

PRÀCTICA 9

FLUX DE CALOR EN BARRES METÀL·LIQUES

OBJECTIUS

Estudi de la transmissió de la calor en una barra metàl·lica que s'escalfa per un extrem. Determinació del coeficient de refredament de Newton i de la conductivitat tèrmica d'un metall per comparació de la distribució de temperatures en dues barres de metalls diferents.

MATERIAL NECESSARI

Dues barres metàl·liques (una de coure i una altra d'alumini)

Termòmetre digital de termoparell

Escalfador elèctric (font de calor) connectat a 125V

Suport de les barres metàl·liques

INTRODUCCIÓ TEÒRICA

La Fig. 1 mostra la barra metàl·lica, de coure o d'alumini, amb forma cilíndrica, de $L = 50$ cm de longitud i $R = 0.75$ cm de radi. La barra té incorporada una calefacció elèctrica en un dels seus extrems.

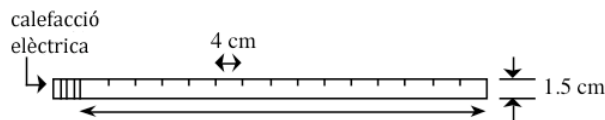


Figura 1. Barra metàl·lica escalfada per un extrem.

L'energia aportada per esta calefacció es propaga per *conducció* en l'interior de la barra amb un flux \vec{J}_{cond} que ve donat per la llei de Fourier

$$\vec{J}_{cond} = -\kappa \vec{\nabla}t \quad (1)$$

on κ on és la conductivitat tèrmica i t la temperatura. Este flux és funció de la posició dins de la barra i té, en general, una direcció no coincident amb l'eix (Fig. 2). Resulta interessant comentar el que ocorre amb els seus components.

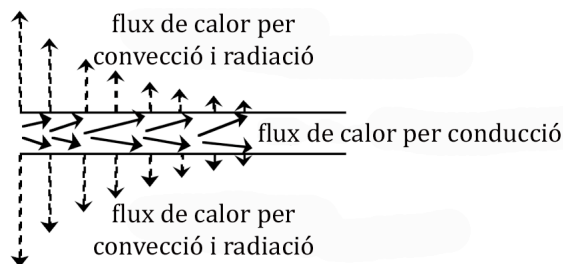


Figura 2. Fluxes de calor.

Aprofitant la geometria del problema, utilitzarem coordenades cilíndriques en esta descripció. En direcció axial, el flux es dirigeix de l'extrem calent ($x = 0$) fins a l'extrem fred ($x = L$). L'existència d'una component radial (des de l'eix fins a la superfície lateral de la barra) del flux de calor per conducció depèn de les condicions de contorn en la superfície de la barra. Si aquesta superfície està aïllada tèrmicament, no hi ha propagació de calor en direcció radial. No obstant això, si la superfície de la barra no està aïllada tèrmicament i la seua temperatura és superior a la del medi que l'envolta (com succeeix en el nostre cas), la barra perd calor per *convecció i radiació*. Açò implica l'existència d'un flux de calor per conducció en direcció radial que tendeix a compensar les pèrdues. Quan la temperatura superficial de la barra t_s difereix poc de la de l'ambient t_a , el flux de calor superficial pot suposar-se proporcional a la dita diferència de temperatura i ve donat per la llei de refredament de Newton

$$\vec{J}_{\text{superf}} = N[t_s - t_a]\vec{n} \quad (2)$$

on N és el denominat coeficient de refredament de Newton i \vec{n} denota un vector normal a la superfície i dirigit cap a fora de la barra.

Si la calefacció i la temperatura ambient es suposen independents del temps, pot assolir-se un estat estacionari en què la temperatura de qualsevol punt de la barra $t(x,r)$ no varia amb el temps i la divergència de flux de calor per conducció és nul·la

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_{\text{cond}} = -\kappa \Delta t = 0. \quad (3)$$

En esta situació, la distribució de temperatures en la barra s'obté resolent l'equació de Laplace $\Delta t = 0$, que en coordenades cilíndriques pren la forma

$$\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = 0. \quad (4)$$

A més, perquè la superfície també mantinga la seua temperatura estacionària s'ha de complir que el flux de calor que hi arriba per conducció iguale exactament el flux de calor que s'hi perd per convecció i radiació

$$J_{r,\text{cond}} = J_{r,\text{superf}} \quad \Rightarrow \quad -\kappa \left(\frac{\partial t}{\partial r} \right)_{r=R} = N[t_s(x) - t_a], \quad (5)$$

on $t_s(x) \equiv t(x,R)$.

Amb la finalitat d'evitar la resolució de l'equació diferencial en derivades parcials (eq. 4), introduïrem una temperatura mitjana sobre una secció de la barra situada a una distància x de la calefacció,

$$\bar{t}(x) \equiv \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R t(x,r) 2\pi R dr \quad (6)$$

i integrarem la eq. (4) sobre la secció de la barra per a obtindre l'equació diferencial ordinària

$$\frac{d^2 \bar{t}}{dx^2} = -\frac{2}{R} \left(\frac{\partial t}{\partial r} \right)_{r=R} = \frac{2N}{\kappa R} [t_s(x) - t_a] \quad (7)$$

on s'ha fet ús de la eq. (5).

Si introduïm θ com la temperatura mitjana mesurada respecte de l'ambient, $\bar{\theta}(x) \equiv \bar{t}(x) - t_a$ i $\theta_s(x) \equiv t_s(x) - t_a$, l'eq. (7) ens queda

$$\frac{d^2 \bar{\theta}}{dx^2} = \frac{2N}{\kappa R} \theta_s(x) \approx \frac{2N}{\kappa R} \bar{\theta}(x) = p^2 \bar{\theta}(x) \quad (8)$$

on $p \equiv \sqrt{2N/\kappa R}$ i hem aproximat $\theta_s(x)$ per $\bar{\theta}(x)$, ja que la resistència al flux de calor en la barra és molt menor que en l'aire i, per tant, la diferència de temperatura entre l'eix i la superfície de la barra ha de ser molt menor que entre la superfície i l'aire. La solució de l'eq. (8), expressada en funció dels valors extrems de $\bar{\theta}$, pren la forma

$$\bar{\theta}(x) = \bar{\theta}(0) \frac{\sinh[p(L-x)]}{\sinh(pL)} + \bar{\theta}(L) \frac{\sinh(px)}{\sinh(pL)}. \quad (9)$$

En barres de gran longitud (és a dir, major que $L = 50$ cm de les nostres barres), $pL \gg 1$, l'eq. (9) es redueix a una simple distribució exponencial

$$\bar{\theta}(x) = \bar{\theta}(0) \exp(-px), \quad pL \gg 1. \quad (10)$$

Encara que esta aproximació no és vàlida en el nostre cas, la distribució de temperatures al llarg de la barra és tal que no en difereix molt d'una exponencial,

$$\bar{\theta}(x) \approx \bar{\theta}(0) \exp(-p'x), \quad (11)$$

si bé el valor de p' és menor que el de p (pot demostrar-se que p' és aproximadament la meitat de p quan $pL \approx 1$). Com que la nostra anàlisi és comparativa, amb barres de N similars, podem utilitzar l'eq. (11) en compte de l'eq. (9), si bé les mesures han de restringir-se a la zona central de la barra. És a dir, sense considerar els primers orificis perquè la calefacció és no puntual, ni els últims degut a la diferència entre la distribució real de temperatura i l'eq. 11.

PROCEDIMENT EXPERIMENTAL

La connexió de la calefacció de les barres es realitza de forma automàtica unes 2 h abans d'iniciar-se la sessió de laboratori, lo que permet que s'haja assolit l'estat estacionari al començar la pràctica. Mesureu la temperatura $\bar{t}(x)$ al llarg de la barra en cadascun dels orificis situats cada 4.0 cm, així com també la temperatura de l'aire, amb un termòmetre digital de termoparell. Repetiu el procés de mesurament en tots els orificis varies vegades per comprovar que la barra es troba en estat estacionari (podeu considerar un valor mitjà per a cada $\bar{t}(x)$).

PRESENTACIÓ DE RESULTATS

- (a) Representeu $\bar{\theta}(x)$ en funció de x (sense considerar els orificis dels extrems). Mitjançant un ajust amb l'ordinador fent ús de la eq. (11), calcula p' per a les dos barres.

Alternativament, es pot realitzar un ajust directament a les funcions exponencials (eq. 9) i obtindre el valor de p .

- (b) Sabent que $\kappa = 385 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ per al coure, determineu el coeficient N de la llei de refredament de Newton, $N \cong \kappa R p'^2 / 2$.

- (c) Calculeu el coeficient de conductivitat tèrmica de l'alumini, suposant que el coeficient N és el mateix per a ambdós materials, a partir de la relació $(\kappa p'^2)_{Cu} = (\kappa p'^2)_{Al}$.