

PRÁCTICA 9

FLUJO DE CALOR EN BARRAS METÁLICAS

OBJETIVO

Estudio de la transmisión de calor en una barra metálica que se calienta por un extremo. Determinación del coeficiente de enfriamiento de Newton y de la conductividad térmica de un metal por comparación de la distribución de temperaturas en dos barras de metales distintos.

MATERIAL NECESARIO

- ✓ Dos barras metálicas (una de cobre y otra de aluminio)
- ✓ Termómetro digital de termopar
- ✓ Calentador eléctrico (fuente de calor) conectado a 125V
- ✓ Soporte de las barras metálicas

INTRODUCCIÓN TEÓRICA

La figura 1 muestra la barra metálica que se empleará. Se trata de una barra de cobre o de aluminio con forma cilíndrica, de $L = 50$ cm de longitud y $R = 0.75$ cm de radio, que tiene incorporada una calefacción eléctrica en uno de sus extremos.

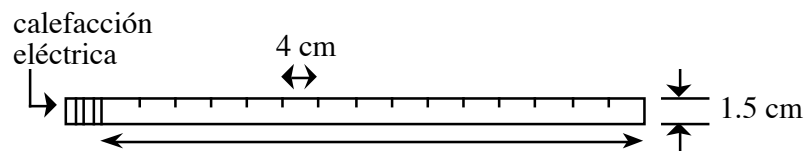


Figura 1. Barra metálica calentada por un extremo.

La energía aportada por dicha calefacción se propaga por *conducción* en el interior de la barra con un flujo \vec{J}_{cond} que viene dado por la ley de Fourier

$$\vec{J}_{cond} = -\kappa \vec{\nabla}t \quad (1)$$

donde κ es la conductividad térmica y t la temperatura. Este flujo es función de la posición dentro de la barra y tiene, por lo general, una dirección no coincidente con el eje de la barra (Figura 2). Resulta interesante comentar lo que ocurre con sus componentes.

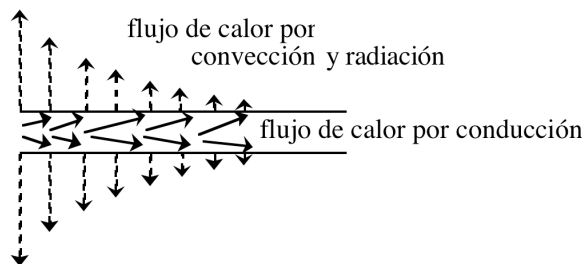


Figura 2. Flujos de calor.

Aprovechando la geometría del problema, emplearemos coordenadas cilíndricas en esta descripción. En dirección axial, el flujo se dirige del extremo caliente hacia el extremo frío; llamémosles $x = 0$ y $x = L$, respectivamente. La existencia de una componente radial (desde el eje hacia la superficie lateral de la barra) del flujo de calor por conducción depende de las condiciones de contorno en la superficie de la barra. Si esta superficie está aislada térmicamente, no hay propagación de calor en dirección radial. Sin embargo, si la superficie de la barra no está aislada térmicamente y su temperatura es superior a la del medio que la rodea (como sucede en nuestro caso), la barra pierde calor por *convección* y *radiación*. Esto conlleva generalmente la existencia de un flujo de calor por conducción en dirección radial que tiende a compensar las pérdidas. Cuando la temperatura superficial de la barra t_s difiere poco de la del ambiente t_a , el flujo de calor superficial puede suponerse proporcional a dicha diferencia de temperatura y viene dado por la ley de enfriamiento de Newton

$$\vec{J}_{\text{superf}} = N[t_s - t_a]\vec{n} \quad (2)$$

donde N es el denominado coeficiente de enfriamiento de Newton y \vec{n} denota un vector normal a la superficie y dirigido hacia fuera de la barra.

Si la calefacción y la temperatura ambiente se suponen independientes del tiempo, puede alcanzarse un estado estacionario en el que la temperatura de cualquier punto de la barra, $t(x,r)$, no varía con el tiempo y la divergencia de flujo de calor por conducción es nula

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_{\text{cond}} = -\kappa \Delta t = 0. \quad (3)$$

En esta situación, la distribución de temperaturas en la barra se obtiene resolviendo la ecuación de Laplace $\Delta t = 0$, que en coordenadas cilíndricas toma la forma

$$\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = 0. \quad (4)$$

Además, para que la superficie mantenga también su temperatura estacionaria se ha de cumplir que el flujo de calor que llega a ella por conducción iguale exactamente al flujo de calor que se pierde allí por convección y radiación

$$J_{r,\text{cond}} = J_{r,\text{superf}} \quad \Rightarrow \quad -\kappa \left(\frac{\partial t}{\partial r} \right)_{r=R} = N[t_s(x) - t_a], \quad (5)$$

donde $t_s(x) \equiv t(x,R)$.

Con objeto de evitar la resolución de la ecuación diferencial en derivadas parciales (ec. 4), introduciremos una temperatura media sobre una sección de la barra situada a una distancia x de la calefacción,

$$\bar{t}(x) \equiv \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R t(x,R) 2\pi R dr \quad (6)$$

e integraremos la ec. (4) sobre la sección de la barra para obtener la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{d^2 \bar{t}}{dx^2} = -\frac{2}{R} \left(\frac{\partial t}{\partial r} \right)_{r=R} = \frac{2N}{\kappa R} [t_s(x) - t_a] \quad (7)$$

donde se ha hecho uso de la ec. (5). Si introducimos θ como la temperatura media respecto a la ambiente, $\bar{\theta}(x) \equiv \bar{t}(x) - t_a$ y $\theta_s(x) \equiv t_s(x) - t_a$, la ec. (7) se escribirá

$$\frac{d^2 \bar{\theta}}{dx^2} = \frac{2N}{\kappa R} \theta_s(x) \approx \frac{2N}{\kappa R} \bar{\theta}(x) = p^2 \bar{\theta}(x) \quad (8)$$

donde $p \equiv \sqrt{2N/\kappa R}$ y hemos aproximado $\theta_s(x)$ por $\bar{\theta}(x)$ dado que la resistencia al flujo de calor en la barra es mucho menor que en el aire y, por tanto, la diferencia de temperatura entre el eje y la superficie de la barra ha de ser mucho menor que entre la superficie y el aire. La solución de la ec. (8) expresada en función de los valores extremos de $\bar{\theta}$ toma la forma

$$\bar{\theta}(x) = \bar{\theta}(0) \frac{\sinh[p(L-x)]}{\sinh(pL)} + \bar{\theta}(L) \frac{\sinh(px)}{\sinh(pL)}. \quad (9)$$

En barras de gran longitud (mayor que $L = 50$ cm de nuestras barras), $pL \gg 1$ y la ec. (9) se reduce a una simple distribución exponencial

$$\bar{\theta}(x) = \bar{\theta}(0) \exp(-px), \quad pL \gg 1. \quad (10)$$

Aunque esta aproximación no es válida en nuestro caso, la distribución de temperaturas a lo largo de la barra no difiere mucho de una exponencial,

$$\bar{\theta}(x) \approx \bar{\theta}(0) \exp(-p'x), \quad (11)$$

si bien el valor de p' es menor que el de p (puede demostrarse que p' es aproximadamente la mitad de p cuando $pL \approx 1$). Dado que nuestro análisis es comparativo, con barras de p similar, podemos utilizar la ec. (11) en lugar de la (9), si bien las medidas han de restringirse a la zona central de la barra (es decir, sin considerar los primeros orificios, porque la calefacción es no puntual, ni los últimos, debido a la diferencia entre la distribución real de temperatura y la ec. 11.).

PROCEDIMIENTO EXPERIMENTAL

La conexión de la calefacción de la barra se realiza de forma automática unas 2h antes de iniciarse la sesión de laboratorio, lo que asegura que se haya alcanzado el estado estacionario en el momento de la realización de la práctica.

Mídase la temperatura $\bar{t}(x)$ a lo largo de cada barra metálica en cada uno de los orificios situados cada 4.0 cm, así como la temperatura del aire, con un termómetro digital de termopar. Repítase el proceso de medida en todos los orificios varias veces para comprobar que la barra se encuentra en estado estacionario y poder considerar un valor medio para cada $\bar{t}(x)$.

PRESENTACIÓN DE RESULTADOS

- Representa $\bar{\theta}(x)$ frente a x (sin considerar los orificios de los extremos). Mediante un ajuste con el ordenador, haciendo uso de la ec. (11), calcula p' para las dos barras.
Alternativamente se puede realizar un ajuste directamente a funciones exponenciales (ec. 9) y calcular p .
- Sabiendo que $\kappa = 385 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ para el cobre, determínese el coeficiente N de la ley del enfriamiento de Newton $N \approx \kappa R p'^2 / 2$.
- Calcúlese el coeficiente de conductividad térmica del aluminio, suponiendo que el coeficiente N es el mismo para ambos materiales, a partir de la relación $(\kappa p'^2)_{\text{Cu}} = (\kappa p'^2)_{\text{Al}}$.