Didáctica de la geometría y demostración de propiedades

Enrique de la Torre Fernández
Facultad de Ciencias de la Educación
Universidade da Coruña
torref@udc.es

Introducción.

Dentro de las investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de la geometría, se ha desarrollado una línea de investigación que tiene como objeto estudiar el papel que la demostración de propiedades geométricas, desempeña en el aprendizaje de la geometría. Dentro de este marco general, tratamos de presentar los caminos abiertos en los últimos años, lo que lleva a considerar tres vías: el papel de la demostración en la educación matemática y en el aprendizaje de la geometría en particular, el problema de la aceptación de la demostración según diferentes mecanismos cognitivos, y la utilización de la tecnología en las demostraciones geométricas, en particular, los programas de 'geometría dinámica'.

El papel de la demostración en la educación matemática y en el aprendizaje de la geometría.

La prueba es algo esencial a las matemáticas y por lo tanto debería ser una componente clave en la educación matemática en todos los niveles. La justificación de ésto no es solamente por ser algo que es fundamental en la práctica matemática, sino porque además es una herramienta esencial para promover la comprensión matemática.

Pero no todos los matemáticos y educadores estuvieron o están de acuerdo con esto. Después de las reformas educativas de los 50 y de los 60, en el pasado siglo, la prueba fue prácticamente relegada a la heurística (ver Hanna – Jahnke, 1996). Pero últimamente se está viendo un paso adelante en el uso de la prueba en la clase y en la proliferación de investigaciones que giran en torno a la prueba y la educación matemática.

Para muchos alumnos la prueba es un ritual sin significado, lo que se refuerza aún más si se les pide que escriban pruebas según un modelo determinado. En Primaria las matemáticas están llenas de conceptos aritméticos, cálculos y algoritmos. Cuando llegan a Secundaria, se pide a los estudiantes que entiendan resultados matemáticos y quizás alguna prueba escrita, principalmente en geometría.

Desde los primeros niveles se necesita una cultura de la argumentación que perdure durante toda la escolarización. Y también necesitamos conocer más acerca de las dificultades que encuentran los estudiantes cuando se enfrentan a pruebas, y acerca de los problemas y desafíos a los que se enfrentan los profesores cuando quieren situar la argumentación como una cuestión central en la clase de matemáticas.

Las dificultades epistemológicas de los estudiantes se pueden comparar a las de los científicos en el desarrollo de una nueva teoría. Al principio no hay definiciones, no está claro lo que hay que probar y lo que se puede suponer cierto. En los comienzos de una teoría, la prueba puede servir más para comprobar la credibilidad o lo apropiado de una suposición, más que para establecer la verdad de un enunciado. Solamente cuando la teoría ya está madura (o los estudiantes ya se sienten bien, cómodos, en el correspondiente dominio), la prueba juega su función matemática de validar la verdad de un teorema.

Podemos señalar tres líneas según las que enfocar las investigaciones:

1) Acerca del papel y la función de la prueba en matemáticas, incluyendo estudios de las prácticas de probar en el que se implican los matemáticos (análisis epistemológico);

2) Acerca del proceso gradual y las complejidades implicadas en aprender a probar (investigación empírica), y

3) Acerca del desarrollo, implementación y evaluación de estrategias de enseñanza efectiva, así como el diseño de entornos de aprendizaje, que puedan ayudar al desarrollo de la habilidad de probar en los distintos niveles educativos (investigación de diseño).

La complejidad de la prueba deductiva

Las pruebas deductivas en matemáticas ofrecen la forma más pura de distinguir lo correcto de lo erróneo. La prueba se asienta en una serie de 'hábitos mentales', de buscar estructuras e invariantes, de identificar suposiciones, de organizar argumentos lógicos; luego estos procesos se han de coordinar con la evidencia empírica, con resultados matemáticos y con hechos, y están además influidos por la intuición y las creencias, por las percepciones de autoridad y convicciones personales y por las normas sociales que regulan lo que se requiere para comunicar una prueba (Clements - Battista, 1992; Hoyles, 1997; Healy – Hoyles, 2000).

El fracaso de la enseñanza de la geometría en la educación proviene, al menos parcialmente, de una falta de reconocimiento de esta complejidad subyacente a la prueba: la práctica tradicional era simplemente presentar la prueba deductiva formal sin atender a su función o a cómo puede conectar con las intuiciones de los estudiantes acerca de lo que puede ser un argumento convincente: "lo deductivo no se enseñaba como reinvención, como hizo Sócrates, sino que era impuesto sobre el aprendiz" (Freudenthal, 1973, p. 402).

La prueba debería ser parte del proceso de resolución de problemas, logrando que los estudiantes fuesen capaces de mezclar deducción y experimentación, idear representaciones, trazar diagramas, moverse entre diferentes representaciones. ¿Cuáles son los principales obstáculos para alcanzar estos hábitos de flexibilidad mental?

Celia Hoyles y Dietmar Küchemann desarrollaron el trabajo de investigación (1999-2003) "The Longitudinal Proof Project" (Hoyles y Küchemann: http://www.ioe.ac.uk/proof/), que analiza trayectorias de aprendizaje de los estudiantes sobre razonamiento matemático, a lo largo del tiempo. Trabajan con estudiantes de diversas regiones de Inglaterra y en 63 escuelas elegidas aleatoriamente; inicialmente eran 3000 estudiantes de 8º año (13 años) en el año 2000.

Los tests utilizados trataron de averiguar cómo los estudiantes usan el razonamiento matemático para tomar decisiones en geometría y hasta qué punto simplemente estaban argumentando en base a la percepción o a 'lo que parece'. En ambos casos se les presenta un diagrama geométrico, que proporciona apoyo a una conjetura que resultará falsa. Se pregunta a los estudiantes si están de acuerdo o no con la conjetura y se les pide que expliquen la decisión que tomen.

Entre los resultados encuentran que, aunque los estudiantes no mejoran a lo largo del tiempo en rechazar la percepción errónea, mejoran en el cálculo. En los items donde se necesitaban cálculos y se pedían ‘razones’ para cada uno de los pasos, los estudiantes no entendían ‘qué significaba dar una razón’. Algunos lo interpretaron como explicar el paso que habían dado o detallar lo que estaban pensando.

En esta investigación se han encontrado con muchos resultados sorprendentes, pero constatan que necesitan más trabajo sistemático en investigación longitudinal.

Pruebas con argumentos procedentes de la física.

En matemáticas se han usado a menudo argumentos de la física para las demostraciones. Algunos ejemplos son el principio de Dirichlet en el cálculo variacional o el uso por Arquímedes de la ley de la palanca para determinar los volúmenes de sólidos, que, aunque no sean consideradas unas pruebas rigurosas, sí se consideran ‘pruebas elegantes’. De la misma manera, Polya (1954) y Winter (1978) han propuesto que se podían y debían usar argumentos provenientes de la física en la enseñanza de las matemáticas escolares (ver Tokieda, 1998). Pero esta aproximación a la prueba no se ha explorado suficientemente en el aula.

La aplicación de la física va más allá de la simple representación física de conceptos matemáticos y también difiere de obtener conclusiones matemáticas generales a través de la exploración de un gran número de ejemplos. Más bien de lo que se trata es de usar los principios de la física, tal como la unicidad del centro de gravedad (teorema de Varignon), en una prueba y tomar ese hecho como si fuera un axioma, un teorema o un resultado matemático.

Un argumento que utiliza hechos físicos puede:

- proporcionar una prueba más elegante,

- revelar los hechos esenciales de una estructura matemática compleja,

- señalar la relevancia de un teorema para otras áreas de las matemáticas o para otras disciplinas,

- ayudar a crear una versión ‘holística’ de una prueba, que puede ser asimilada en toda su complejidad, en oposición a un argumento matemático, que quizás, al ir recorriendo paso a paso los hechos, no permite una visión global.

Hay varias razones acerca de por qué se debería desarrollar e investigar esta aproximación a la enseñanza de la prueba. La primera es que se trata de un método nuevo y posiblemente más atractivo. Otra razón es que la práctica matemática actual se inclina por la experimentación, y no podemos dejar esta experimentación solamente a las ‘matemáticas con ordenador’. El currículum debería incluir un fuerte componente dedicado a las aplicaciones de las matemáticas al mundo físico. Cultivando este tipo de matemáticas, los estudiantes y los profesores deberían dejarse guiar por la pregunta de cómo las matemáticas ayudan a explorar y a entender el mundo a nuestro alrededor.

Gila Hanna (University of Toronto) y Hans Niels Jahnke (Universität Essen) estudian los potenciales y los inconvenientes de esta aproximación, en aulas canadienses y alemanas. Las cuestiones investigadas conciernen a la viabilidad y la aceptación de esta aproximación, dado el limitado conocimiento de la física en estudiantes de ambos países. También se preguntan si esta aproximación ayuda más a la comprensión general de la prueba y si los estudiantes son conscientes de la diferencia entre usar argumentos de la física y la alusión a un amplio número de ejemplos (Hanna & Jahnke, 2002).

Posibles líneas de investigación.

- Encontrar modos efectivos de usar la prueba para promover la comprensión matemática.
- Conocer más acerca de las dificultades que encuentran los estudiantes cuando se enfrentan a pruebas
- Conocer los desafíos a los que se enfrentan los profesores cuando sitúan la argumentación como una cuestión central en la clase de matemáticas.
- Buscar una percepción más clara del papel y la función de la prueba en matemáticas (análisis epistemológico)
- Conseguir una comprensión más profunda del proceso y de las complejidades implicadas en aprender a probar (investigación empírica)
- Desarrollar, implementar y evaluar estrategias de enseñanza efectiva, así como diseñar entornos de aprendizaje que puedan ayudar al desarrollo de la habilidad de probar en los diferentes niveles (investigación de diseño).
- Averiguar el tipo de razonamiento matemático apropiado para los estudiantes de los primeros años escolares.

Estudiar el comportamiento de los profesores para desarrollar la capacidad de los estudiantes acerca de un razonamiento matemático.

Desarrollar investigaciones longitudinales acerca de las trayectorias de los estudiantes sobre razonamiento matemático.

- Investigar aproximaciones a la enseñanza de la prueba con argumentos físicos:
    - Viabilidad y aceptación de esta aproximación.
    - Valoración de la comprensión general de la prueba.
    - Creencias delos estudiantes acerca de la diferencia entre usar argumentos de la física y la alusión a un amplio número de ejemplos.

Referencias.

Ball, D. L. , & Bass, H. (2002). Making mathematics reasonable in school. In J. Kilpatrick, J., Martin, W. G., & Schifter, D. E.(Eds.). (in press). *A research companion to principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Ball, D. L., and Bass, H. (2000). Making believe: The collective construction of public mathematical knowledge in the elementary classroom. In D. Phillips (Ed.), *Yearbook of the National Society for the Study of Education, Constructivism in Education*, (pp. 193-224). Chicago: University of Chicago Press.

Clements, D. H. & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. Grouws, (Ed) *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, (pp. 420 – 464). New York: Macmillan.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task* . Dordrecht: Reidel.

Hanna, G. & Jahnke, N. (1993). Proof and application, *Educational Studies in Mathematics*, 24 (4), 421- 438.

Hanna, G. & Jahnke, N. (1996). Proof and proving. In A. Bishop; K. Clements, C. Keitel; J. Kilpatrick; C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education*, (pp. 877 – 908). Dordrecht: Kluwer.

Hanna, G. & Jahnke, N. (2002). Another approach to proof. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 34 (1), 1 – 8.

Healy, L. & Hoyles, C. (2000). From explaining to proving: a study of proof conceptions in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31, 396- 428.

Hoyles C, (1997). The curricular shaping of students' approaches to proof, *For the Learning of Mathematics*, 17 (1), 7-15.

Hoyles, C. & Küchemann, D. (1999-2003) *Longitudinal Proof Project* (http://www.ioe.ac.uk/proof/),

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Polya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning*. Vol.1: *Induction and analogy in mathematics*. Princeton: Princeton University Press.

Tokieda, T. F. (1998). Mechanical ideas in geometry. *American Mathematical Monthly* 105, 697 – 703.

Winter, H. (1978). Geometrie vom Hebelgesetz aus -- ein Beitrag zur Integration von Physik und Mathematikunterricht der Sekundarstufe I. *Der Mathematikunterricht*, 24 (5), 88-125.

Bases de datos.

www.emis.de/MATH/DI.html : base de datos de la revista de documentación en didáctica de la matemática *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* (ZDM).

www-didactique.imag.fr/preuve : Preuve / Proof / Prueba: *International newsletter on the teaching and learning of mathematical proof*. (Revista electrónica bimensual dedicada, como su título indica, a la enseñanza/aprendizaje de la demostración desde la óptica de la didáctica de la matemática).