que fabrica el bien A y la que fabrica el bien B. Ambos bienes se venden en su totalidad, percibiendo por el primero $12'5$ u.m. por unidad y por el segundo 1000 u.m. por unidad. Las posibilidades de producción anual se encuentran limitadas por la función de transformación $100.000 - 10x - 4y^2 = 0$ (donde x e y representan el número de unidades físicas de los bienes A y B respectivamente). Determina cuál ha de ser la producción anual de cada bien a fin de maximizar el ingreso conjunto procedente de la venta de los productos de esta fábrica.

15. Determina los óptimos globales de la función $f(x, y, z) = -x^2 - y^2 - z^2$ sujeta a las restricciones

$$\begin{aligned} x + 2y &= 2 \\ y - z &= 8 \end{aligned}$$

16. Calcula los óptimos globales de la función $u(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ sujeta a las restricciones

$$\begin{aligned} x - y &= 2z \\ x + y + z &= 1 \end{aligned}$$

Tema 10
La integral definida

1. Resuelve las siguientes integrales:

   a) $\displaystyle\int_0^{\pi} x^2 \ \sin x \ dx$ b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(2x+5)^6} \ dx$ c) $\displaystyle\int_2^4 x \ \ln x \ dx$

   d) $\displaystyle\int_5^6 \cos^3 x \ \sin x \ dx$ e) $\displaystyle\int_1^{\pi} \frac{x-5}{x^2+1} \ dx$ f) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^x \ \sin x \ dx$

2. Dada la función $f(x) = x+4$, definida en $[-4,-2]$, razona si es integrable Riemann y, si es posible, calcula su integral.

3. Determina si son integrables las siguientes funciones, y en caso afirmativo, calcula las correspondientes integrales:

   a) $f(x) = (x-3)^3$ si $x \in [0,3]$

   b) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ si $x \in [3,7]$

   c) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \le x < 2 \\ -1 & \text{si } 2 \le x \le 3 \end{cases}$

   d) $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \le x \le 3 \\ 4 & \text{si } 3 < x \le 4 \end{cases}$

4. Calcula el valor medio de la función $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \le x < 2 \\ 3 & \text{si } 2 \le x \le 4 \end{cases}$ en el intervalo $[0,4]$.

5. Aplica el teorema del valor medio a la función $f(x) = (x-2)^2$ en el intervalo $[0,3]$. ¿En qué punto de $[0,3]$ se alcanza el valor medio?

6. Calcula:

   a) el área de la región del plano limitada por la gráfica de la función $y = x(x-1)(x-2)$ y el eje OX

   b) el valor (o valores) de la variable x que verifica(n) la ecuación

$$\int_0^x t^3 \ dt = \frac{1}{4}$$

7. Calcula el área comprendida entre la curva $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ y el eje OX entre $x = 0$ y $x = 4$.

8. Calcula el área limitada por las curvas $y = x^2 - 6x + 9$, $y = -x^2 + 4x - 3$.

9. La función de costes de una empresa es tal que el coste fijo es $C_F = 80$ y el coste marginal, C', viene dado por la siguiente función del producto:

$$c'(q) = 2e^{0'2q}.$$

Calcula la función de coste total.

10. La propensión marginal al ahorro en una determinada economía viene dada por la siguiente función de la renta:

$$S'(Y) = 0'28 - 0'15\frac{1}{\sqrt{Y}}.$$

Si el ahorro es nulo cuando la renta Y es 90, halla la función de ahorro $S(Y)$.

Tema 11
Integrales Impropias

Estudia la convergencia o divergencia de las siguientes integrales:

1. a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx$ b) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{(1-x)^2}\,dx$

2. a) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ b) $\displaystyle\int_1^{3} \frac{1}{(x-2)^{\frac{2}{3}}}\,dx$

3. a) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{(x-5)^2}\,dx$ b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$

4. a) $\displaystyle\int_1^{2} \frac{1}{(x-1)^{\frac{1}{4}}}\,dx$ b) $\displaystyle\int_0^{3} \frac{1}{x-3}\,dx$

Tema 12
Integral Múltiple

Calcula:

1. $\displaystyle\int_R xy^2\ dx\ dy$ donde $R = [1,3] \times [2,5]$

2. $\displaystyle\int_R 3y\ dx\ dy$ donde $R = [2,3] \times [0,4]$

3. $\displaystyle\int_R\ dx\ dy$ donde $R = [0,2] \times [0,6]$

4. $\displaystyle\int_R x\ dx\ dy$ donde R es el triángulo de vértices $(0,0), (3,0)$ y $(0,3)$.

5. $\displaystyle\int_R 6\ dx\ dy$

   donde R es el recinto acotado entre el eje OX, la parábola $y = x^2$ y la recta $x = 3$.

6. $\displaystyle\int_R xy\ dx\ dy$

   donde R es el recinto acotado entre el eje OX, la parábola $y = x^2$ y la recta $y = x$.

7. $\displaystyle\int_R xy^2\ dx\ dy$

   donde $\quad R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ /\ 0 \leq y \leq 2,\ -y \leq x + 1 \leq y\}$.

8. $\displaystyle\int_R (x - y)\ dx\ dy$

   donde $\quad R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ /\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ y \leq 1,\ x - y \leq 3\}$.

Tema 13
Ecuaciones Diferenciales

1. Resuelve:

   a) $\dfrac{dy}{dx} = 2y$

   b) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$

   c) $(1+e^x)y\dfrac{dy}{dx} = e^x, \qquad y(0) = 1$

   d) $(1+y^2)dx + (1+x^2)dy = 0.$

2. Resuelve:

   a) $\dfrac{dy}{dx} + 2xy = 2xe^{-x^2}$

   b) $\dfrac{dy}{dx} + 2y = e^{-x}$

   c) $\dfrac{dy}{dx} + 2xy = 2x, \qquad y(0) = -1$

   d) $\dfrac{dy}{dx} + xy = x^3.$

3. Resuelve:

   a) $(1+y^2)\ dx + xy\ dy = 0$

   b) $\dfrac{dy}{dx}\ \sin x = y\cos x$

   c) $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{e^x}{e^x+1}y = \dfrac{x}{e^x+1}, \qquad y(0) = 1$

   d) $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{\cos x}{x}, \qquad y(\dfrac{\pi}{2}) = \dfrac{4}{\pi}$

   e) $x\sqrt{1-x^2}\ dx + y\sqrt{1-y^2}\ dy = 0, \qquad y(0) = 1$

   f) $\dfrac{dy}{dx} = e^{2x} + 2y$

   g) $y\ \ln y\ dx + x\ dy = 0, \qquad y(1) = 1.$