EL PROBLEMA DE LA COMPRENSIÓN

EN CONEXIÓN CON LA COMPRENSIÓN DE LOS ESCOLARES EN EL APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA

(De Problematiek van het inzicht. Gedemonstreerd aan het inzicht van schoolkinderen in meetkunde-leerstof)

por

PIERRE MARIE VAN HIELE

Tesis presentada para la obtención del grado de Doctor en Matemáticas y Ciencias Naturales en la Universidad Real de Utrecht el 4 de julio de 1957.

Director: Prof. Dr. H. Freudenthal

Traducción al español realizada en 1990 por el proyecto de investigación *Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometría en Enseñanza Media basada en el modelo de razonamiento deVan Hiele* (director Angel Gutiérrez) del Concurso Nacional de Proyectos de Investigación Educativa del C.I.D.E. (1989-91).

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

"Inzicht[1]" es un concepto que puede manifestarse de distintas formas. El significado de los distintos aspectos variará según el contexto en que se estudie la comprensión. En el presente estudio me he ocupado en particular del lugar que ocupa la comprensión en el mundo de la didáctica y más concretamente en la enseñanza de la geometría. Esta demarcación supone que las conclusiones alcanzadas sólo deberán ser aceptadas como "universalmente válidas" tras estudios más detallados. Sin embargo el presente trabajo indica que no hay que esperar diferencias esenciales entre "comprensión en geometría" y "comprensión en matemáticas en general". Hasta pienso que la "comprensión en matemáticas" tiene muchos puntos en común con la "comprensión en asignaturas no-matemáticas". Aunque es muy probable que el papel que cumple la comprensión en ciertas asignaturas sea menos fundamental que en matemáticas. Ello no debe llevar a suponer, sin embargo, que esas asignaturas sean de menor importancia para el niño.

En el presente trabajo analizo la comprensión en su contexto didáctico, es decir, en relación con la influencia que el profesor puede ejercer sobre la situación didáctica en que se encuentra el niño. De ahí pues, que tocaré sólo en parte lo que la comprensión significa en la vivencia emocional del niño. Esta situación podría ser muy distinta si la comprensión se estudiase en un contexto pedagógico.

El significado de "comprensión" en matemáticas es tan fundamental que su didáctica puede ser estructurada en gran medida a través del análisis de la comprensión. Espero que esto se podrá deducir de los siguientes capítulos.

Una de las maneras en que las ideas que expongo aquí pueden llevarse a la práctica puede verse en el estudio de mi mujer: "La didáctica de la geometría en el primer curso del V.H.M.O.[2]", obra a la que me referiré en varias ocasiones a lo largo de mi estudio.

Como recapitulación se ofrece al final del último capítulo (pág. 212) una exposición del método seguido así como un resumen de los resultados obtenidos.

1 Aunque en el contexto de la Teoría de Van Hiele la palabra "inzicht", o "insight" en inglés, no tiene una traducción unánimemente aceptada en español, hemos optado por traducirla como "comprensión". Así pues, el único significado de "comprensión" aquí es el que se desprende del presente texto, en particular del capítulo I, por lo cual no tiene por qué coincidir con el que habitualmente damos a esta palabra (N. de A.G.R.).

2 V.H.M.O. = Voorbereidend Hoger en Middelbaar Onderwijs = Enseñanza Superior y Secundaria Preparatoria (N. del T.).

CAPÍTULO I

¿QUÉ ES LA COMPRENSIÓN?

En las polémicas que rodean a la enseñanza aparece a menudo el término comprensión. Se encuentra en las memorias de las programaciones didácticas, tanto en las ya existentes como en las proyectadas. También se suele oir en reuniones y en los encuentros con los padres. Es de suponer que los que utilizan la palabra tienen una idea muy clara de lo que para ellos significa puesto que conceden gran importancia al hecho de que haya o no haya comprensión. Así, en las observaciones en torno al borrador de la programación del examen final de matemáticas para el H.B.S.-B[3], redactado por WIMECOS, encontramos la siguiente observación: "Algo tan insignificante como las complicaciones técnicas puede ser motivo de que los alumnos pierdan la comprensión de lo esencial del método. Y de lo que se trata es de tener comprensión". En las reuniones de profesores el hecho de que un alumno no sea capaz de manifestar comprensión en determinada materia sirve de argumento para hacerle elegir una opción académica distinta. Estos ejemplos ponen de manifiesto la importancia que tiene el concepto comprensión en el mundo de la enseñanza: ¿de qué manera condiciona la programación de exámenes, la elección de la materia, los métodos didácticos? ¿Cómo se usa para determinar el desarrollo académico del niño?

En base a estas consideraciones he creído necesario profundizar en el estudio de la comprensión. Puesto que me propongo estudiar la comprensión tal y como existe en la enseñanza de las matemáticas en V.H.M.O., es evidente que intentaré en lo posible ceñirme al contenido conceptual que se ha venido dando a la "comprensión" en ese contexto. Es por ello que debo desistir de la metodología que resulta más eficaz en matemáticas: elaborar una definición de comprensión para obtener un contenido conceptual con el que trabajar cómodamente. Con ello se llegaría probablemente a un concepto nuevo que no nos serviría para el estudio del que ya tenemos. Si además pensamos que las publicaciones acerca del concepto de comprensión que nos ofrecen las psicologías del pensamiento y del aprendizaje no han llegado todavía al punto de crear un nuevo concepto que logre eclipsar al que ya se conoce a través de la práctica docente (cosa que sí ha ocurrido con "inteligencia"), es mejor que empecemos por analizar el fenómeno "comprensión" tal y como se conoce en el V.H.M.O.

Se dice que un niño tiene comprensión en un determinado campo de la geometría cuando, a partir de los datos y relaciones geométricas que se le suministran, es capaz de llegar a una conclusión en una situación con la que nunca se había enfrentado antes. El niño suele ir averiguando su adquisición de comprensión de la siguiente manera: "Ah, ya lo veo, o sea que si …". y a continuación formula un nuevo teorema. Lo característico de la comprensión es pues que se van tanteando nuevas situaciones.

Quizá es siguiente ejemplo lo ilustre mejor. Supongamos que estudiamos el siguiente teorema estereométrico: "Si se dice de un cierto número de líneas que cada una corta a otra, entonces estas líneas o bien se encuentran todas en un mismo plano, o bien pasan todas por un mismo punto". Sírvanos esto para el siguiente teorema: "En todo tetraedro las medianas y las líneas que unen los centros de las aristas opuestas pasan por un mismo punto". Primero se demuestra que dos medianas cualesquiera se cortan. De aquí se concluye que cada mediana corta a la otra. Para el primer teorema estereométrico no se precisa tener comprensión. Sin embargo para sacar la conclusión se necesita: *a*) comprensión del concepto "cualesquiera", *b*) comprensión de la situación que se crea al aplicar el concepto "cualesquiera" a las medianas de un tetraedro. En base al teorema anterior, del hecho de que las medianas de un tetraedro no se hallan en un mismo plano, se deduce que pasan por un mismo punto. Esto no es más que una aplicación elemental del teorema. Hasta aquí no es preciso tener comprensión. A continuación se demuestra que la línea de enlace entre los centros de

3 H.B.S. = Hogere Burger School = antiguo tipo de Bachillerato, 3-5 años, sin lenguas clásicas (N. del T.).

dos aristas opuestas del tetraedro corta cualquier línea similar. Por lo que se puede volver a concluir, al igual que con las medianas, que también las líneas de enlace entre los centros de las aristas opuestas del tetraedro pasan por un mismo punto. Queda por demostrar que el punto en que se cortan estas últimas líneas coincide con el punto en que se cortan las medianas. Es ahora cuando le llega al niño la oportunidad de demostrar que tiene comprensión del mencionado teorema. Esto será así cuando llegue, *sin ninguna ayuda*, a la conclusión de que dicha coincidencia de puntos queda demostrada si logra probar que cada mediana corta cada línea de enlace entre los centros de dos aristas opuestas. Lo cual viene a ser el teorema de que cualquier mediana corta cualquier línea de enlace entre los centros de dos aristas opuestas.

El alumno todavía puede demostrar que tiene comprensión de *la demostración del primer teorema*. Esto será así cuando, de forma espontánea, observe que la segunda parte de la demostración presentada (el que las líneas de enlace entre los centros de las aristas opuestas pasan por un mismo punto) puede perfectamente ser omitida. Puesto que si se ha demostrado que una línea de enlace cualquiera corta una mediana cualquiera, entonces corta todas las medianas, lo cual, considerando el hecho de que no se hallan en un mismo plano, sólo es posible si pasa por el punto de intersección de éstas.

El ejemplo anterior ilustra que la comprensión se ciñe a un campo muy limitado de la geometría. Es posible avanzar más si estudiamos el concepto "comprensión" mediante un modo de razonar muy frecuente en geometría: la secuencia lógica. Se entiende por secuencia lógica una serie de silogismos en la que la conclusión de un silogismo supone la premisa del siguiente. El objetivo de estas secuencias es partir de un determinado dato para llegar a conclusiones que se encuentran alejadas de este primer dato. Cuando el niño se enfrenta a una secuencia de este tipo, pueden darse los siguientes casos:

a. El alumno no entiende la secuencia porque no entiende el sentido de una o varias de las afirmaciones. Es obvio que en tal caso carece de la suficiente comprensión en el terreno al que hacen referencia las afirmaciones.

b. El alumno no entiende la secuencia porque no ve la relación lógica entre las afirmaciones. En tal caso carece evidentemente de la suficiente comprensión en el terreno de las relaciones entre las afirmaciones.

c. El alumno no entiende la secuencia porque, a pesar de entender paso a paso la relación entre las distintas afirmaciones, no puede aceptar el hecho de que de las premisas se saque la conclusión hallada en último lugar. En este caso nos encontramos ante una falta de comprensión de la totalidad de la secuencia. Hay que observar sin embargo que en este caso la no-comprensión presupone sin embargo un cierto tipo de comprensión: la no-aceptación es consecuencia de una opinión que ha llegado a formarse (ver Delacroix III, pág. 456). Puede ocurrir que el alumno dude de la conclusión basándose en ciertas experiencias; puede ocurrir también que experiencias con otras secuencias le hagan suponer que debe haber algún error en las relaciones.

d. Entender la secuencia no supone sin más el máximo grado de comprensión. Con el tipo de comprensión referido en *c*, como mucho se pueden formar sin ayuda secuencias como la indicada. El reconocimiento del tipo de secuencia requiere a su vez un grado superior de comprensión.

Los dos ejemplos anteriores pueden dar la impresión de que la comprensión se materializa siempre a través de mecanismos lógicos. Hay que recordar, sin embargo, que nos estamos refiriendo a ejemplos de comprensión que se producen en un contexto de razonamientos matemáticos. Esta demarcación es la causa de que se enfatice el aspecto lógico. En terrenos distintos habrá que considerar la posibilidad de que la comprensión surja de un modo muy diferente al lógico. Incluso en el mismo campo de las matemáticas no habría que excluir del todo este tipo de comprensión; sería muy probable que el no entender las relaciones, a que hace referencia *b*, surja del conflicto con una comprensión en figuras geométricas originado de forma muy distinta a la lógica. El profesor debe tenerlo muy en cuenta en su didáctica: los conflictos de este tipo no se solucionan con argumentos lógicos. El análisis de ambos ejemplos no debe considerarse de modo alguno como absoluto. Lindworsky (ver Langeveld I. pág. 300) ha analizado el razonamiento que debe efectuarse en el caso de silogismos simples de manera mucho más pormenorizado de como lo he hecho yo con la secuencia lógica. Sin embargo, no es preciso hacer un análisis tan detallado para aproximarse al concepto "comprensión". Observamos que siempre nos estamos encontrando con la comprensión en casos muy especiales como, por ejemplo, en el concepto "cualquiera", en el alcance de determinado teorema, en la índole de una secuencia lógica, etc. Si hubiéramos echado mano del análisis de Lindworsky, habríamos podido añadir varios tipos más de comprensión a la lista. Sin embargo la certeza de que este tipo de comprensión existe se obtiene en cada uno de estos casos mediante el tanteo de un nueva situación elegida por el profesor o por el mismo alumno. En el caso de la secuencia lógica es posible que la comprensión vaya creando una serie de situaciones nuevas, quedando demostrada la existencia de la comprensión cuando el alumno ofrece para cada paso una explicación que él mismo ha hallado (ver también Burton, pág. 156).

A veces se oye decir que la comprensión existe ahí donde el sujeto extrae sus conclusiones basándose en una estructura de pensamiento que se ha formado en él. Esta afirmación, originaria de la psicología Gestalt, resulta un tanto imprecisa. Sin embargo sí que podemos reconocer en esta afirmación nuestra característica funcional del concepto de comprensión. La existencia de dicha estructura de pensamiento se averiguará forzosamente según el éxito o fracaso del sujeto en llegar a la conclusión que el conductor de la prueba todavía le está ocultando.

Hay que observar además que comprensión y situación de aprendizaje van muy unidas. La persona se encuentra en un proceso de aprendizaje y después de cierto tiempo está capacitada para actuar de manera adecuada ante situaciones que todavía no habían aparecido en su proceso de aprendizaje. Se dice entonces que ha actuado basándose en la comprensión que ha adquirido durante el aprendizaje. La pregunta de si es necesario que dicha actuación sea *adecuada* no deja de ser importante. Van Parreren (I, pág. 17 y ss.) ha demostrado que el aprendizaje puede revelar tendencias inadecuadas. De ello deduce que no es igual aprender que adquirir comprensión. Un ejemplo sacado de la práctica nos puede ayudar a responder a esta cuestión. Reproduzco aquí una conversación con una niña de 7.7 años:

Est.: Me sé la tabla del 5.
Prof.: ¿Cuánto son 8 x 5?
E: 40.
P: ¿Cuánto son 5 x 8?
E: También 40, claro.
P: ¿Y 6 x 8?
E: 45, 5 más.
P: ¿Es correcto eso?
E: 46, 6 más.
P: Aún no.
E: (tras mucho pensar) 48.
P: ¿Cuánto son 10 x 8?
E: 80.
P: ¿Y 11 x 8?
E: 91.

Queda claro que la niña respondió basándose en una estructura formada. El origen de los errores es fácil de averiguar. En la mente de la niña existe la comprensión de que la multiplicación consiste en una suma repetida; sin embargo confunde el multiplicador con el multiplicando. Esto se deduce de la siguiente conversación:

P: ¿Cuánto son 4 x 3?
E: 12.
P: ¿Cómo lo sabes?
E: 4 y 4 hacen 8. 4 más y tenemos 12.
P: ¿Crees de verdad que has cogido cuatro veces 3?
E: Bueno, lo he hecho al revés, pero sale igual.

Este tipo de resultados se suele llamar comprensión "prorruptora", en el sentido de que se está materializando una comprensión. Por ello podemos suponer que en la enseñanza es indispensable actuar de manera adecuada para que haya comprensión.

Los dos momentos de la comprensión, es decir, el "actuar adecuadamente" y la "nueva situación" pueden ser motivo de controversia a la hora de determinar si hay o no hay comprensión: ¿siempre es posible determinar si la actuación es adecuada o no? ¿Y en qué casos se puede llamar "nueva" a un determinada situación? En sentido estricto se puede decir que toda situación es nueva al igual que podría decirse que toda actuación intencionada requiere como mínimo un poquito de comprensión.

En mi análisis de la secuencia lógica indiqué que la no-comprensión de una línea de pensamiento complicada puede ser debida a una falta de comprensión de una o varias de las componentes de dicho proceso; el análisis más pormenorizado que hace Lindworsky apunta a la posibilidad de que el fallo se deba a una falta de comprensión de alguna de las componentes de diferenciación más sutil. Cuando el silogismo se presenta de forma concreta, siendo por tanto conocidas las premisas, se pueden hacer distinciones de manera más detallada, por lo que el error se puede localizar en articulaciones aún más sutiles de la línea de pensamiento. Será de vital importancia para la enseñanza saber si también, al revés, es necesario que todas esas comprensiones estén presentes para producir una comprensión global. Esto se verá en profundidad en los siguientes capítulos.

En la manera como se manifiesta la comprensión, se vislumbra la extraordinaria importancia que tiene para la enseñanza. En primer lugar, el poder hacer funcionar una asignatura en otro campo requiere cierta comprensión. Por ejemplo, para aplicar el álgebra a las ciencias naturales hay que saber actuar en una nueva situación, o sea, tener comprensión. El hecho de que el concepto de "novedad" tiene aquí un significado real se puede ver en el primer ejemplo que dimos sobre las medianas en un tetraedro. La nueva situación sólo consistía en que un teorema válido para un número cualquiera de líneas se aplicaba a siete líneas, de las que cuatro se llaman medianas y tres líneas de enlace entre los centros de las aristas opuestas. Con cuánto más motivo podremos hablar de situaciones nuevas cuando apliquemos el álgebra a las ciencias naturales, que tienen objetos completamente distintos. La tarea del educador es buscar los medios para desarrollar la comprensión que le permita al alumno manejar una asignatura en terrenos distintos. También se tratará este problema en los próximos capítulos.

La cuestión de si una signatura tiene valor formativo está también estrechamente ligada a la comprensión. Castiello (pág. 60) concluye lo siguiente:

"No hay nada tan perjudicial para la educación como lo mecánico. La experiencia ha venido demostrando continuamente que el nivel de la educación formal depende del método pedagógico. Al alumno hay que llamarle la atención sobre el aspecto intelectual de las asignaturas, sobre los métodos que les corresponden y sobre la forma y manera en que esos método se pueden usar en otros campos".

El grado formativo dependerá de si se ha adquirido comprensión de los métodos seguidos.

Puesto que suele ocurrir con mucha frecuencia que el hombre desea actuar de forma adecuada en nuevas situaciones (condición ésta para actuar-con-comprensión), es obvio que una de las necesidades vitales del hombre consiste en adquirir comprensión en todos aquellos terrenos que debe dominar para sus actos y para la que tiene suficientes aptitudes. Cuando luego nos encontramos en las escuelas con alumnos que se contentan con aprender hechos y métodos sin comprensión, esto indica que la enseñanza funciona mal. Es fundamental averiguar las causas de esta situación indeseada así como buscar los medios para enmendarla. Es lo que me propongo en alguno de los capítulos que siguen.

En el capítulo IV espero poder demostrar cómo las diferencias de opinión acerca del enfoque de la geometría van paralelas a las diferencias que existen en la psicología del pensamiento, en la que el significado de la comprensión juega un papel fundamental en el proceso del pensamiento.

CAPÍTULO II

¿CÓMO SE TANTEA LA EXISTENCIA DE COMPRENSIÓN?

En el capítulo anterior he señalado como dos puntos clave de la comprensión el actuar de forma adecuada y la novedad de la situación. Sobre todo este último punto puede acarrear problemas a la hora de averiguar la existencia de comprensión. Sólo podemos saber si hay o no hay comprensión si estamos seguros de que la situación en la que se coloca al sujeto es lo suficientemente nueva para él. Si entre el conductor y el sujeto de la prueba existe el suficiente entendimiento se podrá cumplir esta condición: el sujeto podrá informar debidamente al conductor de la prueba. En principio no resulta desatinado suponer que exista este entendimiento; también es deseable, por ejemplo, que un médico tenga esa relación con su paciente para así poder emitir un diagnóstico acertado. Sin embargo la práctica de la enseñanza es diferente: en muchos casos se suele partir del supuesto de que el alumno intenta ocultar al máximo su ignorancia o su falta de comprensión, por ejemplo, al aprenderse de memoria las respuestas de ciertas preguntas que se le puedan formular. Así evita la dificultad de tener que enfrentarse a una nueva situación. La tarea del profesor en ese caso es hacer preguntas que el alumno no espera y que son características de la comprensión que se pretende determinar. Estas preguntas se conocen con un nombre: preguntas-comprensión.

Supongamos que se conoce el siguiente teorema: "En un triángulo las bisectrices de los ángulos pasan por un mismo punto". Supongamos también que se ha estudiado la demostración de este teorema. Para comprobar la comprensión del alumno le podemos preguntar lo siguiente:

a. "¿Las bisectrices de un cuadrilátero pasan en general por un mismo punto? Justifica tu respuesta".

Con esta pregunta se pretende saber si el alumno tiene comprensión del teorema auxiliar: "Si las bisectrices de un polígono pasan por un mismo punto, entonces existe un punto que se encuentra a igual distancia de todos los lados". Este teorema ha aparecido implícitamente en la demostración del teorema estudiado, sin que se haya indicado que su validez es más amplia y no sólo circunscrita a los triángulos. Apenas se requiere conocimiento alguno de otros campos de la geometría para solucionar el problema, por lo que puede considerarse como un caso típico para determinar la comprensión.

b. "Si se sabe que las bisectrices de tres de los ángulos de un cuadrilátero pasan por un mismo punto, entonces dicho cuadrilátero tiene un círculo inscrito. Demuéstralo".

Este problema pretende averiguar la existencia de comprensión del teorema auxiliar: "En todo triángulo existe un punto que se encuentra a igual distancia de los lados".

c. "Si un cuadrilátero tiene un círculo inscrito, entonces las bisectrices de todos los ángulos, que cada vez contienen dos lados, pasan por un mismo punto. Demuéstralo".

Con este problema se pretende averiguar la comprensión del teorema auxiliar que se ha aplicado implícitamente: "Si en un polígono hay un punto que está a igual distancia de los lados entonces las bisectrices pasan por un mismo punto".

Del ejemplo anterior se puede concluir lo siguiente:

1°. Es posible averiguar si un alumno tiene comprensión de un teorema determinado. Podemos distinguir entre: la comprensión de los distintos elementos constitutivos de la demostración y la comprensión del contenido del teorema. Si se considera la adquisición de comprensión por parte del alumno como norma para sus progresos, es posible expresar una valoración de dichos progresos.

2°. Para averiguarlo es deseable, y mejor aún necesario, que el alumno colabore. Resulta difícil hacer constantemente preguntas que el alumno no haya podido prepararse de memoria.

3°. Los alumnos que demuestren buena disposición estarán encantados de averiguar la comprensión que tienen. Este tipo de preguntas les resultan muy tentadoras.

Las personas familiarizadas con el mundo de la enseñanza sabrán que las preguntas que se han plantado aquí son difíciles, quizá demasiado difíciles para el alumno medio, lo cual implica que para la gran parte de los alumnos resulta imposible adquirir la comprensión que estas preguntas pretenden averiguar. En este caso podemos plantearnos las siguientes cuestiones:

a. ¿Tiene sentido tratar dicha materia si no aparece en ella la comprensión?

b. ¿Los alumnos que no manifiestan comprensión no están capacitados para estar en este tipo de escuela?

c. ¿Quizá la materia se está impartiendo en un momento inoportuno?

d. ¿Quizá la no aparición de comprensión se debe a programas sobrecargados?

Trataré estas cuestiones al hablar de las programaciones didácticas.

Las preguntas que se hacen para demostrar que el alumno tiene una comprensión insuficiente de los elementos constitutivos son de índole algo distinta. Se coge uno de los fundamentos de la demostración, o el simple contenido de un teorema, cambiando un poco las palabras. Si el alumno se arma un lío es muy probable que no haya entendido el teorema o la demostración.

Algunos ejemplos:

Los alumnos han estudiado las funciones cuadráticas y han hallado mediante la reducción $\frac{-1}{2}x^2 + 3x - 13 = \frac{-1}{2}(x - 3)^2 - 8\frac{1}{2}$ que la función $\frac{-1}{2}x^2 + 3x - 13$ tiene como valor máximo el número $-8\frac{1}{2}$. Se pueden formular las siguientes "preguntas-comprensión":

a. ¿Puede la función $\frac{-1}{2}x^2 + 3x - 13$ tener valores positivos?

b. ¿Qué valores puede tener y cuáles no? Justifica tu respuesta.

Si para responder a la pregunta *a* el alumno usa elementos distintos al dato (ya conocido) de que el valor máximo es $-8\frac{1}{2}$, se puede deducir que esos elementos distintos tienen para el alumno un poder de atracción mayor que la reducción recién estudiada. Con esto no se sabe aún si le falta comprensión del concepto "máximo". Si en cambio el alumno es incapaz de responder a las preguntas *a* o *b* está claro que carece de comprensión.

Es razonable suponer de alumnos que aspiran a cursar el V.M.H.O. que tengan comprensión del concepto "superficie". Para averiguarlo se puede hacer la siguiente pregunta-comprensión:

Se divide un cuadrilátero en cuatro partes iguales mediante sus diagonales (el conductor de la prueba muestra un dibujo). Con dos partes de esta división se puede formar un nuevo cuadrilátero (el conductor le pide al sujeto que lo dibuje). ¿Qué relación tienen las superficies del cuadrilátero original y del nuevo?

La falta de comprensión que se manifiesta al fallar en esta prueba es de suma importancia. Con ella se pueden explicar muchas dificultades que surgen con posterioridad en el estudio de la geometría. También es posible averiguar el origen de esta falta de comprensión, tema éste al que me referiré más adelante.

Hay preguntas que se contestan prácticamente siempre de tal manera que indican necesariamente una falta de comprensión. He aquí un ejemplo de una pregunta de ese tipo:

Hemos deducido que las medianas de un triángulo se dividen en la proporción de 2:1. ¿Cómo deducir a partir de este dato que las medianas de un triángulo se cortan en un mismo punto?

La respuesta apela a una comprensión de tipo matemático por lo que la ausencia de una respuesta razonable indicará asimismo una ausencia de comprensión matemática.

Esto se puede comprobar analizando el problema. El enunciado consta de seis partes:

m_a divide a m_b en la prop. 2:1, m_b divide a m_a en la prop. 2:1,

m_b divide a m_c en la prop. 2:1, m_c divide a m_b en la prop. 2:1,

m_c divide a m_a en la prop. 2:1, m_a divide a m_c en la prop. 2:1.

Desde el punto de vista matemático es esencial la siguiente pregunta: ¿Cuáles de estos seis datos son necesarios y suficientes para poder concluir que las medianas pasan por un mismo punto? Al seguir preguntándoles a los alumnos resulta que no habían caído en ello; su conclusión de que las tres medianas pasan por un mismo punto carecía de fundamento lógico. También volveré a la cuestión de si este fundamento es necesario.

Es más fácil encontrar preguntas de este tipo que otras que descubran la existencia (y no la ausencia) de comprensión. Sin embargo, los resultados son bastante deprimentes, tanto para el profesor como para el alumno, porque sólo revelan fallos. No existe la certeza de que haya comprensión.

La otra condición para que haya comprensión (que la actuación sea adecuada) también puede ser fuente de problemas. En primer lugar puede ocurrir que la respuesta que pretende obtener el conductor de la prueba no sea la adecuada. En dicho caso no se descubre la comprensión, que sí existiría para un observador "objetivo". Si dejamos de lado este caso, por ser quizá demasiado excepcional, existe otro caso, muy frecuente, en que tanto el profesor como el estudiante tienen una solución adecuada pero el profesor no considera como tal la del estudiante. A menudo en los exámenes el examinador da indicaciones para la solución que no se corresponden con el esquema que el alumno tiene en mente; los resultados suelen ser desoladores. Por otro lado el examinador puede tomar por buena la respuesta para después concluir que el alumno carece de comprensión al considerar inadecuado el método de solución empleado por el alumno. Un análisis minucioso demostraría sin embargo que una solución es tan satisfactoria como la otra. Sirva de ilustración este ejemplo de trigonometría:

Considérense dos ángulos *x* e *y:* $x + y = 70°$, $\frac{\text{sen } x}{\text{sen } y} = 3$.
Calcular *x* e *y.*

Algunos examinadores creen que el único método adecuado consiste en:

$$\frac{\text{sen } x + \text{sen } y}{\text{sen } x - \text{sen } y} = \frac{3+1}{3-1}$$

$$\frac{2 \text{ sen } \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}}{2 \cos \frac{x+y}{2} \text{ sen } \frac{x-y}{2}} = 2, \text{ etc.}$$

Sin embargo se llega igual de rápido así:

$$\text{sen } x = 3 \text{ sen } y$$

$$\text{sen } x = 3 \text{ sen } (70° - x)$$

$$\text{sen } x = 3 \text{ sen } 70° \cos x - 3 \cos 70° \text{ sen } x$$

$$\frac{\text{sen } x}{\cos x} = \frac{3 \text{ sen } 70°}{1 + 3 \cos 70°}, \text{ etc.}$$

La elección de este último método, que no es del gusto del examinador, le puede costar puntos al alumno. El entorno de los exámenes nos permite añadir un nuevo momento conceptual a la comprensión. Actuar de manera adecuada en una situación nueva no parece ser suficiente. Veamos primero la aproximación de Prins (pág. 30) al concepto "comprensión":

> "… En problemas relativamente difíciles hay una ordenación de datos, una comprobación de consecuencias, en una palabra, existe una pugna con el problema, lo que Thorndike ha llamado el “comportamiento de ensayo y error”".
>
> "Mediante las correcciones el alumno se va aproximando cada vez más a la solución. Al final resume, redondea, coordina lo esencial y es este último instante, es decir, la plasmación de las relaciones en una respuesta correcta, lo que conocemos como comprensión".

Muchos examinadores consideran con razón que la respuesta correcta *no es* en sí una garantía de comprensión. Opinan que sólo se puede hablar de comprensión si el alumno tenía *con anterioridad* por meta llegar a esa solución y no "que se la ha encontrado por casualidad", reconociéndola como tal cuando se ha topado con ella. Por mucho mérito que pueda tener una actuación de este tipo no garantiza de modo alguno la comprensión de la totalidad del problema. Para determinar si efectivamente el alumno tenía esa comprensión (o si durante la elaboración del problema ha llegado a ella) se le da otro problema con una presentación distinta pero con la misma estructura. La manera de afrontar el nuevo problema ahora sí será decisiva para determinar si hay o no hay comprensión.

Lo que echábamos en falta en la descripción de Prins y que aquí hemos reconocido como momento esencial es la *intención* del sujeto de elegir precisamente esa respuesta y no otra. Podemos concluir por tanto que *la comprensión se reconoce como tal cuando el sujeto actúa adecuada e intencionadamente ante una nueva situación.*

Pongamos un ejemplo ajeno a los exámenes:

Conocido el teorema de Pitágoras y el teorema que dice que la superficie de un triángulo es igual a la mitad de la base multiplicada por la altura. Se pide que, con ayuda de estos teoremas, se calcule la superficie de un triángulo si los tres lados son conocidos.

El método es el siguiente: "Primero dibujamos en un triángulo ABC la altura CD. Los segmentos BD y DA los llamamos respectivamente *p* y *q*. Los alumnos demuestran que $a^2 - b^2 = p^2 - q^2$. A continuación les hacemos demostrar que el teorema también es válido en el caso de que A sea un ángulo obtuso. Después les dejamos calcular en un triángulo, siendo a = 15, b = 13 y c = 14 cm, primero *p* y *q*, después h_c y por último la superficie.

Una vez hecho esto, los alumnos son capaces de determinar la superficie de cualquier triángulo acutángulo en que son conocidos los lados; están plenamente convencidos de sus conocimientos. Y sin embargo ocurre que les entra el pánico en cuanto se trata de triángulos obtusángulos. De acuerdo, aquí también $a^2 - b^2 = p^2 - q^2$, pero qué es p y qué es q ? Se han cumplido las condiciones que daba Prins, pero hay algo que no acaba de funcionar. Los alumnos no entienden la solución en su totalidad. Si la entendieran sabrían que escribiendo ambas relaciones que se deducen del teorema de Pitágoras en los triángulos rectángulos, se vería automáticamente a qué equivalen p y q.

Observamos pues cómo el concepto "intención" condiciona de manera importante el método para descubrir la comprensión. Así como "adecuado" y "nueva situación" remiten al modo de comportamiento del sujeto, siendo por tanto propios de la terminología behaviourista, el "lenguaje-él" como lo define Mannoury (II, pág.18), la "intención" en cambio tiene su origen en el "lenguaje-yo". La aparición de este lenguaje mixto no debe sorprendernos ya que estamos intentando explicar el comportamiento de un semejante mediante experiencias propias. ¿Por qué no nos satisface la repuesta correcta del alumno? ¿No será porque sabemos que nosotros mismos a menudo no lo "vemos" claro a pesar de habernos esforzado en dar la solución correcta?

Si no se desea una mezcla de lenguaje de este tipo, por ejemplo por preferir parámetros "objetivos", tendremos que transformar las "palabras-yo" en "palabras-él". Se puede hacer pero no lo haremos, pues resulta muy complejo describir las acciones afectivas y volitivas de otras personas en base al modelo de comportamiento, mientras que la claridad de la imagen que uno intenta describir no por ello daría mejores resultados.

Además en este caso ya hemos determinado la "ecuación transformativa" que cambia el "lenguaje-yo" en "lenguaje-él". La encontramos de manera implícita en el procedimiento que indiqué para detectar la intención del alumno. Tendremos que dudar de la capacidad de entendimiento global de la solución si observamos que al sujeto de la prueba le cuesta unir los componentes o si tenemos que ayudarle. Nos podemos cerciorar acerca de su intención dándole un problema con la misma estructura pero con una formulación alterada. La manera en que afronte el problema nos sacará de dudas.

Sin embargo no son sólo las motivaciones de tipo práctico las que me impiden adoptar este procedimiento como regla de detección de la comprensión. Podría ser que el procedimiento para detectar la intención no fuera válido en todas las situaciones. El concepto "comprensión" podría adquirir entonces un contenido distinto del que pretendemos.

Hasta ahora me he cuidado mucho de hablar de una definición de la comprensión. El procedimiento de detección anterior no puede llamarse definición ya que la formulación no es lo suficientemente minuciosa. Tampoco me pondré a elaborar tal definición puesto que la práctica enseña que es difícil dar definiciones que excluyan todas las posibilidades indeseadas. Una definición debe ser exacta. De ahí que nos veamos en la necesidad de operar también con casos impropios lo cual da pie a todo tipo de malentendidos.

Si volvemos a comparar nuestras características con la imagen del capítulo I que hablaba de "una estructura formada, en base a la cual se actúa", esto último empieza a resultar mucho más atractivo. Actuar en base a una estructura implica en todo caso una intención; que algo se haya "formado" sólo se puede comprobar a la luz de una "nueva situación". Sólo el concepto "adecuado" es el que no aparece en este típico "lenguaje-yo". Esto es muy comprensible ya que significa que el ser humano se tiene que conformar a la cultura existente, lo que resulta difícil de expresar en el "lenguaje-yo". La representación que nos hacemos al hablar de estructura tiene mucho en común con el concepto comprensión tal y como lo hemos llegado a conocer. En consecuencia haré mucho uso de esta imagen a partir de ahora. No perdamos de vista que de momento no se trata más que de una imagen y no de una explicación y menos aún de un mecanismo de la comprensión. La imagen nos puede ayudar a formular ciertas características, puede ayudar a nuestra memoria pero no puede en modo alguno ser utilizada para buscar nuevas relaciones.

Hay dos motivos por los que la palabra estructura resulta tan perfectamente apropiada. En primer lugar un campo que contemplamos en todo tipo de lugares puede tener una estructura propia al igual que una persona puede tener determinadas comprensiones en todo tipo de terrenos. El campo puede también tener además varias estructuras totales al igual que uno puede tener distintas comprensiones en la totalidad de un terreno determinado. En segundo lugar está el fenómeno, referido por muchos matemáticos (Bunt I, Bos I), de que una estructura contemplada se corresponde con una estructura mental de pensamiento, que cada estructura producto de la contemplación presupone una determinada comprensión. Esta característica no es reversible: Hay muchos tipos de comprensión que no se pueden interpretar como estructuras en un campo contemplado. Si se quiere interpretar estas comprensiones desde el punto de vista contemplativo habrá que visualizarlas. En algunos casos resulta posible hacerlo. Volveré sobre ello.

Hemos visto que la propia índole de la comprensión ofrece varias posibilidades detectoras que se pueden resolver sobre todo si existe la suficiente confianza entre alumno y profesor. Las dificultades que se dan en los exámenes son de muy diferentes tipos y son consustanciales al propio carácter de los exámenes. En este tipo de pruebas es evidente que los alumnos son incapaces de activar la comprensión correcta en un período de tiempo determinado ni de averiguar qué comprensión deben utilizar en un caso determinado. Al día siguiente dicen: "Ayer por la noche hallé la solución en media hora". Similarmente algunos profesores opinan que los exámenes no son una ocasión adecuada para detectar la comprensión del alumno. Para el alumno, estudiar para un examen consiste en muchos casos en comprobar meticulosamente qué tipos de detección de comprensión brinda la materia, para evitar nuevas situaciones en las que se verá obligado a manifestar comprensión. En el mejor de los casos el alumno ha encontrado las soluciones por sí mismo de antemano: nos encontramos en el examen con una reproducción de resultados de una comprensión anterior. En el peor de los casos nos encontramos con la reproducción del trabajo de otros.

Es pues un hecho irrefutable que la planteamiento actual de la enseñanza dificulta o incluso impide al profesor emitir un juicio de valor precisamente en el momento en que hay que determinar la comprensión del alumno. El problema se podría obviar sencillamente ignorando la existencia de esta comprensión, que por lo demás resulta tan difícil de detectar o medir por no hablar de evaluar. Podríamos limitarnos a unos elementos más fácilmente manejables como el número de problemas resueltos o la cantidad de respuestas correctas. De este modo se obtienen datos que se prestan fácilmente a las estadísticas. Sin embargo ello nos alejaría de aquello que precisamente persigue la práctica totalidad de los docentes: la comprensión de la "esencia de la materia". Hay pocas razones para suponer que el número de problemas resueltos o de preguntas correctas indiquen de manera satisfactoria si el alumno tiene comprensión. Prácticamente todo profesor está convencido o ha experimentado alguna vez que no se puede esperar de los alumnos que sepan resolver problemas nuevos en un breve periodo aun en el caso de que los problemas se basen en la comprensión adquirida durante el aprendizaje. Por eso los problemas se reducen casi siempre a la aplicación de reglas conocidas en casos reconocibles. Además, suele ocurrir que estas reglas forman parte de una lista no demasiado larga que los alumnos acaban de estudiar. De este modo los problemas carecen del aspecto de novedad; resolverlos no requiere más que un bajísimo nivel de comprensión (ver también Stellwag II, pág. 76 y ss. y pág. 108 y ss.).

La auténtica comprensión que se persigue supone como un punto de anclaje en alguna idea ulterior; la prognosis depende en gran parte de ello. La adquisición de comprensión es, con razón, uno de los objetivos de la enseñanza de las matemáticas. Tendremos que crear las condiciones bajo las cuales la comprensión se pueda detectar. De ahí que tendremos que perseguir una relación profesor-alumno en que el primero no actúe como juez sino como persona en quien el alumno pueda confiar, una tarea que considerando la historia de la enseñanza no resulta sencilla. En este tipo de relación, la pregunta-comprensión adquiere un carácter muy distinto. En cuanto se establece esta confianza entre el conductor y el sujeto las preguntas-comprensión ofrecen la información deseada tanto por el conductor como por el sujeto. La pregunta-comprensión debe ser de tal manera que resulte nueva para el sujeto. Sólo así el sujeto podrá cerciorarse de su comprensión cuando el conductor califique su respuesta de correcta.

El concepto de confianza da pie nuevamente a profundizar en los términos del "lenguaje-yo" y el "lenguaje-él". La relación de confianza existente entre el profesor y el estudiante supone que el estudiante aparece como un estudiante *de confianza.* Lo cual quiere decir que el "lenguaje-yo" en que expresa sus vivencias se corresponde con el comportamiento que observamos en él[4]. Este tipo de estudiante ofrece por lo tanto el material que permite transformar un lenguaje en otro. Cumple la misma función en psicología que la que cumplen las Cefeidas en astronomía al posibilitar la determinación de distancias de las masas estelares, o que los fósiles-guía en geología para la determinación de la edad de las capas terrestres. Pero, de la misma manera, los educadores deben representar para el niño que está creciendo el papel de conductores de confianza. En caso contrario le costará al niño llegar a comprender la vida interior de los demás.

4 El alumno precisa, para llegar al reconocimiento de la comprensión adquirida, de un profesor que se presente como "profesor en quien pueda confiar". Y en este caso no es tan importante "poder observar el discurrir racional del otro". Se trata sobre todo de que el alumno pueda confiar en el profesor emocial y moralmente, en una palabra, humanamente. Así, un profesor que se dedica a herir el amor propio del alumno con burlas o sarcasmos no podrá ser "un profesor de confianza" por muy bien que sepa enseñar, "pensando en alto" cómo hallar las soluciones de los problemas.

CAPÍTULO III

LUGAR DE LA COMPRENSIÓN EN ALGUNAS PSICOLOGÍAS DEL APRENDIZAJE Y DEL PENSAMIENTO

Es imposible estudiar la comprensión sin ver el lugar que ocupa en algunas de las principales psicologías del aprendizaje y del pensamiento. Al fin y al cabo tendremos que saber qué es lo que nos tienen que decir acerca de la diferencia que existe entre aprender "sin más" y aprender-con-adquisición-de-comprensión. La terminología usada podrá, de paso, sernos de gran utilidad para describir los fenómenos.

Las metas que indicamos determinan al mismo tiempo los límites del presente estudio: No es preciso ofrecer un resumen de las distintas psicologías del aprendizaje y del pensamiento; sólo nos interesan en la medida en que se ocupen del aprendizaje-con-adquisición-de-comprensión. Existe un segundo motivo para no hacer ese resumen y es que Prins ya ofreció en su disertación un espléndido panorama de algunas importantes psicologías del aprendizaje y del pensamiento.

Inmediatamente nos topamos con la primera dificultad: ¿Qué es aprender? Hay diferentes concepciones según las distintas psicologías del aprendizaje. A diferencia de Hilgard (pág. 7) creo que las distintas definiciones de "aprender" están en gran parte en el origen de la controversia entre las distintas teorías. En efecto, puede que en la mayoría de los casos esté perfectamente claro qué procesos o actividades queremos aprender; sin embargo la elección que se hace determina en muchos casos el desarrollo posterior de la teoría. McGeoch (pág. 4) tampoco manifiesta el optimismo de Hilgard en esta cuestión.

En el mismísimo punto de partida de la mayoría de las psicologías del aprendizaje podemos ver si hablarán o no del aprendizaje-con-adquisición-de-comprensión. Así es poco probable que lo encontremos en los conductistas: al basarse exclusivamente en la conducta, lo único perceptible es la comprensión repentina, el "¡Ajá, ya lo veo!" (ver Langefeld I, pág. 404). De esta manera se pierde gran parte de la importancia que tiene el concepto de comprensión.

La teoría del estímulo-respuesta de Guthrie y el conexionismo de Throndike dejan, debido a su visión mecanicista, poco lugar para la comprensión. Prins (pág. 32) observa lo siguiente:

> "En efecto, cuando se parte de que la inteligencia no es más que una simple función añadida, siendo por lo tanto la inteligencia mayor cuánto mayor es el número de conexiones establecidas, y que las formas más complejas del comportamiento se suelen construir por añadidura de elementos simples, cuando se intenta reducir a un proceso cuantitativo otro que es cualitativo (ya que tiene una dimensión intencional), cuando ocurre todo esto, lo que se hace es atrofiar el proceso de aprendizaje hasta convertirlo en un proceso aditivo que excluye el componente de la creatividad".

La psicología del pensamiento de Selz ofrece un planteamiento que fomenta el aprendizaje-con-comprensión. A diferencia de sus partidarios, sigo creyendo que no es lo mismo que un aprendizaje-con-adquisición-de-comprensión. Cuando en vez de asociaciones Selz habla de esquemas de anticipación en los que aparecen juntos mandato, objetivo y solución, aporta sin duda alguna una contribución positiva para entender el desarrollo de los procesos mentales. Sin embargo, el supuesto de que los procesos mentales se puedan reducir a una cadena compuesta exclusivamente por esquemas de anticipación contradice las experiencias surgidas con el aprendizaje-con-adquisición-de-comprensión. Para sustentar su teoría, Selz dice que parte del pensamiento se desarrolla en el inconsciente siguiendo anticipaciones esquemáticas. Esta suposición es una falta de respeto hacia los sujetos de sus pruebas (ver Van Parreren II, pág. 407). Su teoría carece en definitiva de base experimental.

Habría que añadir además que si la teoría de Selz fuera válida en toda su amplitud, significaría que en el caso de una acción-comprensión cada acción parcial conducente a dicha acción debería de efectuarse con anticipación. La experiencia demuestra que una acción-comprensión de este tipo sólo es posible después de efectuar muchas acciones parciales de forma "automática". A este respecto Van Parreren (II, pág. 438) hace un análisis exhaustivo sobre montar en bicicleta. Esta idea de una cadena de esquemas de anticipación hace que la teoría de Selz tenga, en cuanto a sus implicaciones, muchas puntos en común con la teoría de la asociación. En vez de crear muchas asociaciones se trata de aprender a controlar los medios para emprender algo. En sí es un gran paso adelante aunque en realidad equivale más a un aprendizaje-con-comprensión que a un aprendizaje-con-adquisición-de-comprensión. Es lo que demostraré en el siguiente capítulo.

En el presente capítulo me voy a ocupar de modo especial de la psicología de la Gestalt ya que se refiere de modo particular al aprendizaje-con-adquisición-de-comprensión. De entrada, la teoría de la apercepción de la psicología de la Gestalt ya resulta muy atractiva al tener en cuenta la estructuración en la percepción. Anteriormente he indicado que las estructuras de un campo perceptivo tienen muchos puntos en común con la comprensión que se tiene de dicho campo. Las cuatro leyes de la teoría de la apercepción son (Hilgard, pág. 182 y ss.):

1. *Ley de la analogía:* Figuras y transformaciones análogas se suelen percibir como una unidad.

2. *Ley de la proximidad:* Las partes que se encuentran próximas se perciben fácilmente como unidades.

3. *Ley de la oclusión:* Las figuras cerradas se perciben más fácilmente que las figuras abiertas. La percepción tiende a cerrar las figuras que se encuentran abiertas.

4. *Ley de la correcta continuación:* En la percepción se tiende a completar una figura sin alterar su estructura.

Si estas leyes de la apercepción son ciertas -hay pocas dudas de que no lo sean- dispondremos de repente de leyes que deben regir las correspondientes comprensiones en este campo perceptivo. No resulta descabellado admitir que las leyes que rigen la comprensión son primarias y que las leyes de apercepción están derivadas de aquéllas. En esto consiste precisamente la esencia de la psicología de la Gestalt: las leyes de la apercepción se toman como leyes válidas para el pensar-con-comprensión. No hay que olvidar que en tal caso la mayoría de las figuras y estructuras deben de interpretarse en sentido figurado. La hipótesis no estipula que el pensar-con-comprensión únicamente se tenga que poder contemplar.

A raíz de esta teoría los psicólogos de la Gestalt establecieron una serie de leyes para la comprensión. Algunas de ellas se ajustan perfectamente a la regla que indiqué para el reconocimiento de la comprensión. Voy a reproducir brevemente una prueba que Hilgard comenta al detalle (pág. 193 y ss.) y que se efectuó bajo la dirección de Yerkes. Un chimpancé debe sacar un plátano de una caja alargada y abierta por ambos extremos, que está firmemente sujeta al suelo de la jaula. El plátano se introduce en la caja por medio de una trampilla que hay en el centro. El chimpancé lo ha visto e intenta por todos los medios, con manos y pies, sacar el plátano pero no lo consigue. El animal fija su atención en otra cosa y se pone a jugar con un palo. En cierto momento este palo cae cerca de la abertura de la caja. El chimpancé para de jugar y utiliza por primera vez en su vida el palo como instrumento para empujar el plátano hacia el extremo de la caja.

Hilgard observa que esto no es suficiente para afirmar que el chimpancé haya actuado con comprensión. Queda por cumplirse una ley que los psicólogos de la Gestalt han establecido para la comprensión. Dice lo siguiente: "Las soluciones basadas en la comprensión se pueden repetir fácilmente". Así pues, el experimento del chimpancé se vuelve a plantear al día siguiente de la misma manera. Esta vez el chimpancé, después de haberse asegurado de que la trampilla no se puede abrir, se va directamente a por el palo, lo trae hasta la caja de manera totalmente distinta al día anterior y lo usa inmediatamente para sacar el plátano.

Hilgard concluye que ahora existe motivo suficiente para suponer que el día anterior el chimpancé había actuado basándose en la comprensión. Por mi parte quisiera observar que la conclusión de Hilgard sigue siendo discutible. Tal como apunté en el capítulo II, el vínculo entre intención y actuar-con-comprensión, es decir, comportarse como si hubiera comprensión, se basa en que los sujetos de la prueba deben ser fiables. Puesto que esta característica es esencialmente humana nos quedamos como mínimo con la duda de si también es aplicable para explicar el comportamiento de un chimpancé.

Lo importante, sin embargo, es que dicha ley se considera necesaria para el reconocimiento de la comprensión. Hay otra ley de la psicología de la Gestalt que se ajusta igual de bien a mis reglas de reconocimiento basadas en la práctica. Dice lo siguiente: "La comprensión, una vez que ha aparecido, puede aplicarse en nuevas situaciones".

La psicología de la Gestalt es de gran valor para aquél que pretende estudiar la comprensión ya que la trata correctamente. El modo de reconocer la comprensión se corresponde muy bien con la experiencia que tenemos de la escuela. El aprendizaje-con-adquisición-de-comprensión está presentado como una organización sensata del campo mental y perceptivo, como una generación de nuevas estructuras mentales y perceptivas. Todo esto es muy positivo y útil. Sin embargo nos pasaríamos de nuestra meta si pretendiéramos interpretar así todos los tipos de aprendizaje. Es la idea que encontramos entre otros en Mursell (I, pág. 38 y ss.). Nos parece estupendo que conceda tanta importancia al aprendizaje-con-adquisición-de-comprensión y que llegue a considerar que las otras formas de aprendizaje son indignas de llevar este nombre. Sin embargo, existe el peligro de que surjan una serie de malentendidos. Y es que en la práctica de la enseñanza existen otros tipos de aprendizaje, que por supuesto deben distinguirse del aprendizaje-con-adquisición-de-comprensión. Considérese el siguiente ejemplo:

Mi hija (de 7,7 años de edad) está practicando la "tabla del 7". Escribe:

1 x 7 = 7

2 x 7 = 14

3 x 7 = 21, etc.

Termina sin haber hecho ningún error y dice: "Ahora tengo que estudiármela". Un espectador se sorprende: "Pero ¿no te la has estudiado ya?" "Sí, pero aún me la tengo que *estudiar"*. Este segundo aprendizaje también tiene sentido puesto que vemos que al recitar la tabla se equivoca: 6 x 7 = 42, 8 x 7 = 49, 9 x 7 = 56, etc. La organización sensata del campo está claramente finalizada una vez transcrita la tabla de 7, pero con ello no está concluido el proceso de aprendizaje. Ni siquiera estará concluido cuando recite la tabla del 7 sin fallar. Los niños se la tienen que saber "de arriba a abajo". La meta final es la formación de valencias, es decir, de correspondencias unívocas por las que, por ej., 6 x 7 se convierte sin reflexión consciente en 42. Si este tipo de aprendizaje no se produjera -lo cual afortunadamente es imposible ya que ocurre en gran parte al margen de nuestra intención- quedaría prácticamente excluida una comprensión superior: la cadena de procesos racionales estaría tan atiborrada que resultaría prácticamente imposible construir con tales unidades una organización sensata del campo.

Podemos quedarnos con todo lo bueno de la psicología de la Gestalt sin ponernos en la postura extrema de que todo aprendizaje tiene que ser forzosamente aprendizaje-con-adquisición-de-comprensión. Así que tenemos que concentrarnos en la autonomía del proceso de aprendizaje como hace Van Parreren, que en su tesis ha llegado mediante este concepto a una síntesis impresionante.

Van Parreren llama autónomo a un proceso cuando no presenta una relación de dependencia directa con una intención actual. Los fenómenos en los que mejor se puede reconocer la autonomía son las acciones en que la intención se ve perturbada por un proceso contrarrestante. Este proceso, que manifiestamente tiene cierta autonomía con respecto a la intención, se llama interferencia. Si la interferencia resulta tan apropiada para demostrar que existe autonomía, es precisamente porque la autonomía en este caso conduce a estructuras de acción inadecuadas. Por eso resulta poco plausible reducir el proceso autónomo perturbador a un proceso intencional inconsciente. Sin embargo Van Parreren admite que la autonomía actúa sin duda alguna *también* en acciones *no* perturbadas. Este es uno de sus ejemplos:

> "Cuando bebemos un vaso de agua puede ser consecuencia de una intención, pero los movimientos de mano, boca y demás órganos no dependen directamente de la intención ni de procesos intelectuales inducidos por la intención. En estos casos consideramos que *la intención se limita a dirigir de manera general el desarrollo de una acción, con lo cual queda espacio de maniobra suficiente que se llena con procesos de desarrollo autónomo"*.

En este caso, en que la autonomía fomenta el buen desarrollo de una acción, se podría suponer que la intención produce *de forma inconsciente* unos movimientos aparentemente autónomos. Esta tesis es la que defiende Ach. Sin embargo al no ofrecernos leyes que expliquen la actividad de la intención, su hipótesis se escapa a cualquier control empírico. Frente a ello Van Parreren aduce que si aceptamos que la autonomía existe, ciertamente nos encontramos con una situación que responde a ciertas leyes que se ven en la práctica. Dice que en la experiencia diaria cometemos cantidad de errores que consideramos evidentes. Tales errores evidentes ocurren con mayor frecuencia que otros, que consideramos más difíciles o más inexplicables. Esto significa que en el proceso de aprendizaje se van desarrollando errores o tendencias a hacerlos que responden a una regularidad que sólo se debe explicar a partir de la índole misma del proceso de aprendizaje.

Van Parreren relata una prueba en la que se le encarga al sujeto que tache determinadas letras de entre unas series de sílabas y letras sueltas. A continuación presenta sus conclusiones. Las pruebas muestran la existencia de tendencias autónomas que tienen sus propias leyes. En la mayoría de los casos en que se generan estructuras de acción inadecuadas éstas no conducen a la producción de errores: los sujetos tienen que resistirse a ciertas tendencias. Así pues, se le otorga a la intención la función de reprimir la generación de estructuras inadecuadas y de reconducir el proceso de aprendizaje por el camino correcto.

Si al hablar de material no sólo consideramos el material de la prueba sino también el material de acción, es decir, el conjunto de las actividades que, siguiendo las instrucciones, tienen que efectuarse sobre el material de la prueba, podemos decir que en primer lugar el aprendizaje viene determinado por la índole del material. En segundo lugar está la influencia de las intenciones del sujeto que sólo modifican y corrigen. Este tipo de relación ya la apuntó Köhler en la psicología de la apercepción. También ahí la organización real del campo perceptivo queda determinada por el material y no por las intenciones del observador. Por tanto tendremos que considerar el "material" en un sentido igual de amplio como el aprendizaje. Esta correspondencia entre percibir y aprender es muy natural si aceptamos la mencionada hipótesis de la psicología de la Gestalt. Las conclusiones posteriores que saca Van Parreren son cuanto menos igual de importantes. De momento me abstendré de comentarlas, puesto que las pruebas que describe más adelante ofrecen argumentos mucho más contundentes.

La descripción del proceso de aprendizaje al que Van Parreren somete a sus sujetos resulta sumamente interesante por dos motivos. Por un lado es tan sencillo que permite un control muy minucioso del progreso. Por otro lado se trata de un proceso muy inteligente que implica mucho más que el simple "inculcar". Es por ello que este proceso de aprendizaje ofrece indicaciones importantísimas acerca de la formación de la comprensión.

El proceso se lleva a cabo utilizando un cuadro que se compone de un número cuadrado de cubitos que se colocan a distancias regulares formando un cuadrado. (es decir, 2 x 2, 3 x 3, 4 x 4, ó 5 x 5). Los cubitos llevan en una de las caras una o dos letras y se presentan ante el sujeto de manera que las letras quedan en la parte inferior. A continuación se le da al sujeto una serie de palabras sin sentido compuestas por las letras sueltas y las sílabas que hay en el cuadro. Al sujeto se le pide que gire sucesivamente los cubitos que contengan las letras con que está formada la palabra ofrecida. Lo tiene que hacer de manera que las letras aparezcan en el orden en que están en la palabra. Al principio el sujeto ignora qué letras hay en el cuadro así que no puede hacer más que ponerse a buscar las letras que componen la palabra. Cada letra que se gira sin acertar debe ser vuelta hacia abajo antes de examinar el siguiente cubito. Esto vale tanto para las letras que no aparecen en la palabra como para las que sí aparecen pero aún no han salido. Así pues, el aprendizaje que se produce se manifiesta en que el sujeto gira cada vez menos las letras *innecesarias*, pasando a girar con *anticipación* y luego girando con *mayor rapidez* las letras correctas.

A continuación vienen una serie de conclusiones importantes:

El primer grupo de conclusiones se refiere a la intencionalidad y la autonomía del proceso de aprendizaje.

1. La intención se realiza por estructuración activa del cuadro. Se van generando complejos sinópticos (por ejemplo, al "ver" una palabra en una serie de letras yuxtapuestas). La intencionalidad se deduce de que: *a*) la actividad del sujeto da lugar a la formación de un complejo, *b*) el aprendizaje consiste en la adquisición de conocimientos de modo sistemático, *c*) el método de aprender no está determinado por factores materiales, *d*) la acción se basa en características abstractas del material de la prueba y no en la situación perceptiva ofrecida de manera contemplable.

2. La autonomía se deduce de que: *a*) el sujeto llega a giros correctos sin que se le haya encaminado hacia las localizaciones concretas, *b*) el sujeto no se ha guiado por el conocimiento de los lugares sino p. ej. "dejando obrar la mano", *c*) según los datos introspectivos reacciona a los lugares tal como vienen visualmente en el cuadro y en modo alguno en una localización basada en determinado sistema abstracto.

Van Parreren introduce el concepto de *valencia:* El objeto de la percepción (la letra leida) ha adquirido una valencia orientada a la acción que hay que realizar (girar determinado cubito). Esta valencia es un concepto funcional: incluso cuando el sujeto ya no es consciente de dicha valencia, su presencia se deduce del hecho de que el sujeto va directamente a por el cubito correspondiente. El aprendizaje autónomo se ha manifestado por lo tanto en la formación de valencias.

3. La forma más frecuente de aprendizaje es una que ocupa una posición intermedia entre determinación autónoma e intencional: el aprendizaje receptivo. Se forman complejos en base a la estructura del material de la acción y no por estructuración activa. (Por ej., aprender simultáneamente, girar inmediatamente después, pronunciabilidad de una combinación de letras). La formación de complejos se produce de manera autónoma aunque consciente y aporta apoyo reproductivo a la acción.

El segundo grupo de conclusiones se refiere a funciones y condiciones para la generación de procesos conscientes en el aprendizaje.

1. Una primera forma de generación del conocimiento es a través de la explicitación de las tendencias que funcionan autónomamente.

2. Una segunda forma de generar el conocimiento está (más) desligada de las tendencias autónomas. En este caso es idéntica a la actividad racional y tiene p. ej. la función de estructurar activamente, de manera general, el control intelectual.

El tercer grupo de conclusiones se refiere al desarrollo del proceso de aprendizaje.

1. Si se han formado complejos, la acción se desarrolla a través de la reproducción del complejo.

2. Además de formarse valencias de complejos, la formación de valencias de las letras sueltas se desarrolla a partir del complejo.

3. La formación de valencias de complejos entorpece la formación de valencias de letras sueltas.

4. Si no se encuentran todos las letras mediante los complejos, pueden aparecer obstáculos tales que el sujeto empiece a evitar la generación de nuevas formaciones de complejos.

5. Las valencias de complejos y valencias sueltas también pueden crearse con estructuración activa.

6. Si en el conjunto no se han formado complejos, vemos cómo, después de la formación inicial de valencias, aparece la explicitación de estas valencias aisladas. Al principio el conocimiento consciente controla las acciones de valencia. Sin embargo este control consciente se va haciendo más pequeño y por fin desaparece del todo.

El cuarto grupo de conclusiones se refiere a la actitud del sujeto frente a su tarea.

1. Que el sujeto llegue a un planteamiento más activo o más receptivo dependerá de la estructura de su personalidad.

2. No se trata aquí de "características" fijas del sujeto sino de una actitud (habitual).

3. El ansia de lucirse por parte del sujeto puede orientar su actitud hacia una estructuración activa.

4. Para cada sujeto específico existe un actitud específica que le resulta más eficiente. Si se repiten las pruebas del cuadro de letras es posible que las prestaciones mejoren llegando el sujeto de este modo a una actitud más adecuada.

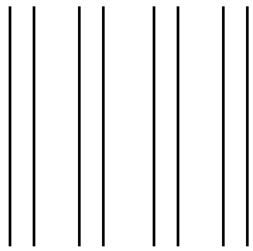
Estas conclusiones nos pueden ser de gran ayuda en nuestra búsqueda de una educación orientada a la adquisición de comprensión. Evidentemente son válidas para un proceso de aprendizaje muy especial. Ocurre lo mismo con el proceso al que los psicólogos asociativos someten a sus sujetos. Y de hecho se podría decir lo mismo de los procesos de aprendizaje que llevaron a cabo los psicólogos de la escuela de Selz. Eran procesos asimismo muy especiales. Sin embargo, el proceso de aprendizaje que siguen los sujetos de Van Parreren presenta unos aspectos que no encontramos con tanta claridad en ningún otro sitio y que es de suponer que aparecen en procesos normales, y por tanto complejos.

Las pruebas de Van Parreren demuestran en primer lugar que existe un aprendizaje autónomo, es decir, un aprendizaje que origina una serie de valencias. La prueba de que este tipo de aprendizaje existe se deduce de la generación de estructuras de acción inadecuadas que son la consecuencia de ese aprendizaje. Pero Van Parreren afirma también que no se puede considerar este aprendizaje autónomo como *enfrentado* a un aprendizaje-comprensión. Y es que incluso cuando como consecuencia del aprendizaje se llega a una organización sensata del campo perceptivo o mental, también suelen aparecen tendencias autónomas. La contradicción de que la organización puede ser a la vez autónoma y sensata queda solucionada según Van Parreren si estimamos que la psique está estratificada. De este modo el aprendizaje es, a juicio de Van Parreren, un proceso que se desarrolla en distintas estratos. Los procesos que se ejecutan en el estrato básico están determinados por la estructura del material de acción: son autónomos. El aprendizaje se puede influir desde los estratos superiores racionales por las intenciones. De la misma manera en el aprendizaje-comprensión hay un proceso que se desarrolla en el estrato autónomo; la influencia de lo racional consiste en que las acciones se ven modificadas, con lo cual se modifica la estructura del material de acción y con ello el resultado del proceso de aprendizaje.

Esta visión -de hecho la teoría de la estratificación de la psique es más *imagen* que *teoría*- soluciona muchos problemas. La parte no racional del proceso de aprendizaje recobra así un lugar importante. Su papel se hará más importante a medida que se simplifique la materia de estudio o se prolongue el aprendizaje. "La naturaleza estúpida, mecánica y repetitiva de la mayoría del aprendizaje humano así como del animal", algo en que, según Hilgard (pág. 71), insisten tanto las psicologías del pensamiento afines a la teoría de la asociación, resulta ser una parte todavía muy importante del proceso de aprendizaje.

Las leyes para el pensamiento racional, tales como las establece Selz, reciben también el lugar que les corresponde. Sin embargo no pueden explicar todo el pensamiento: existen además las valencias desarrolladas a raíz del material. La idea de los psicólogos de la Gestalt según la cual el aprendizaje es una organización sensata del campo sólo es correcta si con ese aprendizaje entendemos el aprendizaje autónomo y los procesos inducidos por la intención que ocurren en los estratos superiores.

Van Parreren muestra en un artículo posterior (IV) el modo de representar esta síntesis. La figura representada se ve en un primer momento como cuatro parejas de líneas. Si ponemos atención, es decir cuando empieza a funcionar la intención, podemos ver también lo siguiente: a la izquierda y la derecha una línea y, entre esas dos, tres pares de líneas. El que en esta última reestructuración siga habiendo autonomía se deduce del hecho de que del dibujo no se puede leer cada figura en teoría incluida en él.



CAPÍTULO IV

INFLUENCIA DE LAS PSICOLOGÍAS DEL APRENDIZAJE EN LA DIDÁCTICA DE LA GEOMETRÍA

Resulta revelador observar cómo todo tipo de psicologías del aprendizaje han encontrado partidarios entre los matemáticos, que han ido basando su propia didáctica en ellas. Esta afirmación también se puede invertir diciendo que prácticamente todo enfoque didáctico de las matemáticas está relacionado con alguna psicología del aprendizaje. Esto tranquiliza: el abanico de las didácticas en matemáticas no podrá considerarse pues como un andar a ciegas de muchas individuos empeñados en demostrar por sí solos algo nuevo sino más bien como un trabajo planificado que se basa en concepciones distintas.

No es de extrañar que la teoría de la asociación fuera a ser tan del agrado de los matemáticos. Las conexiones entre los elementos de esa teoría tienen muchos puntos en común con las relaciones entre premisas y conclusiones de los silogismos en una secuencia lógica. Así pues, los matemáticos de pro deben de encontrarse muy a gusto ante esta teoría. Si queremos adaptar la didáctica de la geometría a la teoría de la asociación no hay más que inculcar y hacer comprender la cohesión que hay entre los distintos teoremas. Podemos afirmar con toda tranquilidad que muchos siglos antes de que se formulara la teoría de la asociación ya se impartían las matemáticas de esta manera. Parece más bien que han sido las matemáticas las que han inspirado la teoría de la asociación y no tanto que la teoría de la asociación haya dado origen a una nueva didáctica de la geometría.

La teoría de Selz resulta muy tentadora, sobre todo para los que consideran que una parte importante de la didáctica de la geometría consiste en enseñar a resolver problemas. Su sistema de complementaciones de complejos como principio básico del pensamiento es el modo más racional de solucionar problemas en geometría. Ya en Platón encontramos en el relato de Sócrates y el esclavo de Menón un ejemplo del método didáctico heurístico. Así pues, podemos decir que la didáctica relacionada con la teoría de Selz es bastante más antigua que la misma teoría. Ya en forma moderna encontramos soberbios ejemplos de este método, entre otros, en Wagenschein (I). Ha habido dos intentos de puesta en práctica más directa de la teoría de Selz. Se usaron dos maneras radicalmente distintas, que son de tanta transcendencia que me ocuparé en profundidad de ellas.

El primer método consiste en la conversación didáctica. Se entiende por esto una conversación en el aula durante la cual los alumnos comentan sus estrategias de resolución del problema con la intención especial de mejorar los métodos de aprendizaje. Prins (I) describe conversaciones de este tipo aplicadas a la geografía; Mooy, Van Tonder y Boermeester realizaron investigaciones para las matemáticas. Me ocuparé en particular del trabajo de este último, puesto que ha sido el que ha hecho una presentación más razonada de sus pruebas (ver también Van Hiele-Geldof, pág. 3) y, sobre todo, porque proporciona documentación que se puede usar. Reproduzco parte del trabajo de Boermeester.

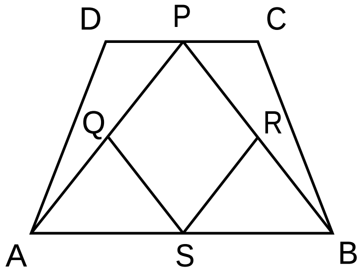
Se plantea el siguiente problema:

ABCD es un trapecio isósceles (AB//CD). P está en el centro de CD y S es el centro de AB. Q y R son los centros de AP y BP. Demuéstrese que QS = RS. Los alumnos han hecho el problema. Los problemas han sido corregidos y devueltos a los alumnos. A continuación se desarrolla la siguiente conversación didáctica.

La alumna T.O., que ha sacado un cero, dibuja la figura en la pizarra.

Prof. ¿Así está bien?

R.H. Faltan los datos en la figura.



Prof. ¿Están ahora?

T.T. No, C es igual a D.

R.H. Eso no es un dato, es una consecuencia.

Prof. ¿Están ahora todos los datos en la figura?

I.B. No está que sea isósceles, AD = BC.

Prof. ¿De dónde partiste?

T.O. Quería ver si ΔAPD era congruente con ΔBPC.

Prof. ¿Fue realmente lo primero en que pensaste?

T.O. No, primero consideré los triángulos ASQ y BSR.

Prof. ¿Cómo se te ocurrió eso?

T.O. Porque RS debe ser igual a QS.

Prof. ¿Entonces, de dónde hay que partir?

R.B. De aquello que debes demostrar.

Prof. Y ¿qué camino sigue la mayoría de los alumnos?

B.H. Van al tún-tún.

Prof. Sí, eso lo llamo yo ir de viaje de descubrimiento. ¿Cuál crees tú que es la mejor estrategia?

L.V. Partir de lo que hay que demostrar.

Prof. Correcto. (Se vuelve a dirigir a T.O. en la pizarra). Entonces, ¿Qué es lo que vas a demostrar en primer lugar?

T.O. Que ΔASQ ΔSBR

Prof. Pruébalo. (La alumna sigue teniendo dificultad con la cuestión de si AQ es igual a BR).

Prof. ¿Cómo lo podremos averiguar?

H.E. Buscando dos triángulos distintos en que aparezcan dichos segmentos.

Prof. ¿Cuáles pueden ser? ¿Cuántas posibilidades tienes?

T.O. Sólo ΔAPD y ΔBCP.

Prof. ¿Qué hay que hacer entonces cuando te veas en dificultades en la demostración?

(No hay respuesta por parte de la alumna, se hace necesaria una sugerencia del profesor)

Prof. Hay que considerar las partes de la figura que … ¿Sigues tú?

J.W. ¡Que tengan alguna relación!

Prof. Correcto, que muestren alguna relación. Bien, examina ahora los triángulos.

T.O. AD = BC porque es un trapecio isósceles. Y DP = PC puesto que está en el enunciado. (Se queda otra vez parada).

I.B. D = C porque A = B.

Prof. ¿Eso no se puede formular de otra manera?

B.Z. Se pueden tomar como ángulos básicos.

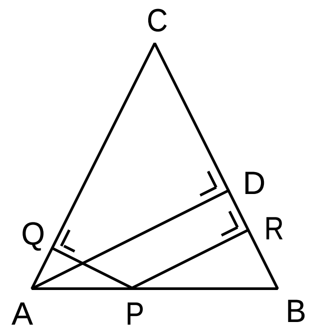
Prof. ¿Por qué ha tenido dificultades?

Muchos alumnos. No se sabe los teoremas.

La conversación prosigue. Antes de pasar a analizarla, reproduzco otro fragmento de otra conversación.

El enunciado dice: ΔABC es isósceles (AC = BC). En AB hay un punto P. Desde P se trazan una perpendicular PQ sobre AC y otra perpendicular PR sobre BC. AD es la altura que sale de A. Demuestra que PQ + PR = AD.

En la siguiente conversación didáctica no hay distinción entre los alumnos. Todos ellos son X.



Prof. ¿Quién comprende por qué se os dio la indicación de que de P se dibujara una perpendicular PS sobre AD?

X. Porque entonces se crea un rectángulo.

Prof. Bien, pero recordad también lo que vimos la semana pasada.

X. Con esa perpendicular lo que hacemos es medir PR sobre AD y así solo nos queda por demostrar que PQ = AS.

Prof. Exacto. Seguimos pues el mismo camino que la semana pasada. (En esa ocasión habían estudiado el siguiente problema: ΔABC es isósceles. AC = BC. Sobre la base AB se coge un punto P. Desde P se dibujan PQ // BC y PR // AC. (Q está en AC y R está en BC). Demuestra que PQ + PR = AC).

Prof. ¿Lo habríamos podido hacer también de otra manera?

X. Sí, habríamos podido dibujar desde P una línea paralela a BC.

Prof. ¿Qué figura es PRDS ahora?

X. Un rombo.

X. Un cuadrado.

Prof. Demuéstralo.

X. Hay cuatro ángulos rectos.

Prof. ¿Es eso suficiente para que sea un cuadrado? ¿Y la pizarra, también es un cuadrado?

X. No, los cuatro lados deben ser iguales.

Prof. ¿Y en este caso son iguales los cuatro? ¿Es correcto afirmar que es un rombo o un cuadrado?

X. No, es un rectángulo.

Prof. ¿Entonces, en qué casos se puede decir de un cuadrilátero que es un cuadrado?

X. Cuando tenga tres ángulos de 90°.

Prof. También había alumnos que afirmaban que PRDS es una paralelogramo. ¿Es cierto?

(Después de algunas discusiones entre ellos): Sí, también es cierto.

Estos protocolos son de gran utilidad para la didáctica. El estudio de distintos libros de texto nos dice bien poco acerca de la manera en que se imparten las clases, mientras que con estos documentos sabemos mucho más.

Esta conversación didáctica tiene, en primer lugar, la función de *modificar* positivamente la actitud de los alumnos. La conversación didáctica les hace ver claramente que la tarea asignada está a su alcance y que por lo tanto vale la pena esforzarse. En segundo lugar, se ofrece un determinado método de cómo llegar a plantear la estrategia de resolución de un problema y resolverlo. Es posible que así surja cierta comprensión en el reconocimiento de problemas y sus posibilidades de resolución. Esto supondría entonces la formación de una estructura de un nivel bastante alto. Aunque es posible que ese resultado se alcance, no existe en modo alguno certeza de que así ocurra. La mejora de las prestaciones que constata Boermeester podrían perfectamente ser consecuencia de una mejora de actitud. En Castiello (pág. 54) podemos ver la gran importancia que tiene la actitud para las prestaciones. Que una mejora de actitud fuera la causa principal de una mejora en las prestaciones no significaría que las conversaciones tengan por ello menos valor. Pero sin embargo podríamos dudar de si estas conversaciones didácticas, por mucho valor que tengan, pueden ser consideradas como *el* medio para llevar a cabo una educación orientada a la *comprensión.*

Los documentos indican, a mi juicio, que Boermeester ha pasado por alto dos factores importantes que están interrelacionados. En primer lugar, el método propuesto para resolver el problema no es el único. En segundo lugar, es perfectamente posible que las dificultades encontradas por los alumnos no se deban a una estrategia errónea al resolver el problema y a un conocimiento deficiente de los teoremas sino a una estructuración insuficiente de la imagen contemplada. Las respuestas de los alumnos parecen corroborarlo. "Qué tipo de figura es ahora PRDS?" Respuestas: "Un rombo", "Un cuadrado". Estas son respuestas de alumnos de tercer curso de U.L.O.[5]

Por la experiencia que tengo, es raro que niños que han seguido un año orientado a la estructuración de lo contemplado sigan teniendo problemas a la hora de distinguir rectángulos, rombos y cuadrados cuando se les muestran visualmente. Es más, en un capítulo posterior demostraré que hay niños de seis y siete años que sin fallo alguno son capaces de distinguir y de dibujar cuadrados, rectángulos, rombos, trapecios isósceles y paralelogramos, siempre que se elija un método de representación que no implique dificultades ocultas para la destreza del niño.

Cuando lo contemplado está insuficientemente estructurado existe una dificultad adicional: para un niño es mucho más difícil demostrar que una figura es un rectángulo usando procedimientos geométricos lógicos que hacerlo después de haberlo contemplado.

[5] U.L.O. = Uitgebreide Lagere School = Enseñanza Primaria Desarrollada, cursos que profundizaban en la materia de la enseñanza primaria, hoy en desuso (N. del T.).

La otra manera de solucionar el problema, que es radicalmente distinta, tiene muchísimo que ver con este punto. Los alumnos que poseen una correcta estructuración de lo contemplado ven una solución totalmente diferente. En el primer problema ven inmediatamente el eje simétrico; les resulta evidente que $\overline{QS} = \overline{RS}$. No tiene sentido preguntarles de dónde han partido: de la congruencia de los triángulos APD y BPC o de la congruencia de los triángulos AQS y BRS: Han percibido ambas congruencias simultáneamente cuando vieron la figura.

De ahí que la estrategia para resolver el problema sea para ellos totalmente distinta: Sería algo así: "¿Cómo reproduciré de la manera más clara posible y en el lenguaje prescrito aquello que percibo en la figura?" Su resolución sigue el camino del dibujo: primero dibujan AP y BP y demuestran en primer lugar que son iguales. Después dibujan QS y RS. La igualdad de estos segmentos se deriva de la congruencia de los triángulos que se han formado al dibujar los segmentos.

Hay otra respuesta del alumno I.B. que indica que hay una estructuración lógica cuando hubiera tenido que ser una de tipo contemplativo: " D = C, puesto que A = B". Si los alumnos consideran el trapecio isósceles como una figura con un eje de simetría, la igualdad de los ángulos C y D se manifiesta al mismo tiempo que la de los ángulos A y B. Si se ve la figura de esta manera ni siquiera es necesario considerar los ángulos C y D como ángulos base[6].

Por lo tanto, aquí es donde parece estar el peligro de aplicar la psicología de Selz: al poner su psicología tanto énfasis en la complementación de complejos, existe el peligro de olvidarse de que el material en sí debe estar lo suficientemente estructurado antes de estructurar la resolución del problema. Volveré e esta estructuración previa.

El segundo método basado en la teoría de Selz fue introducido por Bos y Lepoeter (Bos y Lepoeter, Wegwijzer in de Meetkunde (= Manual de Geometría), Ed. Meulenhof, 1954). El método que presentan está desarrollado al detalle en un curso de los que han aparecido tres volúmenes. Los autores ven en la práctica del método de complementación de complejos la principal meta de la enseñanza de la geometría. De ahí que el énfasis esté claramente en resolver problemas, lo cual es perfectamente comprensible al asumir, como Selz, que la complementación de complejos constituye la esencia del pensamiento. Si esto es cierto, podemos considerar la resolución de problemas según ese método como *el* medio por excelencia para practicar esta concepción. En otras palabras, hemos conseguido una geometría con un valor formativo máximo.

Bos y Lepoeter saben perfectamente que el material debe estar estructurado antes de poder estructurar la estrategia de resolución. Por eso, para poder empezar inmediatamente, escogen material que en sí presenta poca estructura, como los ángulos. Así tienen la ventaja de que la estructuración de los "métodos estratégicos de resolución" salte a la vista, al no haber interferencia de la estructura del material. Bien es verdad que a medida que avanza el curso se va estructurando más el material pero la estructuración de la estrategia se mantiene en un nivel primario.

Bos y Lepoeter dedican especial atención a la función del lenguaje. Saben que el lenguaje posee una estructura propia; para eliminarlo lo máximo posible recurren en un principio a esquemas. Para señalar que de una serie de premisas sigue una conclusión unen las premisas con un corchete, ponen una flecha y después la conclusión. Así logran una presentación muy clara de las secuencias lógicas: la representación de las estructuras se lleva al campo en que mejor se manifiesta: el visual. El método es muy consecuente; los datos no se suelen dar en palabras sino que se representan dentro de la figura: pequeñas líneas en los segmentos idénticos, arquitos en los ángulos, uves en las líneas paralelas. La teoría se ha llevado a la práctica de manera perfecta.

[6] Duncker (pág. 54) recomienda muy intensamente elegir la forma "orgánica" a partir de solucionar estas cuestiones. Por lo tanto, uno toma la posición de demostrar y se pregunta: "¿Qué sacaremos de esta afirmación?" Tampoco toma bastante en cuenta lo que se supone que está establecido.

Esta aplicación es de gran valor incluso para el que no esté convencido de que la complementación de complejos constituya *la* esencia del pensamiento. En efecto, la complementación de complejos es sin duda una componente esencial e imprescindible de nuestro pensamiento y tiene, tal como ya se ha dicho, un papel importante en geometría. En el curso de geometría de Bos y Lepoeter los profesores inquietos hallarán juntos y de manera sinóptica los distintos esquemas mentales que aparecen en geometría. Verán cómo se pueden representar de forma contemplable, cómo pueden hacerse asequibles a los niños y cómo se pueden practicar (ver Mursell II, pág.114).

Sin embargo si uno no se sitúa desde el punto de vista del autor, puede poner en tela de juicio el hecho de que se dé tanta importancia a la resolución de problemas como hace este curso. Surge la pregunta de si relegar la estructuración del material a un segundo plano no supone violentar la naturaleza. Otra cuestión importante sería si para la mayoría de los alumnos no tendría más valor ordenar lo contemplado que resolver el problema.

A este respecto es importante ver si la estructuración de lo contemplado aparece en los niños antes del desarrollo lógico. Esta es una pregunta para la psicología evolutiva. Según las investigaciones de Piaget el desarrollo del concepto de espacio se produce al mismo tiempo que el pensamiento lógico. Si así fuera, no se podría objetar nada al método de Bos y Lepoeter, por lo menos en cuanto al desarrollo conceptual. Para los profesores de matemáticas sería ideal. Cuando el niño hubiese llegado a la madurez necesaria, no tendrían más que dar expresión a lo adquirido y ordenarlo (¿o tendríamos que hablar de "lo obtenido"?). Pero no es tan sencillo, eso lo sabe cualquier profesor. Y también lo saben Bos y Lepoeter, sino no habrían estructurado su libro como lo han hecho. Habrían cuidado mucho más el aspecto de expresar las *estructuras con palabras*. El que no lo hayan hecho indica un desconocimiento del papel fundamental que, para el desarrollo global del niño, desempeña el pensamiento en el significado de las palabras y de las oraciones.

Al averiguar el modo en que Piaget llega a su afirmación vemos cómo ya admite a priori el desarrollo del pensamiento según líneas lógicas. En las preguntas formuladas a los niños, parte de una estructura lógica con la que él mismo relaciona los fenómenos. Esto se ve en lo documentos. Ya me he remitido a esto antes (II). Langeveld (II, pág. 41 y ss.) publicó un trabajo muy exhaustivo acerca de este método. Syswerda (I) muestra cuán inaceptables son los resultados de Piaget, sobre todo cuando se intentan aplicar en la enseñanza.

Ya que tanto la interpretación de la psicología del pensamiento de Selz como los resultados de Piaget deben considerarse dudosos, nos falta seguridad acerca de la exactitud de los principales fundamentos del método de Bos y de Lepoeter. Esto sin embargo no le resta valor teórico, que sin duda es importante. Han analizado brillantemente la forma de pensar que se produce al resolver problemas y han adecuado sus resultados a la didáctica.

Muchas didácticas de la geometría muestran puntos comunes con la psicología de la Gestalt. Bos y Lepoeter la usan conscientemente a la hora de estructurar la resolución de sus problemas. Bunt observa en un artículo (I) que varias dificultades que tienen los alumnos de geometría se deben al vínculo demasiado fuerte con ciertas estructuras. Muchos partidarios de cursos propedéuticos consideran que el objetivo del curso debe ser que el niño tome conciencia de la estructura contemplada, la ordene y amplie y que la formule con palabras.

Sin embargo la Comisión de Planes de Estudios de 1954 de WIMECOS parece desconocer este punto de vista, a pesar de ser uno de los argumentos más importantes a favor de que existan cursos propedéuticos. En el proyecto del Plan de Estudios leemos:

> "Curso de introducción a la geometría plana: dibujos y cálculos: líneas paralelas, características de los triángulos, congruencia".

En el comentario se lee, entre otras cosas, lo siguiente:

> "De ahí que la Comisión considere el siguiente proceso. Se empecerá con un tratamiento empírico e intuitivo de una parte de la geometría. Esta se estructurará de manera que el niño

vaya familiarizándose gradualmente con algunos conceptos importantes y que vaya adquiriendo destreza en el uso del compás y la regla. Asimismo se le inducirá a que haga por sí solo razonamientos sencillos no formales que sirvan de preparación para demostrar teoremas. Los razonamientos que pudiera hacer se mantendrán a un nivel pues concreto y podrán representarse mediante cálculo. Para ello se usará desde el principio la regla milimétrica y el goniómetro. Características evidentes, tales como la igualdad de ángulos opuestos, no se demostrarán.

Las características aprendidas en el curso intuitivo servirán de base para la posterior construcción lógico-sistemática de la geometría".

. . . .

"La comisión ofrece estas consideraciones como ilustración de alguna de la posibilidades que brinda un curso introductorio. La comisión no tiene en modo alguno la intención de forzar didácticamente a los profesores que deseen buscar otros caminos".

Esta última frase de la Comisión da a entender que no se pretende que aquéllos que buscan nuevas vías para la didáctica de la geometría cesen sus actividades. Con todo, no deja de ser descorazonador que una comisión planificadora no haya querido adoptar en su comentario un punto de vista más progresista.

Podríamos ir todavía más lejos y preguntarnos, tal como han hecho por ej. Petermann y Hagge (I), si esto no le correspondería más bien a la escuela primaria. ¿Acaso no sería aconsejable que al mismo tiempo que el niño adquiere experiencias espaciales con todo tipo de objetos, adquiera también mayor conciencia del significado que tienen al respecto los elementos posteriores: plano, línea, punto, espacio?

Nos podríamos plantear ahora las consecuencias didácticas para la geometría si nos fijamos conscientemente en la aparición de la autonomía durante el proceso de aprendizaje.

Si tiene validez general la regla según la cual en un proceso de aprendizaje avanzado las acciones de valencia van predominando y a la larga acaban escapando al control del conocimiento consciente, las consecuencias didácticas serán evidentes. También en matemáticas hay acciones que están sujetas a largos procesos de aprendizaje. En cálculo hay muchos procesos de éstos pero también en geometría. Si al cabo de un aprendizaje largo siguen apareciendo acciones inadecuadas, no existe la seguridad de que el origen esté en una interpretación errónea de los fundamentos racionales de las acciones conscientes. Puede muy bien ocurrir que el sujeto se dé cuenta de que está cometiendo errores pero que estos errores se deban a la interferencia de acciones autónomas que se escapan al control consciente. *La ayuda del educador no debe consistir en este caso en explicar de nuevo la base racional de las acciones conscientes*, sino que debe mostrar al niño las causas de los errores cometidos y recomendarle que reconduzca las acciones al control consciente.

Si tiene validez general la regla según la cual en un proceso de aprendizaje avanzado los complejos formados inicialmente para apoyar al proceso didáctico se van relegando a un segundo plano para después desaparecer sin desempeñar papel alguno en la explicitación de las valencias, esto daría a entender que *la base racional en este tipo de aprendizajes, a la larga, desaparece en la explicitación.* A la larga no habría pues ninguna diferencia, en lo que atañe al conocimiento de relaciones, si se ha llegado a dicho conocimiento por la vía de la razón o (para poner el extremo opuesto) por la vía del machaqueo. Y tendríamos además, a juzgar por los experimentos de Van Parreren, la circunstancia de que para las personas con disposición receptiva esta última vía sería aun la más rápida para llegar al objetivo. Cuando el objetivo de un proceso de aprendizaje consiste en disponer de un sistema de valencias, por ejemplo aprender a escribir a máquina, no tiene sentido usar la vía de la razón. Al aprender a escribir a máquina no se empieza a estudiar el criterio que siguió el fabricante a la hora de repartir las letras sobre el teclado.

Si tiene validez general la regla según la cual los complejos tienen un efecto perturbador sobre la formación de valencias, esto supondría que si un educador recurriera exclusivamente o casi exclusivamente a las valencias formadas y no a su base racional, *el niño perdería a la larga el dominio de esta base racional al desaparecer* para él *el significado racional de esa base.* Esto es grave en el caso de la geometría ya que con ello se rompería la cohesión lógica. En otras disciplinas matemáticas, por ej. en el cálculo de quebrados, las consecuencias a veces no son menos graves. En tal caso hay que retomar el estudio a partir del momento en que desapareció la base racional, si es que se quiere proseguir con álgebra. La reconstrucción de una base racional no suele tener éxito porque el resultado directo se ha vuelto autónomo y por tanto ya no puede servir de meta para un proceso de aprendizaje.

No es difícil demostrar que estas reglas tienen un alto grado de probabilidad, incluso para los procesos didácticos que nos encontramos en la enseñanza de las matemáticas. Las consecuencias de estas reglas les resultarán familiares a la mayoría de los docentes. Sabemos todos por experiencia propia que los alumnos suelen cometer errores que no pretendían: incluso nos pasa a nosotros. También sabemos que, a veces, para llegar a algún campo de valencias la vía racional no es la que más éxito tiene. Y finalmente muchos profesores saben lo difícil que resulta reconducir la base racional al interés del niño una vez se halla estructurada. Al niño que se sabe todas las tablas de multiplicar le da igual cómo se han formado, aunque se las sepa mal.

Quizá tendría que haber empezado ocupándome de si se puede hablar de autonomía en los procesos de aprendizaje que tienen lugar con las matemáticas. Esto tiene fácil solución: la autonomía se reconoce por la aparición de estructuras de acción inadecuadas que se rigen por determinadas leyes. Y es cierto que los errores se rigen por leyes: en caso contrario la tarea del profesor al corregir sería mucho más pesada de lo que ya es. Estos errores tienen su origen en factores de material y realmente vale la pena investigarlos. Haciéndolo seguimos manteniendo el control sobre el proceso de aprendizaje.

Con todo, el hecho de que en el proceso de aprendizaje aparezcan juntas la intención y la autonomía no simplifica la tarea del educador. Las seguridades que existirían si hubiera un desarrollo puramente racional se vienen ahora abajo en su mayoría. Para la enseñanza de la geometría, donde la base racional no puede faltar en modo alguno, la primera pregunta será: ¿cómo conseguimos que la base racional siga siendo reproducible cuando gran parte del campo se haya vuelto autónomo? Esto suscita inmediatamente una segunda pregunta: ¿cómo determinamos el instante en que podemos aceptar que el campo se ha vuelto autónomo? Si intentamos acelerar este proceso estamos estimulando una postura receptiva que elimina lo racional totalmente o en parte. Y queda una tercera pregunta importante: ¿cómo distinguimos si el fallo del alumno se debe a la falta de las valencias necesarias, a una estructuración insuficiente de la base racional o a una estructuración insuficiente de lo contemplado?

Los maestros y profesores suelen mostrarse muy comprensivos con estos problemas por lo que es evidente que también hay didácticas que están emparentadas con las ideas desarrolladas por Van Parreren. Que llamen poco la atención y que tengan pocas posibilidades de ser populares queda claro de lo anterior. Uno difícilmente se puede imaginar que en base a la teoría de Van Parreren se desarrolle un método de geometría que resulte cómodo y limite al mínimo la tarea del profesor. Ya podemos ver ahora el lugar que ocuparán las psicologías del aprendizaje en el estudio posterior de la comprensión en geometría durante la enseñanza secundaria. Ni qué decir tiene que estas psicologías serán incapaces de solucionar los problemas, aunque sea en principio. Para lograrlo hay que elegir como objeto de estudio la situación en los institutos de enseñanza media. Resulta evidente que para tener una visión exacta se precisa la colaboración de psicólogos con formación pedagógica y de profesores. No habría tratado aquí esta cuestión si no fuera porque en momentos puntuales se oye por parte del profesorado una recomendación de estar a la espectativa ya que, supuestamente, la psicología primero tiene que solucionar determinados problemas, antes de que pueda justificarse la continuación de la experimentación por parte del profesorado.

CAPÍTULO V

¿CÓMO SURGE LA COMPRENSIÓN EN GEOMETRÍA?

Si consideramos que la comprensión es la estructuración de un campo perceptivo, entonces un aprendizaje que abarque varias comprensiones será discontinuo. Observamos que el proceso de aprendizaje de un estudiante de geometría es clarísimamente discontinuo. Resultaría evidente que esto se debiera a que las estructuraciones del campo perceptivo se van renovando constantemente[7]. Sin embargo esta conclusión es totalmente inaceptable. En primer lugar, la comprensión no consiste únicamente en estructurar un campo perceptivo. Esto no es más que un tipo muy determinado de comprensión. En segundo lugar, nos encontramos con dos significados distintos del concepto "aprender". En el caso del chimpancé que tenía que sacar un plátano de una caja alargada con un palo, teníamos un proceso de aprendizaje discontinuo basado en reestructuraciones del campo perceptivo. Varias acciones estaban en un mismo plano y se efectuaban sucesivamente por reestructuraciones del campo perceptivo. Al estudiar geometría se produce algo totalmente distinto. Las estructuraciones creadas se convierten a su vez en el punto de arranque de una nueva estructuración. Pondré un ejemplo de este tipo de comprensión, que es característico del ser humano:

Supongamos que se han estudiado las propiedades y las características de un paralelogramo. Los alumnos saben que en todo paralelogramo:

a. los lados opuestos son paralelos,

b. los lados opuestos son iguales,

c. los ángulos opuestos son iguales,

d. cada diagonal corta por el punto medio a la otra.

También saben que un cuadrilátero es un paralelogramo cuando se cumple una de las siguientes condiciones:

a. los lados opuestos son paralelos,

b. los lados opuestos son iguales,

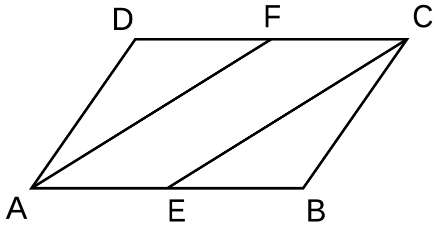
c. los ángulos opuestos son iguales,

d. cada diagonal corta por el punto medio a la otra,

e. un par de lados son iguales y paralelos.

Se les plantea ahora el siguiente problema:

En el paralelogramo ABCD, E es el centro de $\overline{AB}$ y F el centro de $\overline{DC}$. Demuestra que AF // EC.



[7] Ver las fases descritas por Duncker, pág. 35, para la resolución de problemas.

Si los alumnos tienen comprensión de la materia que acaban de estudiar, observarán que la figura representa un paralelogramo formado por dos triángulos congruentes y un nuevo paralelogramo, y harán el siguiente razonamiento:

1°. El problema está solucionado si demuestro que AECF es un paralelogramo, al tener un paralelogramo los lados opuestos paralelos.

2°. Por lo tanto debo buscar de entre las características de los paralelogramos, una que demuestre que AECF es un paralelogramo.

3°. Los lados $\overline{AE}$ y $\overline{FC}$ son los elementos comunes con el paralelogramo original ABCD. Así pues, estos lados me darán la solución.

4°. En efecto, $\overline{AE}$ y $\overline{FC}$ son a la vez iguales y paralelos. Esto lo sé por las propiedades del paralelogramo ABCD. De esta manera AECF queda definido como paralelogramo.

En este razonamiento se observan claramente la progresión y regresión tratadas por Bos (I). También podemos ver la importancia de la estructuración perceptiva. Pero lo más importante es el significado central que tiene la *palabra* paralelogramo. Representa toda una serie de propiedades que el alumno a la larga ha adquirido de forma autónoma. La estructuración perceptiva podrá ser útil de cara a la explicitación. La palabra evoca las características que definen al paralelogramo y por tanto conducen a la serie de propiedades deseadas (ver Delacroix II, pág. 237). También estas características se convierten finalmente en autónomas. En todo caso vemos que estas características suelen estar relacionadas de forma compleja con las propiedades del paralelogramo, puesto que la característica *e*, precisamente aquélla que se necesita en el ejemplo, no se da. La didáctica tendrá por lo tanto la tarea de averiguar cómo se les puede hacer a los alumnos más conscientes de la existencia de este quinta característica.

Muchos alumnos no se habrán planteado el problema de esta manera. Sólo habrán visto los triángulos congruentes de la figura. Esta congruencia les da la igualdad de los segmentos $\overline{AF}$ y $\overline{EC}$ así como la de los ángulos DFA y BEC y de los ángulos DAF y BCE. Cómo seguirán a partir de ahora dependerá en gran medida de lo que más les llame la atención: los dos pares de segmentos iguales $\overline{AE}$ y $\overline{FC}$, $\overline{AF}$ y $\overline{EC}$, que ahora han formado una figura cerrada, o el conjunto de características de las líneas paralelas, que se deducen a partir de la igualdad de los ángulos DAF y BCE o DFA y BEC.

No se puede considerar este último método inadecuado tanto desde el punto de vista lógico como del psicológico: las igualdades derivadas de la congruencia llevan más directamente a la solución; si lo consideramos desde el punto de vista psicológico observamos que no ha hecho ningún rodeo ya que las igualdades son perfectamente observables desde la percepción. Sólo tardarán algo más al tener que escribirlas de forma tradicional.

El último método sólo demuestra que la comprensión que tienen del concepto paralelogramo sigue siendo insuficiente. Los alumnos aún no han captado que este concepto es como un punto de reposo, un lugar central, en el que confluyen las características y desde el que parecen irradiar las propiedades. Vale la pena averiguar en qué condiciones se irá formando este tipo de comprensión. La práctica enseña que, después de unos meses, casi todos los alumnos hacen estos razonamientos, con el paralelogramo como centro, de manera fluida y espontánea. El proceso de aprendizaje se ha desarrollando así a lo largo de varios meses. La pregunta es cómo ha sido ese desarrollo.

Para que se pueda formar este tipo de comprensión se requiere en primer lugar que el campo perceptivo esté suficientemente estructurado. Lo que se entienda por suficiente dependerá de la capacidad individual de cada alumno. No todos se basarán en el aspecto perceptivo en la misma medida. Un segundo factor importante para la formación de la comprensión es el lenguaje. Entre otros, De Miranda (II) se ha referido al tema. Hemos visto la importancia del lenguaje: cuando se pronuncia una palabra, ésta evoca gran número de características y propiedades. Los alumnos ya lo han experimentado antes. Dos de las características del paralelogramo son los términos paralelo e igual. Estas palabras no evocan únicamente una representación. Evocan además las distintas relaciones recogidas en la estructuración perceptiva que pueden servir de punto de partida para razonamientos posteriores. Algunas de estas relaciones son: "Si dos segmentos son iguales, sus mitades también lo son". "Dos segmentos iguales a un tercer segmento son iguales entre sí". Puesto que en el paralelogramo del ejemplo son paralelos los lados AB y DC se puede afirmar que FC y AE también son paralelos. Los alumnos perciben estas relaciones como evidentes, pero sólo es el lenguaje el que les posibilita utilizarlas. El método de solución que usa la congruencia de los triángulos no es el más sencillo para los alumnos. Si la han utilizado es porque han estado machacando durante más tiempo el concepto de congruencia y por tanto les resulta más familiar.

Este sería el proceso de formación de la comprensión en geometría:

1°. Primero se produce una estructuración del campo perceptivo. El caso de si esta estructuración es o no repentina no tiene mucha importancia puesto que ello no juega un papel determinante en el proceso de aprendizaje.

2°. La estructuración del campo perceptivo va unida a distintas palabras.

3°. El proceso mental acerca de las figuras se va desarrollando cada vez más en el terreno verbal, es decir, la estructuración perceptiva se va convirtiendo paulatinamente en estructuración lingüística. Queda la posibilidad de que ciertas palabras, como paralelogramo, congruencia, evoquen una estructuración perceptiva, pero esta posibilidad no se aprovechará siempre (ver Spaier, pág. 130 y ss. y Hönigswald, pág. 33).

4°. Se crea cierta autonomía en la estructuración lingüística. Ciertas agrupaciones de premisas llevan automáticamente a determinadas conclusiones, o a la inversa, la búsqueda de ciertas conclusiones lleva automáticamente a la búsqueda de ciertas premisas (ver Delacroix I, pág. 93 y ss.).

Cuando se han realizado los tres primeros momentos, decimos que hay comprensión. Cuando se ha realizado el cuarto, ha llegado el momento de llegar a una estructuración mayor, a una comprensión mayor. Las palabras, que ahora se han convertido en bien común, pueden servir de puntos de partida.

Este desarrollo no tiene que suponer necesariamente una estructuración basada en principios lógicos puesto que la relaciones que fija el lenguaje no están forzosamente ordenadas de forma lógica. Puede ocurrir que la palabra paralelogramo evoque un conjunto de características sin que el niño sepa cuáles pertenecen a la definición y cuáles pueden ser demostradas con ayuda de ésta. Además, el desarrollo que he esbozado también es aplicable en grandes trazos fuera del campo de las matemáticas. Seguro que en esos casos la estructuración lingüística no desemboca en una estructuración lógica. Pero incluso en matemáticas, la estructuración final por lo general sólo será lógica cuando el profesor dirija intencionadamente al alumno en dicha dirección. Bajo la influencia de la educación el niño se va acostumbrando a un modo de razonar lógico y, así lo esperamos, a la larga lo valora positivamente y acaba adoptándolo. Vemos entonces cómo los razonamientos van perdiendo paulatinamente su carga lingüística, cómo el lenguaje se va sustituyendo cada vez más por símbolos cuyo significado está fijado de manera más exacta que las palabras que se venían usando. Al final el razonamiento se sustituye en gran parte por una operación con símbolos. Los métodos de solución se llevan a cabo siguiendo un algoritmo, el pensamiento transcurre en gran parte de forma autónoma, teniendo los símbolos valencias para agrupaciones y nuevos símbolos. Cuando se ha alcanzado este estadio -por supuesto que en muchas materias no se llega a alcanzar este nivel en bachillerato- el razonamiento se fundamenta enteramente en una estructuración lógica (ver Delacroix III, pág. 478).

Al formarse la comprensión geométrica nos encontramos por tanto con tres estructuraciones: una estructuración perceptiva, una estructuración lingüística y una estructuración lógica. En parte se complementan pero a la larga la última acaba desbancando a la anterior. Llegado el caso puede ocurrir que una palabra o más tarde un símbolo evoque alguna representación perceptiva aunque esto se irá produciendo cada vez con menos frecuencia según se vaya automatizando la acción. Así pues, el lenguaje tiene en cierta manera la función de intermediario. Según se progresa en geometría se elimina cada vez más el lenguaje, de manera que se pasa directamente de la estructuración perceptiva a la simbología sin haber usado el lenguaje. Hay que decir que para muchos sólo corresponden al campo de las matemáticas las relaciones entre símbolos (piénsese en el formalismo), con lo cual las estructuraciones perceptivas y lingüísticas sólo pueden usarse como medios de apoyo de manera temporal teniendo que eliminarse pronto.

Según todo esto, hay que considerar el lenguaje como parte integrante del material. Así pues habrá que contar con la aparición de estructuras de acción inadecuadas procedentes del lenguaje. De hecho las hay: homónimos dan pie a confusiones de conceptos. En geometría, por ejemplo, la palabra "paralelo" hace pensar en líneas muy alejadas entre sí, una interpretación indeseada ya que en geometría no-euclídea es absolutamente inadecuada. También los símbolos pueden dar pie a todo tipo de equívocos.

Comparemos ahora, tal como lo hicimos al principio del capítulo, el proceso de aprendizaje en geometría con un aprendizaje en el que se producen varias comprensiones susceptibles de ser interpretadas como estructuraciones del campo perceptivo. Vemos que se trata en efecto de procesos totalmente distintos. Incluso el desarrollo irregular de estos dos procesos de aprendizaje sólo coincide en apariencia. Cuando tratamos con reestructuraciones del campo perceptivo, las repentinas subidas en la curva de aprendizaje son primarias. En los segmentos horizontales ocurre poco; suelen corresponder con épocas de ensayo y error o prácticas. En el aprendizaje en geometría (y en general en cualquier proceso de aprendizaje complejo del ser humano) son precisamente los tramos horizontales donde más cosas ocurren. Se produce la reorganización, se forman las valencias y el lenguaje o los símbolos adquieren su función especial. Sólo cuando el alumno tiene la sensación de dominio suficiente, estas palabras o símbolos pueden actuar en una nueva estructuración como unidades independientes. Entonces comprobamos una repentina subida en la curva de aprendizaje: ha nacido una nueva comprensión. Pero para ello es preciso que estas palabras y símbolos se hayan liberado de tal manera de las estructuras que representan que éstas ya no puedan perturbar las nueva estructuración (ver Mursell I, pág. 44 y ss.).

Hemos visto al final del capítulo anterior que al pasar de una comprensión a otra superior existe una mayor posibilidad de que a la larga se pierda la base racional de los conceptos con que se opera. Esto es gravísimo por no decir inadmisible en geometría, una de cuyas principales metas reside precisamente en el conocimiento de la cohesión lógica del conjunto de teoremas. Puede ocurrir también que un cambio de enfoque de ciertas estructuraciones perceptivas suponga cierta dificultad para percibirlas, algo que puede resultar perjudicial para la aplicación de la geometría. Por ello el profesor deberá buscar los medios para contrarrestar la marcha natural de las cosas y no permitir que se olviden las bases racional y perceptiva que sin embargo resultaban superfluas para el pensamiento a alto nivel y que incluso lo entorpecían. Esto se puede hacer, por ejemplo, incidiendo en un momento determinado en la cohesión lógica de los teoremas partiendo de axiomas. En ningún caso se debe suponer que la capacidad de operar con teoremas a alto nivel signifique una garantía de que se conoce la cohesión lógica. Suele ocurrir más bien lo contrario. Un método que explicara extensamente la procedencia de cada relación sería absolutamente inadecuado. Esto vendría a significar la destrucción de la estructuración formada.

Tras esta introducción teórica indicaré algunas condiciones prácticas que han de cumplirse para la formación de la comprensión. Así, de paso, tendremos oportunidad de probar la teoría en la práctica.

El primer factor importante que favorece la creación de la comprensión es el *interés por un determinado tema.* Es verdad que quizá no sea del todo necesario. Sin embargo la falta de interés supone un serio obstáculo para alcanzar comprensión. La implicación para la enseñanza es que el profesor tendrá que profundizar en la motivación de la materia. Con ello se determinará si las circunstancias son propicias para la aparición de la comprensión.

Hay que tener cuidado en no invertir esta afirmación. Un método didáctico no es bueno únicamente porque los niños se lo pasan bien. Puede ocurrir que un método sea incapaz de originar comprensión a pesar de que los niños se sientan muy a gusto. Cuando se ilustra la materia con material muy vivo pero con un atractivo que poco o nada tiene que ver con la materia principal, existe el peligro de que la atención de los alumnos se distraiga del tema y que en consecuencia no se alcance la comprensión. También puede ser que el método resulte atractivo porque requiere poco esfuerzo mental, lo cual tampoco favorece la aparición de la comprensión.

Pero no basta sólo con el interés. También se requiere *recapacitación.* Quien quiere alcanzar comprensión en un asunto debe profundizar en él. Esta condición plantea grandes problemas para la enseñanza. El niño en su fase de crecimiento está intentando ordenar ideas acerca de tantos problemas extraescolares que le queda poco tiempo para profundizar en asuntos estrictamente escolares. Por ello son muchos los profesores y maestros que intentan que esta recapacitación se produzca en el marco de una conversación didáctica. Las tareas que implican una elaboración posterior de los resultados obtenidos por estas conversaciones contribuyen a que el alumno recapacite de forma individual. La experiencia sin embargo enseña que estas tareas no han de ser demasiado profundas: si los resultados tardan en aparecer existe el peligro de que muchos alumnos abandonen.

Además hay que indicar que los alumnos no suelen tener muchas oportunidades para ponerse a recapacitar. Si lo hacen en la escuela, corren el riesgo de que se les llame la atención y se les diga que se pongan a trabajar. Si lo hacen en casa, se les requiere para alguna tarea doméstica puesto que de todos modos "no estaba haciendo nada". Preguntados en este sentido, muchos alumnos respondieron que, efectivamente, pensaban en problemas escolares pero sólo cuando se habían acostado. En los colegios en que se da mayor libertad a los alumnos, se les puede dejar que trabajen en pequeños grupos. De este modo el alumno efectúa su trabajo individual y su correspondiente recapacitación, mientras que el tiempo de búsqueda queda reducido al poder contar con la ayuda del compañero.

En muchos casos tendrán que cumplirse más condiciones. El tema puede resultar demasiado difícil o complicado para ser resuelto sólo con especulaciones. A menudo los alumnos tendrán que practicar con *material didáctico,* medios auxiliares, que pueden ser abstractos y concretos. No se olvide además que cada material implica una estructuración propia. De esta forma el proceso de aprendizaje se ve influenciado de manera característica. El material debe cumplir altísimos requisitos; no puede ser tan complicado como para desviar la atención del verdadero problema; tampoco puede ser tan esquemático que muestra una articulación insuficiente del problema. Así, por ejemplo, el material de base para explicar el concepto de quebrados será inadecuado si no se distingue claramente qué fracción del total tenemos. Pero será igual de inadecuado si la partición resulta demasiado sencilla, por ejemplo, si sólo se usa el material de Montessori en forma de sectores. Fallos similares se pueden detectar en materiales abstractos. Si para estudiar las funciones se pretende explicar el significado de las gráficas utilizando un método que parte de las gráficas de "funciones en general", entonces no se suele formar la comprensión porque la presentación del tema es demasiado complicada. Si, en cambio, el método se limita casi únicamente a las gráficas de funciones lineales tampoco suele haber comprensión porque la materia se ha simplificado demasiado.

También es posible que la comprensión aparezca únicamente después de un *contacto personal* con otros. La comprensión no es directamente transferible de una persona a otra. Esto se deduce del hecho de que sólo se puede hablar de comprensión cuando un alumno logra hallar una solución en una situación nueva, es decir, una solución que no le ha sido proporcionada por otros. No se puede enseñar comprensión. Esto no impide sin embargo que uno que ya ha alcanzado la comprensión pueda ayudar a que otros la adquieran. Por ejemplo puede aportar material técnico, elaborar esquemas mentales, ordenar material de trabajo, etc. En gran parte los medios utilizados consisten en una aplicación de las leyes de la psicología de la Gestalt: es posible usar la ley de la correcta continuación enseñando al alumno soluciones de otros problemas conocidos y similares. También es posible aplicar la ley de la oclusión ampliando el problema de tal manera que se forme una estructura cerrada que el alumno capte mejor.

La intransferibilidad, una de las principales características de la comprensión, no implica de modo alguno que sea imposible enfocar la educación hacia la adquisición de comprensión. Esta deducción errónea se ha oído alguna vez. Se trata de una reacción a la opinión de algunos según la cual resolver problemas matemáticos simplemente depende de la voluntad, al igual que copiar un poema. Observemos que no se le puede forzar a un alumno a efectuar prestaciones intelectuales por muy capacitado que esté. Es necesario que *quiera* alcanzar comprensión. Además su predisposición ha de ser real y no consecuencia de una resistencia vencida. Una vez asegurados de la cooperación del alumno, no se le podrá transplantar directamente la comprensión pero se le podrá ayudar en la forma descrita (ver también Mursell, pág. 62).

Sin embargo, la ayuda de otra persona puede tener una influencia negativa. Si esta ayuda se presta a un nivel demasiado alto, puede causar desánimo. También puede ocurrir que la persona que da la ayuda solucione el problema entero; el alumno pierde entonces todo interés por el problema. Pero también es perjudicial la ayuda que se presta a un nivel demasiado bajo puesto que acarrea una mecanización demasiado temprana. Dicha ayuda entorpece la aparición de la comprensión. Otra posibilidad es que quien ayuda incida tanto en las posibles complicaciones del problema que el alumno se asuste.

También se puede fomentar la comprensión mediante *mecanismos de control* que indican qué nivel de progreso ha alcanzado la comprensión. Se pueden hacer, por ejemplo, preguntas que averigüen si el niño es capaz de llegar sin ayuda a la solución. Por supuesto que estas preguntas sólo serán efectivas si tienen cierta profundidad. Otro medio de control es presentar una lectura de la materia de manera distinta a como la ha aprendido el niño. Si es capaz de entender la lectura hay grandes posibilidades de que tenga comprensión. En caso de que no entienda el texto, es posible seguir estimulando al niño a seguir pensando. Se obtendrá el mismo efecto si un grupo de alumnos que han asimilado la materia a su manera y de manera individual se ponen a comentarla entre sí.

Todos estos aspectos pueden explicarse a la luz de la teoría.

El significado del interés puede relacionarse con la hipótesis del efecto ("Ley del efecto" de Thorndike). Si tiene tanta trascendencia es porque está en la base de la diferenciación de los campos perceptivo o mental. El interés acelera la estructuración.

La recapacitación tiene que ver con el aspecto racional del proceso mental. Se producen reestructuraciones conscientes y se van probando soluciones. Mediante la recapacitación se practica el pensamiento consciente que deberá dirigir el proceso mental en la nueva situación.

La práctica del material tiene una función similar. Pero además tiene como objetivo la creación de valencias que serán necesarias para formar nuevos puntos de partida para las siguientes estructuraciones. Hemos visto que el material a veces puede tener un efecto no deseado que puede llevar a un pensamiento consciente o a autonomía producida por este pensamiento. Esta autonomía resulta inapropiada para el objetivo perseguido.

Es evidente que no se producirá el aprendizaje si no hay voluntad de aprender. Cuando el alumno tiene una actitud demasiado pasiva, ejerce un control insuficiente sobre los procesos intelectuales. Como mucho se forma un sistema de valencias que desaparecerá rápidamente al no existir una estructuración.

La ayuda prestada a un nivel demasiado alto apela a unas estructuras que aún no se han formado. En tal caso la ayuda suele servir de poco. Cuando el que da la ayuda resuelve todo el problema le priva al alumno de cualquier medio para averiguar la validez de su propia estructuración. La ayuda de nivel bajo va directamente encaminada a la formación de la estructuración deseada pero sin cohesión alguna con las estructuraciones precedentes. La continuación de este tipo de aprendizaje sólo puede llevar a un simple sistema de valencias, es decir, a una mecanización. Cuando el alumno se encuentra demasiado pronto con las posibles complicaciones de la materia, se perturba la estructuración deseada.

El significado de los mecanismos de control es tan evidente que no requiere más explicación.

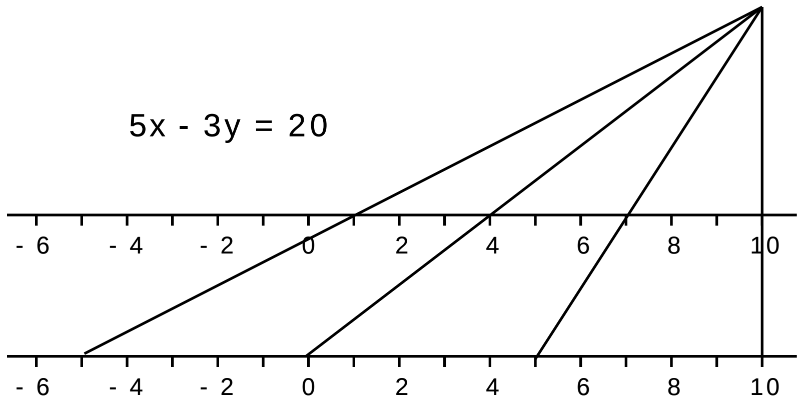
De lo anterior se desprende lo adecuada que resulta la terminología de la psicología de la Gestalt para describir los fenómenos percibidos. Queda todavía una cuestión importante. En la primera parte de este capítulo he argumentado que la comprensión de una parte de la geometría se diferencia radicalmente de la comprensión que se podría llamar estructuración del campo perceptivo. La comprensión de alguna parte de la geometría suele consistir en una estructuración de unidades previamente estructuradas, por lo que es preciso que haya una importante autonomización antes de que pueda formarse la comprensión. Podría parecer que es imposible que se produzca algún "¡Ajá, ya lo veo!" al estudiar geometría puesto que el "¡Ajá, ya lo veo!" consiste en una estructura de acción derivada de una reestructuración del campo perceptivo o mental. En geometría las estructuras de acción se suelen formar lentamente. A consecuencia de un progresivo proceso de autonomización, las unidades de estructuración del campo mental se van haciendo cada vez más autónomas. Pero aún así vemos alguna vez en clase de geometría alguna repentina prorrupción de la comprensión en los alumnos. Este fenómeno se puede explicar de la siguiente manera: supongamos que el alumno ya dispone de un sistema bien estructurado con unidades autónomas. Por una sola experiencia reveladora descubre que el sistema también puede aplicarse a otra estructura ya conocida. En tal caso se cumplen de repente todas las condiciones para que surja la comprensión. Un ejemplo lo podrá clarificar.

Hice una variación de una prueba de Piaget con mis hijas. Le mostré a mi hija de 4,3 años, que más o menos sabe contar hasta 10, una fila de siete cuadrados. En frente coloqué una segunda fila de cuadrados pero colocados más cerca unos de otros. Le pregunté qué fila era más grande y me contestó que la primera era "mayor" que la otra aunque sabía que ambas tenían siete cuadrados. Repetí la prueba con dos filas de cuatro cuadrados. El mismo resultado. Luego repetí la prueba pero esta vez con una fila de tres cuadrados muy separados entre sí frente a una fila de cuatro cuadrados muy juntos. Esta vez me contestó plenamente convencida que la de cuatro era la más grande: "Cuatro es mas grande que tres". A continuación volví a colocar una fila de cuatro cuadrados muy separados frente a una con cuatro cuadrados muy juntos. En esta ocasión me dijo que eran iguales. Llegaba a esa conclusión siempre que se le presentaran unidades iguales de cuadrados que ella pudiera contar. Mi hija de 5,8 años al principio también pensaba que los siete cuadrados separados eran más que los siete muy juntos. Cuando la pequeño oyó esta afirmación exclamó: "¡Pero no ves que hay los mismos cuadrados! Hay siete en las dos filas". Después de mucho pensar la mayor dijo: "Ah sí, ahora lo veo. Es que están más juntos".

Este caso se puede explicar de la siguiente manera: la pequeña ordena originalmente las cantidades de manera global según longitud y densidad. Pero al mismo tiempo tiene la gran convicción de que cuatro son más que tres. Con la primera ordenación se podía variar la ubicación de las cuatro unidades. El conflicto entre la ordenación global y la convicción de que cuatro es más que tres se resuelve a favor de esta última. Pero las consecuencias son importantes: a partir de ahora la opinión se apoya en la ordenación conocida de los números naturales. La mayor tiene que ceder ante el argumento pero necesita hallar una explicación para el conflicto que hay entre ambas opiniones (ver Duncker, pág. 25).

El pensamiento creativo suele efectuarse de esta manera. Una circunstancia más o menos casual, por ejemplo haber estudiado un problema similar recientemente, revela al alumno que una estructura conocida le sirve para solucionar un nuevo problema. Podría tratarse de una asociación por contigüidad, pero igualmente podrían ser las dos primeras leyes de la psicología de la Gestalt. Pongamos un ejemplo de las matemáticas en enseñanza media:

El profesor ha explicado las ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. Quiere saber si los alumnos son capaces por sí solos de hacer representaciones gráficas. Por eso les cuenta a los alumnos que en los periódicos es frecuente encontrar gráficas de imágenes y también gráficas de líneas y de barras. No explica nada; sólo se limita a indicar en términos muy vagos que debería ser posible representar una relación algebraica con una imagen geométrica. Al cabo de algunos días los alumnos van trayendo las soluciones. Además del método tradicional de representación, alguien trae la representación gráfica de la figura (nomógramo):



El alumno ha llegado a esta solución ya que hace poco se ha estudiado en clase una figura similar.

En la mayoría de los casos la situación es distinta en la enseñanza de las matemáticas. Aunque alguna vez puede ocurrir que algún conflicto desencadene la formación de comprensión, lo cierto es que esta formación no suele ser repentina sino que se alcanza tras la elaboración laboriosa de un conflicto. Sólo tras un largo período de pruebas, un alumno llega a la conclusión de que la mayoría de los números no tienen raíz cuadrada exacta: que si se continúa sacando raíces se obtienen continuamente nuevos decimales y que esto no tiene fin. Después descubre que tampoco puede salir con quebrados normales. El teorema de Pitágoras dice que la diagonal y el lado de un cuadrado tienen una relación de $\sqrt{2}$. Esto sitúa al alumno ante una contradicción: el hecho de que no se puede concluir la extracción de raíces le impulsa a deducir que no existe $\sqrt{2}$; sin embargo lo que sabe de la relación entre diagonal y lado de un cuadrado le impulsa a deducir lo contrario, que sí existe $\sqrt{2}$. El conflicto da lugar a la introducción de los números irracionales. Pero en modo alguno se puede decir que ha habido un surgimiento repentino de comprensión.

Quiero concluir el presente capítulo con una referencia a varios factores que pueden perturbar gravemente la formación de la comprensión.

En primer lugar, puede ocurrir que haya una *falta de inteligencia* del alumno. Es un factor que ha sido exagerado. En muchos casos en que se ha querido explicar el fracaso escolar por la poca inteligencia del niño se ha demostrado que se debía más bien a una didáctica inadecuada. A veces también se exagera en sentido contrario. Se afirma que cada alumno de enseñanza media está capacitado para aprender matemáticas y que los malos resultados se deben siempre a una mala enseñanza. Esta teoría es peligrosa porque fomenta una didáctica dirigida sólo a los alumnos más flojos. Existe el peligro de ignorar a los más aventajados.

Un factor que supone una trastorno muy importante es que alumno tenga *falta de confianza en sí mismo.* Strunz (pág. 152) dice al respecto:

> "La falta de confianza en uno mismo es *el mayor peligro para que el aprendizaje progrese.* El adulto no acomete todas las tareas que a su entender no es capaz de llevar a buen término. El alumno no sabe distinguir por sí solo cuales podrá y cuáles no podrá realizar. Este necesita amoldarse a una prueba, pero el sentimiento de debilidad en contra de la correspondiente tarea interrumpe su voluntad de trabajo, cada pequeño fracaso lo tomará como una demostración de su opinión y finalmente dejará de lado el trabajo que debe realizar; por lo tanto, su rendimiento será cada vez menor".

El alumno tiene esta falta de confianza nada más llegar al instituto. Los padres suelen decir: "Las matemáticas no le irán muy bien porque en básica también iba mal en aritmética. Además en la familia somos más de letras". Es evidente que la primera tarea del profesor será quitarle al alumno la idea de que para las matemáticas se necesita ser un cerebro. Tendrá que convencerle de que mediante un pequeño esfuerzo puede compensar una posible falta de inteligencia.

Cuando hay inteligencia y autoconfianza aún puede ocurrir que no se forme la comprensión porque el niño no tiene suficientes estructuras mentales. Quiere decir que carece de *base suficiente* para alcanzar comprensión. Estos alumnos se encuentran incluso en grupos bien seleccionados. Y es que por mucho que se vayan creando estructuras, éstas no pueden ser transmitidas directamente por el profesor, tal como hemos visto. Esto explica que en un grupo bien seleccionado pronto empiecen a aparecer niveles.

CAPÍTULO VI

¿CÓMO SE MANIFIESTA LA COMPRENSIÓN EN LOS NIÑOS?

Para esta cuestión me limitaré a los alumnos de enseñanza media. Vemos que hay una gran diferencia con los adultos. Muchos alumnos nuevos tienen poco o ningún deseo de adquirir comprensión de la materia objeto de estudio. Pero también resulta que muchos alumnos carecen de comprensión en algunas materias de la enseñanza básica cuando se supone que la deberían tener.

Tenemos cantidad de ejemplos en los exámenes de ingreso. Una de las preguntas era: *Muestra mediante una figura que* $1\ dm^2 = 100\ cm^2$. Sólo un 45% de los alumnos fue capaz de hacerlo. Algunos no entendían la pregunta, pero la gran mayoría de los que no lo supieron solucionar hacían dibujos que denotaban que no entendían el concepto de superficie. Dividían por ejemplo el *perímetro* de un cuadrado o de un rectángulo en 100 partes. O dividían un lado en 4 y el otro en 25 partes. Otros alumnos dieron el siguiente esquema:

km^2	hm^2	dam^2	m^2	dm^2	cm^2	mm^2
				1	00	

"Lleva un ^{2} o sea que se añaden dos ceros" (Van Hiele III).

También parece que estos alumnos tienen un concepto erróneo de los quebrados. Para obtener la sexta parte de un rectángulo dividen esta rectángulo por la mitad con una horizontal primero y después con una vertical. De las cuatro partes obtenidas vuelven a dividir dos por la mitad. Y dicen: "Este es un rectángulo dividido en 6 sextas partes".

Si se divide un cuadrado mediante una diagonal en dos partes iguales y luego se vuelven a unir estas partes en un triángulo isósceles estos alumnos no ven claro que estas figuras tienen la misma superficie.

Los alumnos no hacen nada para ocultar sus tendencias erróneas. Durante los primeros meses se libra una feroz batalla entre los alumnos que sólo piensan en las *respuestas* a los problemas y el profesor que intenta hacerles ver que no se trata sólo de respuestas sino de *métodos de solución,* que son los que finalmente les llevarán a la *comprensión.*

De estos datos se podría inferir que el afán de comprensión es algo que debe inculcar la educación. Esta suposición es en sí improbable pues ya vimos en el primer capítulo que el hombre difícilmente puede actuar sin ningún tipo de comprensión. Sin embargo la práctica nos muestra lo contrario. Cuando un niño que está aprendiendo a hablar dice la frase: "Lo he rompido", está demostrando a través del error que tiene cierta comprensión. No nos habríamos podido cerciorar de esta comprensión a no ser por el error gramatical. En el estadio en que se va formando una comprensión superior el niño dudará o se parará al llegar al participio: es porque se da cuenta de que existen ciertos verbos que no se conjugan de manera normal (regular) y sospecha que éste es un verbo de éstos.

Acabamos pues de descubrir la comprensión y no tenemos por qué extrañarnos: si el niño no llegara constantemente a nuevas comprensiones sería imposible que se desarrollara mentalmente. También sabemos que el adulto juega en este proceso un papel reducido (pasivo): sólo debe tener cuidado en no interferir en la marcha natural de los acontecimientos. Esto lo puede hacer no interviniendo con demasiada premura. Cuando el niño se hace algo mayor intenta adquirir comprensión en temas mucho más difíciles. Por ejemplo quiere saber cómo es posible que los padres y los abuelos también hayan sido niños, cómo llegó el hombre a la tierra, etc. El deseo de adquirir comprensión no lo produce pues la educación sino que es más bien un ingrediente necesario en la evolución de niño a hombre. Cuando detectamos que el niño de 12 años carece de este ansia de comprensión con respecto a la materia escolar, nos encontramos con una perturbación de esta evolución. Vale la pena averiguar las causas de esta perturbación.

La primera pregunta que nos podemos hacer es la siguiente: ¿Estos alumnos de 12 años han perdido el deseo de adquirir comprensión o ocurre sólo con ciertas asignaturas? La primera suposición sería mucho más grave que la segunda ya que si el deseo de comprensión hubiera desaparecido del todo, la perturbación afectaría a la personalidad del niño. Afortunadamente todo parece indicar que no suele ser así; el niño muestra grandes deseos de comprensión cuando está ocupado con algún hobby. Lo que sí parece es que el niño sitúa la materia escolar en una posición excepcional: considera que la materia escolar no es imprescindible para su desarrollo mental.

Nos haremos una buena idea de la situación si utilizamos la distinción que hizo Morrison (pág. 57 y ss.) de los alumnos en tres tipos:

1. El primer tipo hace sus tareas diarias satisfactoriamente y va aprendiendo cosas. A este tipo lo llama Morrison los "transferidores". Son alumnos muy trabajadores que suelen tener éxito en su vida futura. A pesar de que a veces estudian poco les basta con lo poco que han estudiado para integrarlo todo en una comprensión razonable.

2. El segundo tipo hace sus tareas diarias bastante bien pero sólo se queda con una pequeñísima parte. Morrison los llama los "aprende-lecciones". Se les estima igual que los transfer-type pero dan pie al dicho: éxitos en el colegio suelen equivaler a fracasos en la práctica.

3. El tercer tipo son aquellos que no hacen casi nada pero que a veces nos sorprenden por el alcance de sus conocimientos efectivos. El profesor los suele llamar perturbados mentales (lo cual evidentemente es inexacto) o como individuos que jamás tienen el trabajo en regla. A veces suelen tener éxitos sorprendentes en su vida futura. Morrison los llama "aprendices directos".

Morrison insiste en que no hay que considerar estas tres clases de alumnos como tipos de carácter. En especial el "aprende-lecciones" es el resultado de un determinado tipo de enseñanza. Cuando no se distingue entre materia, que forma la auténtica esencia, de lo que se trata, y aplicaciones; cuando esta materia se presenta como un todo homogéneo que se divide en unidades aleatorias resulta muy comprensible que los alumno se adapten a este tipo de enfoque. Utilizarán en su gran mayoría el método más adecuado para reproducir dichas unidades. Las aplicaciones también se considerarán como unidades sin mucha cohesión con la auténtica materia. Es así como la escuela produce los "aprende-lecciones" (ver Delacroix III, pág. 479).

El siguiente ejemplo demuestra las consecuencias funestas que tiene este enfoque.

En el examen oral final se pregunta: Se conocen las raíces x_1 y x_2 de la ecuación de segundo grado $2x^2 + 5x - 2 = 0$. Calcula $x_1^2 + x_2^2$.

El alumno responde: "La suma de las raíces es igual a $\frac{-5}{2}$, por lo que $x_1^2 + x_2^2$ es igual a $\left(\frac{-5}{2}\right)^2$". El examinador: "Eso no es del todo correcto; piensa un poco más". El alumno se queda extrañado. Después de mucho pensar sugiere: "¿Se refiere usted a que lo tengo que considerar como un producto notable?"

Esta pregunta tiene la siguiente explicación: El alumno cree que en circunstancias normales dos operaciones, como son aquí el elevar al cuadrado y sumar, se pueden intercambiar. Sin embargo hace mucho tiempo aprendió en una serie de lecciones aisladas unas excepciones que, debido a su excepcionalidad, se llamaban productos "notables". Puesto que ahora le acaban de decir que el caso normal no está bien, podría ser que fuera una de esas excepciones.

Este ejemplo nos permite ver en qué falla la enseñanza. Como hemos visto en el capítulo anterior, un proceso de aprendizaje en matemáticas, si se continúa durante mucho tiempo, desemboca en una estructuración lógica, en un algoritmo. Por lo general los alumnos han aprendido con gran exactitud a dominar este algoritmo y los resultados suelen ser satisfactorios siempre que sepan qué algoritmos deben utilizar y siempre que las operaciones pertenezcan a un mismo algoritmo. Pero cuando han asimilado la materia de forma incoherente, tendrán dificultades en saber qué estructura lógica deben utilizar y cómo reconocer las unidades. En la enseñanza básica se suelen tratar los quebrados de esta manera, con la consecuencia de que los alumnos saben calcular con quebrados pero que en el campo perceptivo son incapaces de reconocerlos como tales.

Pero hay otra causa más profunda para que las relaciones entre estructuras lógicas y perceptivas sean insuficientes (Van Hiele, II). Se debe a la forma característica que tienen los matemáticos de reproducir los resultados de sus investigaciones. El informe en que se plasman sus resultados se da siempre de manera que pueden verse sinópticamente todos los resultados; no suele aparecer el análisis conceptual que les ha llevado a sus resultados. La consecuencia es que los estudiosos tienen después grandes dificultades para entender el resultado y a menudo se forman una idea incompleta acerca del problema resuelto. Una materia que se presta bien al estudio de este aspecto es el cálculo de probabilidades. Esta parte de las matemáticas es bastante reciente, lo que nos permite fijarnos bien en todas las dificultades que pueden surgir.

Los problemas prácticos que han llevado al cálculo de probabilidades no son difíciles de adivinar. Seguramente habrán sido el riesgo que se corre en los juegos de azar como los dados, las cartas, la ruleta, etc. Un estudio tendrá que comenzar forzosamente por entender los fenómenos: ¿qué aspecto tiene un dado, cómo funciona una ruleta, cómo se barajan las cartas, cuáles son las reglas de juego, en qué medida el jugador puede influir en el resultado y en qué medida depende del azar? A continuación habrán de analizarse los conceptos: ¿qué es la casualidad?, ¿qué es la probabilidad? No se podrán poner criterios objetivos. ¿Por qué espero que un dado salga "bueno" si existen las mismas posibilidades de que salga el 6 o el 1? ¿Cuándo se puede decir que dos acontecimientos son igual de probables?

Después de estudiar el terreno y analizar las relaciones entre los distintos conceptos se pasa al segundo estadio: se ordenan las relaciones halladas, se establece una serie de axiomas a partir de los cuales habrá que desarrollar el material matemático. En el caso del cálculo de probabilidades, somos conscientes de que este material matemático es de una exactitud irrefutable pero que sigue existiendo incertidumbre acerca de si este material es apropiado para explicar los fenómenos.

Tras elaborar el material matemático nos queda un tercer estadio: el de la resolución de los problemas. Los casos que se producen en la práctica se pueden formular en una forma lo más matemática posible y se puede ofrecer la solución para estos problemas. También se sabe que en muchos casos no resulta sencillo averiguar si un problema práctico corresponde a un tipo concreto y, en caso afirmativo, cómo ha de interpretarse la solución ofrecida[8].

Si se intenta transmitir los conocimientos obtenidos a otras personas, es evidente que en el caso del cálculo de probabilidades no tendremos mucho éxito si nos limitamos a transmitir el material matemático. En este material es difícil encontrar restos de las dificultades conceptuales que se han ido encontrando a lo largo del camino. Una transmisión de conocimientos, caso de que se produzca, tendrá como consecuencia una disminución de la comprensión.

Cuando el matemático se convierte en profesor cambia su postura con respecto al campo del conocimiento que pretende transmitir. Mientras que su inclinación matemática, que le ha llevado a esa asignatura, le empuja hacia el tercer estadio, la resolución de problemas, tiene que retroceder ahora hasta el primer estadio, el análisis de los fenómenos y, lo que es más importante, el análisis de los conceptos. Por un lado, ahora lo tiene más fácil que cuando empezó sus estudios puesto que ya conoce la solución; por otro lado, ahora ha de ampliar su análisis de conceptos hasta los contenidos que dan sus alumnos a dichos conceptos al tiempo que debe hallar el camino para

[8] Para el significado que tiene el problema de cara a la consideración de la materia como globalidad, véase el capítulo X.

hacerlos corresponder con el contenido conceptual tan debilitado que produjo la matematización del segundo estadio.

Porque está claro que en ese segundo estadio siempre se produce un debilitamiento conceptual. El concepto de paralelogramo tiene para el niño un contenido mucho más rico que el que da la definición: "Un paralelogramo es un cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos". Para el niño suele significar un cuadrilátero con ángulos torcidos, con lados desiguales y a veces también supone ciertas condiciones para la posición en que se sitúa el cuadrilátero. Sería inexacto afirmar que estas representaciones se deban a las ilustraciones que figuran en los libros de texto. Más bien es lo contrario: las ilustraciones son así porque los alumnos y probablemente también los autores de los textos se las imaginan de esa manera. Esto lo vemos en una conversación con una niña de 7,8 años:

Est.: Me gustaría dibujar un paralelogramo (apenas si sabe pronunciar la palabra) pero no me sale.

Prof.: Hazlo con este bloque (Le da un rombo de una caja de mosaicos).

Est.: Eso no es un paralelogramo, es un rombo. ¿Que no lo ves?

Prof.: Pues coge dos juntos. Mira, así.

Est.: ¿Entonces sale un paralelogramo? Pues sí, así sí.

El profesor se enfrenta pues a tres análisis conceptuales: *a.* un análisis de los conceptos tal como aparecen en el campo de estudio antes de la matematización, *b.* un análisis de los conceptos tal como aparecen en el campo matematizado, *c.* un análisis de los conceptos tal como los tienen los alumnos antes de emprender el estudio de un campo. Es precisamente este último el que resulta de vital importancia en el proceso de aprendizaje (ver Mursell II, pág. 85 y ss.).

Sólo cuando los alumnos tengan una representación clara del campo antes de que se apliquen los conceptos matemáticos será deseable transmitirles también los conocimientos adquiridos del segundo estadio. La práctica demuestra sin embargo que el profesor no tiene la paciencia necesaria para esperar hasta este momento preciso. Hay varios sentimientos responsables de ello. En primer lugar al profesor le fastidia en esta exploración provisional dejar en la vaguedad ciertos conceptos que se definen con gran exactitud en el segundo estadio. Además se siente condicionado por el hecho de que en el primer estadio tiene que tener en cuenta los contenidos conceptuales más ricos de los alumnos que luego tendrá que limitar. Pero el impedimento más importante es que el profesor se suele sentir incapaz de expresarse ante los alumnos en un campo conceptual que él, en su evolución personal, ya ha cambiado por otro mucho más perfecto. En muchos casos tampoco percibe que sus razonamientos parten de un campo conceptual que es suyo propio y que resulta incomprensible para los alumnos.

En el ejemplo del cálculo de probabilidades no es fácil que se produzca este tipo de situación. Sin embargo en partes más antiguas de las matemáticas, como la geometría plana, es mucho más frecuente este error. Por ejemplo cuando se les quiere transmitir a los alumnos el concepto de semejanza y se parte del principio de la multiplicación de las figuras, hay que considerar esto como un intento de introducir directamente el campo matemático del segundo estadio. No se tiene en cuenta el hecho de que los alumnos desde muy pequeños han estado en contacto con el concepto de semejanza (ampliar y reducir) sin que lo hayan asociado a la palabra semejanza. En cualquier caso debe preceder un análisis minucioso de los conceptos que tienen los alumnos.

Esta transmisión de conocimientos se produce en geometría desde hace más de diez siglos y no es de extrañar por tanto que sea tan grande la divergencia entre el campo perceptivo y el matemático. Para algunos maestros la superficie de un rectángulo *se reduce* al producto entre longitud y anchura. Para algunos la congruencia se reduce a una relación entre figuras matemáticas. Se sorprenden cuando se les dice que esta misma relación tiene en el mundo de las vivencias un papel mucho más importante que el que tiene en geometría (piénsese sólo en las fabricaciones en serie, en las unidades intercambiables en iluminación y en las máquinas de fotografiar, etc.).

Esto es así porque el estudio que precede al algoritmo no se suele considerar como parte integrante de las matemáticas. Así pues cuando a alguien le toca enseñar matemáticas es muy posible que se salte esta importantísima introducción y que pase sin más a la matematización del campo[9]. Pero este razonamiento conduce a una visión muy simplista del asunto. Como educador que es, el maestro tiene la obligación de asegurarse que sus enseñanzas están en consonancia con el objetivo educativo. Para poder decidir si en geometría es preferible anteponer el estudio del campo perceptivo al tratamiento del algoritmo, tendremos que ver cuál es el objetivo educativo:

a. El conocimiento de un algoritmo para llegar a una mejor estructuración del campo perceptivo, o

b. sencillamente el conocimiento de cierto algoritmo que se llama geométrico por una razón que no viene muy al caso.

Esta distinción tiene mucho que ver con la transferencia que se persigue. Por este motivo volveré a tratar este tema en el capítulo dedicado a la transferencia.

La carencia de comprensión de los quebrados y las superficies que vimos en el examen de ingreso es fundamentalmente una carencia de relaciones con el campo perceptivo. El conocimiento del algoritmo es satisfactorio. Sin embargo a veces parece que no es más que el resultado de un "aprendizaje de lecciones" ya que el alumno a veces aplica un algoritmo en un campo erróneo. Así puede ocurrir que el profesor de básica piense que el alumno ha asimilado bien los quebrados y las superficies porque siempre ha aplicado de manera satisfactoria los algoritmos apropiados durante las clases, mientras que el profesor de secundaria crea que el alumno tiene un conocimiento insuficiente porque no sabe actuar en situaciones concretas.

Para poder analizar esta situación hay que averiguar los errores que se cometen en la enseñanza básica. Para ello es deseable que volvamos a ver, sin meternos con la didáctica utilizada para enseñar los quebrados, qué elementos de razonamiento se precisan para llegar al concepto y qué fases se distinguen en su elaboración conceptual.

Partamos del hecho de que un niño sólo sabe reconocer un quebrado $\frac{1}{\mathrm{n}}$ porque el objeto del que se toma $\frac{1}{\mathrm{n}}$ está dividido en n partes congruentes. Se puede rebatir esto desde el punto de vista lógico al afirmar que es perfectamente posible elaborar un algoritmo en el que aparezca el quebrado $\frac{1}{\mathrm{n}}$ sin que haya congruencia en el conjunto. Esto es verdad y podríamos incluso decir que en nuestro mundo de experiencias jamás se puede hablar del todo de congruencias completas. Pero con ello se vuelve a caer en el error de pretender entender al niño desde el propio campo mental lógico.

Por ello es necesario que el niño aprenda a conocer las divisiones congruentes. Se suele partir de un rectángulo para ejemplificar la división de una figura, lo cual es un punto de partida acertado. Si se partiera de un segmento le sería difícil al niño distinguir la congruencia de las partes; en cambio, si se parte de una figura espacial le suele costar al niño ver cuántas partes forman la totalidad. Sin embargo será necesario enseñarle muchas divisiones congruentes de figuras y se le tendrá que mandar que él mismo se ponga a dividir muchas figuras congruentes. Es la única manera de evitar la aparición de perturbaciones debidas a factores del material.

---

[9] En muchos casos ya ni siquiera se trata de matematizar el campo. La materia se presenta directamente en la forma de un sistema lógico-deductivo. La relación con el campo perceptivo se limita como mucho al uso de algunas palabras y frases que también aparecen en la descripción de lo percibido. El libro "Estadística" de Bunt (II) es un claro ejemplo de ello.

Cuando la división correcta se ha convertido en concepto, llegamos a la segunda fase: el estudio de la relación entre parte y todo: el todo contiene n partes, una parte es $\frac{1}{n}$ del todo. Se trata de llegar a la formación de valencias: la estructuración perceptiva de las partes, de las que se necesitan n para, en una configuración determinada, formar una unidad, debe quedar reflejada de una sola manera: $\frac{1}{n}$.

A continuación comienza la tercera fase en que el niño se pone a descubrir a partir del campo las relaciones operativas, o sea las relaciones de las que se deducirá el algoritmo. Cómo lo haga dependerá de la didáctica y del método. Pero en todo caso hay que decir que en esta fase no hay por qué decirle cuáles son estas relaciones; el niño ve por sí mismo que dos octavas partes forman una cuarta parte y que la mitad de una cuarta parte es una octava.

En la cuarta fase se procede a ordenar y memorizar las relaciones halladas. Los niños no pueden por sí solos hallar algunas de las relaciones que hoy en día se enseñan en básica. Así, por ejemplo, tenemos la multiplicación de quebrados entre sí y la división por quebrados. Estas relaciones, que no funcionan bien en básica y que además tampoco ofrecen buena base para la enseñanza posterior, quedarían mejor fuera de la escuela primaria (ver "Directrices para un nuevo plan de estudios de cálculo en la Enseñanza Básica", Ed. Purmerend, 1956).

En la quinta fase se practican las relaciones estudiadas.

En muchos manuales de cálculo se les enseña a los alumnos la división de rectángulos en partes iguales pero acto seguido se les mandan ejercicios que más bien pertenecen a la cuarta y quinta fase. Se salta el período en que el niño se dedica a dividir él mismo toda clase de figuras de la primera fase y también el período de pruebas que sigue a la definición dada de los quebrados, cuando el niño va descubriendo relaciones. La demostración del material es del todo insuficiente. Parece como si el único objetivo que se persigue consista en inculcarle el algoritmo al alumno.

A veces se suele decir que hay poca comprensión de los quebrados porque, aunque es cierto que los alumnos la han adquirido, esta comprensión ha quedado borrada por el estudio del algoritmo. Hemos visto en el capítulo V que esto, efectivamente, puede ocurrir en procesos didácticos prolongados. Sin embargo cuesta aceptar esta excusa, ya que en muchos casos el enfoque de la materia ha estado muy poco dirigido a estructurar el campo contemplativo. Al mismo tiempo, con un enfoque correcto, por ejemplo enfrentando los alumnos constantemente a situaciones concretas, es muy fácil que se mantenga el contacto con el campo perceptivo.

Una explicación mucho más probable es que los maestros, por lo general, no han tenido otro objetivo al enseñar los quebrados que el de inculcar el algoritmo, puesto que todos sus tests están enfocados al dominio del algoritmo. Raramente aparecen situaciones concretas. Esto no significa que de esta manera se introduce en la enseñanza básica la concepción formalista de las matemáticas. Mucho más probable es que lo que haya hecho tirar la toalla a los maestros sea el convencimiento de que la estructuración del campo perceptivo referente a la multiplicación y división de quebrados es demasiado difícil. "Si de todos modos tenemos que enseñarles una parte de las operaciones con quebrados como un algoritmo, ¡por qué no lo hacemos, de paso, con todas las operaciones!" Sin embargo si en la escuela básica se limitaran a operaciones con quebrados como sumarlos y restarlos, multiplicar un quebrado o dividirlo por un número entero, sería perfectamente posible hacerles adquirir a los alumnos preparados una comprensión completa.

De esta manera vemos que los alumnos procedentes de la básica tienen una carencia de comprensión en dos aspectos:

a. La relación entre el algoritmo que utilizan y las estructuras del campo perceptivo es demasiado débil.

b. Debido a un aprendizaje demasiado poco sistemático, no saben qué algoritmo tienen que utilizar en una situación determinada (ver Mursell, pág. 47 y ss.).

Este análisis del estudio de los quebrados en la escuela básica nos puede servir de dos maneras:

a. Sabemos ahora qué problemas nos encontraremos en el primer curso.

b. Sabemos qué resultados obtendremos si descuidamos la estructuración del campo perceptivo y si trabajamos con unidades insuficientemente cohesionadas.

En la enseñanza secundaria se deberá, de algún modo, proseguir con lo que se empezó en básica. Se pueden dar distintos casos:

Primera posibilidad: Se acepta sólo a los alumnos que tienen una comprensión suficiente de los conceptos básicos y se hace saber a los maestros por qué se ha rechazado a los otros.

Segunda posibilidad: Se continúa por el camino emprendido y se persigue una comprensión del algoritmo sin demasiada cohesión con la estructuración del campo perceptivo.

Tercera posibilidad: Se intenta hacer ver a los alumnos que el conocimiento del algoritmo en sí no basta y que es preciso que profundicen en la cohesión entre las estructuras del campo perceptivo.

El atractivo de la *primera solución* reside en que es consecuente: el profesor opina que el alumno tiene una comprensión insuficiente en una asignatura básica y se niega a malgastar sus esfuerzos en la tarea ingrata de mejorar esta comprensión. Se limita de manera muy considerable la pugna entre alumno y profesor acerca del método a seguir. El gran inconveniente de esta solución es que muchos institutos sólo aprobarían a una pequeñísimo grupo de alumnos. Además, esta postura tan rigurosa suscitaría una oposición para la que hoy en día no están preparados la mayoría de los institutos.

La *segunda solución* tiene varios puntos a su favor. En primer lugar, existen ejemplos de que basta con el conocimiento del algoritmo, o sea, que la estructuración del campo perceptivo tiene poco o ningún significado. Este es por ejemplo el caso, entre otros, de las multiplicaciones y divisiones con grandes números. Lo que se pretende es que los niños sean capaces de llevar a cabo las operaciones correctamente. Raramente se precisa un conocimiento de los fundamentos racionales de estas operaciones. A los alumnos de las clases inferiores de la enseñanza secundaria les suele gustar la aplicación de un determinado algoritmo. Es como un juego que pueden jugar solos: no existe mucha diferencia entre aplicar las reglas del álgebra para resolver una ecuación y hacer un solitario. A la inversa, en los rompecabezas y en los problemas que se resuelven por diversión encontramos cantidad de problemas matemáticos que sólo seducen a una parte del alumnado. Entre los que resuelven estos pasatiempos reconocemos inmediatamente al matemático por el hecho de que intenta presentar su solución de tal manera que sea válida en todas las situaciones. Persigue una total liquidación del problema (De Groot, II, pág. 27). El método del matemático se parece mucho al del que resuelve pasatiempos; es una ocupación que se distingue del juego de los niños en que incluye momentos de trabajo pero que, sin embargo, se parece a ese juego en que supone una exploración que no desemboca en un objetivo práctico directo (Langeveld, III, pág. 221 y ss.). Una enseñanza enfocada a una práctica máxima de algoritmos en una interrelación correcta (es decir sin estar dividida en unidades didácticas aleatorias), pero que no intenta establecer relaciones entre estos algoritmos y las estructuraciones del campo perceptivo, contribuye indudablemente a la creación de un tipo determinado de matemático.

Así pues se pueden tratar los quebrados definiéndolos como una pareja dirigida de números. La conexión con los números enteros se obtiene identificando la pareja (a , 1) con el número a, etc. Todo matemático sabe esto. Lo que ya es más raro es que se sepa el significado "real" de los quebrados: cuando se domina un algoritmo todo funciona de maravilla. En el momento en que uno se enfrenta con una aplicación de los quebrados, es decir, cuando se tiene que usar en determinada situación la relación entre los quebrados y la estructuración del campo perceptivo, se pueden obviar las dificultades aprendiendo un nuevo algoritmo para esa situación concreta. Este método se puede aplicar en todas las disciplinas matemáticas. Si, por ejemplo, se considera importante en las ecuaciones cuadráticas que los alumnos puedan calcular rápidamente expresiones como $x_1^2 + x_2^2$, $x_1^3 + x_2^3$, etc., se les enseña un algoritmo para derivar estas formas.

Se sabe perfectamente cuál es el resultado del proceso de aprendizaje de los alumnos que han recibido este tipo de enseñanza matemática: han aprendido gran cantidad de algoritmos. El valor de dichos algoritmos se puede medir a la luz de su utilidad práctica. Hay que tener además en cuenta el porcentaje de algoritmos que se habrán olvidado antes de que los alumnos tengan la oportunidad de llevarlos a la práctica. También es importante la fase de ejercicios que hayan tenido los alumnos cuando practicaron los nuevos algoritmos. Se podrían reunir sin grandes dificultades todos los datos al respecto. Pero no hay que hacerse ilusiones de que los alumnos hayan aprendido otra cosa *aparte de* los algoritmos. Las investigaciones han demostrado que una enseñanza enfocada hacia cierto objetivo suele tener un efecto desgraciadamente limitado en otros terrenos, por muy cerca que se encuentren del objetivo (Mursell I, pág. 97). La mayoría de los alumnos educados de esta manera no son capaces de apropiarse *por sí mismos* de algoritmos para nuevas situaciones ya que eso no se les ha enseñado. Además, habrá que sopesar el hecho de si, hoy en día, aún tiene sentido importunar a personas en fase de crecimiento con unos algoritmos existentes de los que cada vez se están ocupando más las máquinas. A la persona que maneja la máquina se le pide precisamente determinar cómo sacar partido de esa máquina, que domina ciertos algoritmos, para resolver el problema que tiene entre manos. Es precisamente esa función para la que no lo ha preparado la escuela.

La *tercera solución* tiene la ventaja de que prepara a los alumnos en un mundo en que no todos los fenómenos que se presentan son previsibles. También tiene la ventaja de que los alumnos no tienen que aprenderse todos los algoritmos: se pueden limitar a aquéllos cuyo conocimiento es deseable debido a su frecuencia de aparición. La comprensión de los principios básicos de los demás algoritmos les posibilita dominarlos cuando el momento lo requiere. Pondremos un ejemplo: cierto manual de cálculo mercantil contiene unas trescientas fórmulas. El autor considera que el que estudie la asignatura debe saberse perfectamente por lo menos cien. Al alumno podría bastarle con diez si pudiera aplicar el álgebra de la enseñanza secundaria. Se trata precisamente de saber si el ahorro de tiempo que supone saberse todas esas fórmulas compensa el indudable gran esfuerzo que supone retenerlas y saber en qué situaciones se pueden usar.

Sin embargo la tercera solución también tiene serios inconvenientes. La principal es que va en contra de la tradición. El profesor lo tendrá muy duro durante el primer año ya que no puede esperar que su intento de modificar la actitud de sus alumnos cuente con la aprobación general. En los siguientes años le opondrán resistencia ya que se sabe que "aprender-lecciones" supone menos esfuerzo que el estudio de la materia en un contexto más amplio. Morrison dice lo siguiente al respecto (I, pág. 60):

> "Aprender supone esfuerzo y por ello siempre se encuentra con lo que podríamos llamar inercia adaptativa. En la naturaleza humana existe la tendencia, reconocida en psicopatología, de intentar escapar de la realidad por medio de una compensación ilusoria. Es más fácil memorizar lecciones que aprenderlas. De ahí que los aprende-lecciones, en varios estadios de la enfermedad, se desarrollen con soltura en una escuela que no sólo les brinda la oportunidad de actuar así, sino que además premia el proceso".

En la escuela clásica tradicional, en que desde tiempos inmemorables "aprender-lecciones" constituye el centro alrededor del cual gira toda la organización escolar, el profesor necesita hacer grandes esfuerzos para mejorar la situación a través de una materia más coherente. Otra dificultad importante la encontramos también en las escuelas no tradicionales. El examen final se concibe, muy comprensiblemente, según el método que se ha aplicado: el "aprender-lecciones". De ahí que en esos exámenes finales se pidan aplicaciones de algoritmos estudiados y, preferentemente, en tal forma que de la pregunta se deduzca claramente cuál es el algoritmo que se pide. Así pues, en el último curso, sea cual sea el instituto, el profesor tendrá que hacerles estudiar algoritmos a los alumnos. Ya no tiene ninguna importancia si estos algoritmos tienen alguna utilidad posterior: ¡lo que cuenta es el examen final! Si el profesor no lo hiciera, sus alumnos no reaccionarían con la suficiente rapidez en el examen. La ventaja que tienen los alumnos que han estudiado la materia con una cohesión mejor no se puede manifestar adecuadamente ya que, como vimos en el capítulo II, es difícil medir este tipo de comprensión en los exámenes.

Sin embargo, tendremos que admitir que en la mayoría de los institutos se persiguen otros objetivos distintos al examen final. En tales casos tenemos en la práctica la elección entre la segunda y la tercera solución. Elegiremos la segunda solución cuando se trate de algoritmos que se aplican con mucha frecuencia y de los que no se esperan ampliaciones, como son la multiplicación y división de números enteros. Cuando, en cambio, el algoritmo tenga pocas aplicaciones y se esperen grandes ampliaciones, como en el caso de quebrados, elegiremos sin duda la tercera solución. Este es indudablemente el caso de la geometría. Los algoritmos de la geometría no tienen una aplicación amplia mientras que las estructuraciones del campo perceptivo en el que se usan son muy variadas. Si en alguna materia es deseable que haya comprensión en un sentido amplio, ésta es sin duda la geometría.

En cierta manera es notable que un capítulo que por su título debiera tratar del modo en que surge la comprensión en los alumnos se haya dedicado más bien al hecho de que no se suele constatar comprensión en la enseñanza secundaria, que es donde se esperaría encontrarlo. Sin embargo hay que entenderlo de la siguiente manera: lo más curioso de la comprensión de los alumnos de secundaria es que no suele existir. Si queremos observar cómo se manifiesta la comprensión en niños de esas edades es preferible hacerlo fuera del instituto o dentro del mismo pero relacionada con temas distintos a la materia escolar. De ahí que tengamos que concluir que muchos alumnos se muestran indiferentes ante una parte importante de su materia: no la consideran esencial para su desarrollo.

CAPÍTULO VII

INFLUENCIA DE LA COMPRENSIÓN EN EL COMPORTAMIENTO DEL NIÑO

Donde mejor se puede observar la influencia que tiene la comprensión en los hábitos del niño es en aquellos terrenos que ya tienen gran importancia independientemente de la comprensión. Al estudiar estos terrenos enseguida nos damos cuenta de que la aparición de la comprensión suele tener una importancia escasa o nula en los hábitos.

Esto se da, por ejemplo, cuando el terreno ya tiene un gran significado emocional incluso antes de aparecer la comprensión. Así podemos pensar en las informaciones sexuales de los educadores cuando el niño ya se ha ocupado de los fenómenos sexuales a nivel teórico y emocional. Sabemos que las informaciones y la comprensión teóricas ejercen poca influencia en el comportamiento en aquellos terrenos en que siguen existiendo grandes cargas emocionales.

Incluso cuando aparece la comprensión, por ejemplo al estudiar una teoría, después de haberse desarrollado una estructura de comportamiento muy diferenciada, esa comprensión tiene muy poco peso. Cuando ese tipo de comprensión, de hecho tardío, le haga ver que la estructura de comportamiento preexistente era inadecuada, puede ser que el sujeto se ponga a evitar las acciones de dicha estructura en lugar de corregirlas. En ese caso se puede hablar de una influencia sobre el hábito, pero evidentemente no es la influencia que nos interesa.

En el campo que nos ocupa, el niño suele tener pocas cargas emocionales. Sus contactos han sido más bien de carácter teórico e ingenuo sin que se haya preocupado demasiado. De ahí que haya muchas posibilidades de que se produzca un cambio de comportamiento debido a una educación específica del pensamiento.

Puesto que el objetivo de este estudio es el análisis del significado de la comprensión en las enseñanzas medias (y particularmente la comprensión específica en matemáticas), nos limitaremos en este capítulo a estudiar la influencia que tiene *ese* tipo de comprensión en los hábitos del niño. Ratifiquemos la definición de hábito que da Langeveld (I): "costumbres de pensamiento, costumbres de comportamiento, que predisponen hacia un enfoque *determinado* de problemas muy heterogéneos". Recordemos también que los resultados de un proceso de aprendizaje se miden a la luz del cambio que se ha producido en los hábitos y también que en un aprendizaje sensato la comprensión siempre constituye un momento importante. De esta manera, preguntarse cuál es la influencia de la comprensión en el hábito del niño viene a ser lo mismo que preguntarse cuáles son los resultados efectivos del proceso de aprendizaje. Es una pregunta sin duda vital. Sin embargo a causa de su generalidad, queda fuera del alcance del presente trabajo.

Tampoco es preciso que nos planteemos la cuestión en términos tan generales. Se trata básicamente de averiguar: 1° qué cambios se han producido en el hábito del niño tras adquirir comprensión de una parte determinada de las matemáticas y 2° cómo distinguir entre el hábito de aquellos niños que tienen una comprensión matemática basada en el dominio de ciertos algoritmos del de aqéllos que, además de cierto conocimiento de algoritmos, tienen también comprensión de la manera en que se les adecúan objetos del mundo vivencial.

Ambas posibilidades de comparación se pueden interpretar como un estudio de transferencia. La transferencia es un concepto muy vago. Mursell (I, pág. 87) dice lo siguiente:

> "En las bibliografías educativas encontramos constantemente indicaciones según las cuales el valor de mucho de lo que se estudia no radica tanto en el dominio de los temas como en la ayuda que éstos nos pueden proporcionar para aprender acerca de otros. Es la afirmación de que es posible *transferir* el dominio de un campo al dominio de otro. Representa la teoría general de la transferencia del aprendizaje".

Esta afirmación equivale a decir que analizar la posibilidad de transferencia viene a ser lo mismo que analizar el resultado de la comprensión adquirida. Tanto estudiar transferencia como estudiar la comprensión adquirida significan que hay que estudiar si el niño, como consecuencia del proceso de aprendizaje, es capaz de actuar en nuevas situaciones intencionada y adecuadamente. Lo único que difiere algo es el énfasis: en el caso de la transferencia se trata más que nada de terrenos en que el niño es capaz de actuar; en el caso de la comprensión pensamos más bien en los cambios que se han producido en él. Pero precisamente al haber definido la comprensión de manera funcional hay realmente poca diferencia[10].

Por razones prácticas conviene distinguir tres tipos de transferencia cuando se habla de matemáticas:

a. La aplicación de hábitos de pensamiento y de comportamiento formados por un determinado proceso de aprendizaje en matemáticas, en el mismo campo de las matemáticas o en otro distinto.

b. La aplicación de hábitos de pensamiento y de comportamiento formados por un determinado proceso de aprendizaje en matemáticas, en un determinado problema de carácter matemático en una asignatura distinta de las matemáticas.

c. La aplicación de hábitos de pensamiento y de comportamiento formados por un determinado proceso de aprendizaje en matemáticas, en un determinado problema de carácter no-matemático en otra asignatura.

La transferencia *a* se refiere al funcionamiento de la comprensión en el terreno matemático. Es lo que veremos en este capítulo.

La transferencia *b* se refiere a la posibilidad de hacer funcionar e la comprensión matemática obtenida en otras asignaturas. Es cuando se habla de la *aplicación* de las matemáticas. Lo trataremos en el siguiente capítulo.

La transferencia *c* se conoce como valor formativo. Se trata de saber si la comprensión geométrica posibilita un mejor razonamiento en terrenos totalmente distintos. Lo veremos en el capítulo IX.

Mursell (I, pág. 98) da unos ejemplos significativos del no funcionamiento de un determinado método matemático dentro de su mismo campo. El alumno sabe resolver los siguientes problemas:

Reduce: $15a + 7a - 5a$, resuelve: $2z = 10$, pero es incapaz de resolver:

Resuelve: $18x + 3x - 16 + 4x = 18$.

A un grupo de alumnos se le dan los siguientes problemas:

a. Hay dos números. El primero sumado a tres veces el segundo da 7. El primero sumado a cinco veces el segundo da 11. ¿Cuáles son esos dos números?

b. Los dos pares $x = 3, y = 7$ y $x = 5, y = 11$ cumplen la ecuación $y = ax + b$. Calcula *a* y *b*.

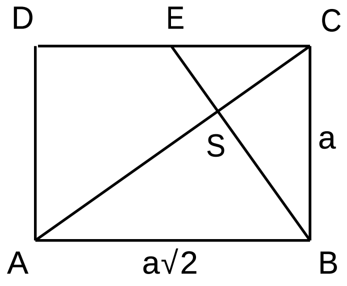
---

[10] La "Encyclopedia of Educational Research" (Monroe) al llegar al término "transferencia" remite a "disciplina específica" y "disciplina general". Estas son las definiciones: *Disciplina específica* consiste en el análisis de los elementos específicos que resultan decisivos para determinar ciertas reacciones y la práctica por la cual la reacción apropiada se convierte en la respuesta habitual a cada elemento que ha sido discriminado de esta manera.
Disciplina general consiste en el aprendizaje del reconocimiento de estos elementos decisivos en distintas situaciones.
Más adelante se afirma que este último caso está relacionado con el concepto de "valor formativo".

El 16% falló el primer problema y el 70% el segundo. Sin embargo son problemas análogos.

En ambos casos se ha aprendido un algoritmo que parece funcionar exclusivamente en un campo muy delitimitado, por lo que la comprensión debe considerarse del todo insuficiente.

Veamos ahora el caso de un alumno que, a juzgar por el boletín de notas, es muy flojo. Sin embargo resulta que tiene comprensión. Acababa de estudiar la relación entre segmentos en un triángulo rectángulo y quería probar sus conocimientos con un problema geométrico cualquiera. Le dieron el siguiente problema:



En el rectángulo ABCD, $\overline{AB} = a\sqrt{2}$, $\overline{BC} = a$. Unimos A con C y B con el centro E de $\overline{DC}$. Demuestra que AC es perpendicular a BE y que BE divide al segmento AC en la proporción 2:1.

Resolvió el problema de la siguiente manera: Llamemos S a la intersección de AC y BE. En tal caso $\Delta ECS \approx \Delta BAS$ (dos ángulos iguales). La relación entre los lados equivalentes EC y AB es 1:2, por lo tanto también lo es la de $\overline{SC}$ y $\overline{SA}$. De esta manera queda solucionada la segunda parte del problema. Según el teorema de Pitágoras, $\overline{BE} = \sqrt{1\frac{1}{2}\,a^2}$. La reducción de esta forma le llevó mucho trabajo. Finalmente halló $\overline{BS} = \frac{1}{3}\,a\sqrt{6}$. Según el teorema de Pitágoras, $\overline{AC} = a\sqrt{3}$, por lo que $\overline{AS} = \frac{2}{3}\,a\sqrt{3}$. El cuadrado de $\overline{BS}$ es $\frac{6}{9}\,a^2$, el cuadrado de $\overline{AS}$ es $\frac{12}{9}\,a^2$, el cuadrado de $\overline{AB}$ es $2a^2$. Puesto que $\overline{BS}^2 + \overline{AS}^2 = \overline{AB}^2$, entonces S = 90°.

Si hacemos balance observamos los siguientes resultados:

a. El alumno tiene cierta comprensión del concepto de semejanza. Tras un año de estudio sabe aplicarlo en una nueva situación sin que se le haya dicho que podía usarlo.

b. El alumno sabe utilizar el teorema de Pitágoras para demostrar la existencia de un ángulo recto.

Veamos las lagunas:

a. Tiene dificultad con la reducción de raíces. No tiene la práctica suficiente con el algoritmo.

b. No indica qué teorema aplica cuando afirma que S = 90°. Por ello es muy posible que no distinga bien entre el teorema de Pitágoras y su inverso.

Se puede decir que el alumno realmente ha aprendido. Ha aprovechado las clases ya que es capaz de aplicar las enseñanzas en nuevas situaciones sin saber de antemano qué algoritmo tendrá que utilizar para llegar a la solución. Es posible que su inseguridad a la hora de trabajar con ciertos algoritmos sea la causa de que falle en los exámenes y que no saque buenas notas. Pero si se tuviera en cuenta que probablemente se trata de un alumno que llega lentamente a la exactitud deseada, es decir, un alumno para el que las valencias necesarias se forman muy despacio, se le tendría más aprecio que lo que dan a entender sus notas. También Mursell (II, pág. 91) insiste en que hay que tener paciencia a la hora de exigir exactitud.

En los siguientes ejemplos enseñaré la complicaciones de cálculo de un alumno que trabaja exclusivamente con algoritmos y la sencillez del cálculo del alumno que además entiende los elementos que aparecen en dichos algoritmos.

Se pide calcular log1'32 en la base 0'27. El primer alumno lo soluciona de la siguiente manera:

Para $\log_a b$ podemos escribir $\frac{\log_{10} b}{\log_{10} a}$, por lo que $\log_{0'27} 1'32 = \frac{\log 1'32}{\log 0'27}$. Para calcular el cociente de dos números puede usarse el esquema de logaritmos. Pero hay que saber si los números que aparecen en el cálculo son negativos o positivos. No se pueden tomar logaritmos de números negativos. En este caso el numerador es positivo porque los logaritmos de números superiores a 1 son positivos; el denominador es negativo porque los logaritmos de números entre 0 y 1 son negativos. Para poder tomar el logaritmo hay que trabajar con -log0,27. Así que calculamos la forma como $-\frac{\log 1'32}{-\log 0'27}$.

Digamos que la solución es x. Así pues $-x = \frac{\log 1'32}{-\log 0'27}$.

Esquema: log (-x) = log log1'32 - log (-log0'27)

log1'32 = …

log log1'32 = …

log0'27 = …

- log0'27 = …

- log (-log0'27) = …

log (-x) = …

-x = …

x = …

Se rellenan los números y el problema está solucionado.

El esquema está hábilmente montado pero hay que darse cuenta de que esta habilidad es la del profesor que le dio clase. El alumno se agarra con todas sus fuerzas a este esquema porque sabe que es su única posibilidad de solucionar el problema.

El segundo alumno halla la solución de la siguiente manera:

Se pregunta: ¿Qué significa logaritmo?

Respuesta: Si $\log_a b = x$ entonces $a^x = b$. En este caso $0'27^x = 1'32$. Al trabajar con potencias de 0'27 surgen problemas que no existen al trabajar con potencias de 10 puesto que las tablas de logaritmos permiten escribir cualquier número positivo como una potencia de 10. Así, $0'27 = 10^{0'431-1}$, $1'32 = 10^{0'121}$.

La pregunta adquiere la forma: $(10^{0'431-1})^x = 10^{0'121}$.

Según las propiedades de las potencias, (0'431 - 1)x = 0'121. Luego x es igual a 0'121 : (0'431 - 1) = 0'121 : (-0'569).

La solución de esta división puede hallarse bien directamente, bien mediante logaritmos. Con logaritmos queda de la siguiente manera:

0,121 = $10^{0'083-1}$, 0'569 = $10^{0'755-1}$; el cociente de 0'121 y -0'569 es, por tanto, $10^{0'083-1}$: (-$10^{0'755-1}$) = -$10^{0'328-1}$ = -0'213.

Los cálculos son iguales en ambos métodos. En el segundo caso al alumno le basta con un conocimiento mínimo de las propiedades de los logaritmos. Más aún, sólo necesita saber que los logaritmos son exponentes y seguir tratándolos como exponentes. Aparte tiene que darse cuenta de que la tabla de logaritmos le permite escribir cualquier número positivo como potencia de 10. La dificultad de que log0'27 es negativo no tiene ninguna repercusión en el segundo caso mientras que constituye la gran dificultad del primero. El segundo método es mucho más sencillo para aquellos alumnos que tienen comprensión de la esencia de los logaritmos.

Se puede afirmar que la elección entre uno u otro método viene impuesta por el profesor que lo ha enseñado, no por el alumno. Es cierto, pues si el profesor elige el primer método en vez del segundo, sólo se puede interpretar como que desconfía de las posibilidades de transferencia, incluso dentro del álgebra. Si evaluamos cuál ha sido el resultado del aprendizaje, sólo podemos decir que el alumno ha aprendido durante cierto tiempo a resolver problemas de este tipo y nada más.

Resulta interesante ver cómo un alumno que sólo tenía medio claro el algoritmo también fue capaz de solucionar el problema. Dijo: log0'27 es negativo. Si vuelvo a tomar el logaritmo obtengo el logaritmo de un número negativo. En tal caso se pone el menos delante y se restan todas las cifras después de la coma de 9, excepto la última que se resta de 10.

log0'27 = 0'431 - 1

- log0'27 = 0'569

Como se ve, 5 se obtiene restando 4 de 9, 6 restando 3 de 9 y 9 restando 1 de 10.

El alumno no fue capaz de aportar una explicación mínimamente razonable. Pero había llegado al resultado que se esperaba de él y en este caso bastaba. Por regla general un alumno que usa tales métodos acaba perdiéndose en sus propios algoritmos y debe interrumpir sus estudios de matemáticas[11].

Las grandes diferencias que existen en geometría entre las estrategias de resolución de problemas estriban en que parte del alumnado se basa fundamentalmente en estructuras contemplativas y otros no. Se suele decir que la utilización de estructuraciones del campo perceptivo que conducen rápidamente al objetivo obedece a una capacidad inventiva. Es posible. Pero en la mayoría de los casos que he podido observar el método era simple consecuencia de un proceso de aprendizaje. Daré un ejemplo:

Se plantea el siguiente problema: Los centros de los lados de un cuadrilátero cualquiera constituyen los vértices de un paralelogramo. Se pide la demostración del siguiente teorema: Los centros de los lados de un trapecio isósceles constituyen los vértices de un rombo.

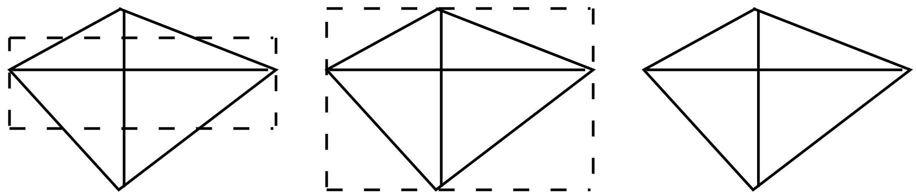
La intención radica evidentemente en que los alumnos vean que los lados del nuevo cuadrángulo creado son iguales a las mitades de las diagonales del trapecio isósceles. Estas diagonales son iguales y en consecuencia el cuadrilátero es un rombo. Así es como lo demuestran algunos alumnos. Sin embargo más de la mitad de los alumnos dibuja por los centros de los lados del trapecio líneas perpendiculares sobre los lados paralelos. Demuestran mediante el concepto de

[11] Kohnstamm escribe lo siguiente (I, pág. 14): " … el defecto más serio que tiene nuestra enseñanza de las matemáticas, la razón principal de las objeciones que se le hacen y la creciente impopularidad que sufre se deben al empeño en forzar a los alumnos hacia una exactitud para la que todavía no están preparados o quizá nunca lo estén".

congruencia que los centros de los lados del trapecio son a la vez los centros del rectángulo que se ha creado con las líneas auxiliares. Luego, es fácil deducir de la congruencia de los cuatro triángulos que el cuadrilátero formado por la unión de estos centros es un rombo. No se puede hablar de inventiva en este caso. Los alumnos saben que existe cierta relación entre todo trapecio y el rectángulo formado al trazar por los centros de los lados opuestos líneas perpendiculares sobre los lados paralelos. Han utilizado esta relación para demostrar que el segmento que une los centros de los lados opuestos es igual a la semisuma de los lados paralelos. Así pues, solucionan el problema con una estructuración conocida, algo que recuerdan mejor que un teorema cualquiera de una serie. La última solución es mucho más significativa que la primera para determinar si ha habido comprensión.

En una clase acaban de estudiar el teorema según el cual la superficie de todo triángulo es igual al producto de la base por la altura dividido por dos. Este teorema se demuestra dividiendo el triángulo con la línea de altura en dos triángulos rectángulos. Se sabe que el triángulo rectángulo puede considerarse como medio rectángulo. Luego se dice que existe un teorema según el cual la superficie de un cuadrilátero, cuyas diagonales son perpendiculares entre sí, es igual al producto de las diagonales dividido por dos. Se les pide a los alumnos que demuestren dicho teorema y se les da unos ochos minutos.

Más de la mitad halla la solución. La mitad de las soluciones consiste en dibujar por los centros de los lados líneas paralelas a una diagonal y líneas por dos de los vértices paralelas a la otra diagonal.

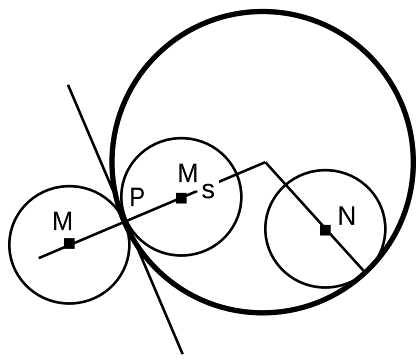


Dos alumnos solucionan el problema mediante líneas desde los vértices, paralelas a las diagonales. Algunos consideran el cuadrilátero como formado por dos triángulos con base común y otros lo consideran como compuesto por cuatro triángulos rectángulos. Estos últimos tienen grandes dificultades en llegar por el método algebraico a la solución correcta.

De estas soluciones se deduce que los alumnos trabajan más fácilmente con estructuras del campo perceptivo que con estructuras relacionadas con algoritmos.

He aquí un caso significativo de cómo se reelabora un problema hasta convertirlo en una estructura conocida:

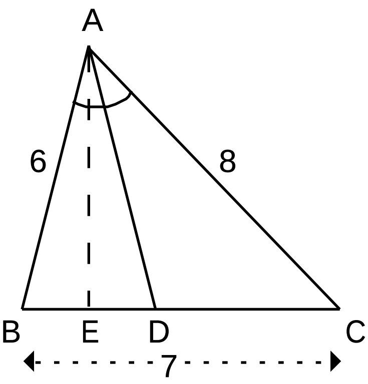
Se dan dos círculos M y N con idéntico radio y un punto P en el círculo M. Se pide que se construya un círculo que toque ambos círculos y que pase por dicho punto.



Hay dos soluciones: En la primera el círculo toca ambos círculos bien por fuera, bien por dentro; en la segunda solución toca un círculo por fuera y el otro por dentro. La primera solución la descubren siempre antes: el centro del círculo que se pide se halla, debido a la simetría, en la mediatriz de la unión entre los centros de los círculos dados. Asimismo se halla en la línea de unión entre el punto P y el centro M. Un alumno que ha hecho el examen final de bachillerato y que desea hacer el Curso de Orientación Universitaria halla la segunda solución después del siguiente razonamiento: "La primera solución era sencilla debida a la simetría producida. En la segunda solución esa simetría no se ve. Si simetrizamos el círculo M en la tangente por P a M se crea un círculo M_S, que forma junto con el círculo N y el círculo que se pide, una figura simétrica. De esta manera es posible hallar el centro con ayuda de una mediatriz". En este caso el alumno se ha basado en una estructuración del campo perceptivo.

El apego excesivo a los algoritmos puede llevar a soluciones inadecuadas. Veamos el siguiente ejemplo: Resuelve la ecuación $10^x = 3$. El alumno sigue este método: $x\log10 = \log3$, $x = \frac{\log3}{\log10}$, y luego tiene dificultades para hallar log10 en la tabla de logaritmos.

Un segundo ejemplo:



Dado un triángulo ABC, se sabe que $\overline{AB} = 6$ cm, $\overline{BC} = 7$ cm y $\overline{AC} = 8$ cm. Se pide calcular la bisectriz del ángulo A. El cálculo se efectúa siguiendo un método conocido: Se dibuja la altura desde A y se calculan los segmentos en que divide a $\overline{BC}$. Véase la figura.

$\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2 = \overline{EC}^2 - \overline{EB}^2$

$64 - 36 = (\overline{EC} - \overline{EB})(\overline{EC} + \overline{EB})$

$28 = (\overline{EC} - \overline{EB}) \times 7$

$\overline{EC} - \overline{EB} = 4$

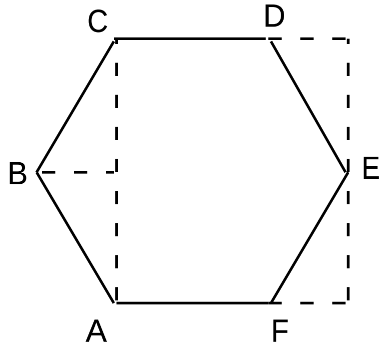
$\overline{EC} + \overline{EB} = 7$

Así pues, $\overline{EC} = 5\frac{1}{2}$ y $\overline{EB} = 1\frac{1}{2}$ cm.

La bisectriz divide a BC en segmentos en los que el lado AB es al AC como 3 es a 4. De lo que se deduce que $\overline{DB} = 3$ cm y $\overline{DC} = 4$ cm. Por lo que el segmento DE es igual a $1\frac{1}{2}$ cm. Los alumnos que tienen un apego excesivo a los algoritmos prosiguen con el cálculo de la altura $\overline{AE}$ utilizando el teorema de Pitágoras y después usan el mismo teorema para calcular la bisectriz $\overline{AD}$. Los alumnos que siguen mirando la figura observan que de la igualdad de $\overline{EB}$ y $\overline{DE}$ se puede deducir que $\overline{AD} = \overline{AB}$.

El tercer ejemplo es aún más significativo.

Constrúyase un cuadrado cuya superficie sea igual a la de un hexágono dado.



El método general enseña que todo hexágono puede transformarse en un pentágono con la misma superficie, este pentágono en un cuadrilátero, esta cuadrilátero en un triángulo, el triángulo en un rectángulo y finalmente el rectángulo en un cuadrado con la misma superficie. Se trata de un algoritmo que proporciona la solución para todos los problemas de este tipo. De hecho hay alumnos que seguirán este intrincado camino. Otros se basarán más en algoritmos algebraicos. Consideran el lado del hexágono igual a *a* y calculan que la superficie es igual a $1\frac{1}{2}a^2\sqrt{3}$. El lado del cuadrilátero se halla como la media aritmética de $a\sqrt{3}$ y $1\frac{1}{2}$ a. Los alumnos que se basan en estructuraciones del campo perceptivo llegarán fácilmente al siguiente método: Córtese ΔABC de la izquierda y vuélvase a añadir a la derecha. Se consigue así un rectángulo que, siguiendo la construcción conocida, puede convertirse en un cuadrado.

La ventaja de los dos primeros métodos es que los alumnos captaron enseguida la solución. Si los alumnos son capaces de aplicar la solución y ya no se preocupan de una posterior simplificación significa que hay una economía de pensamiento. Sin embargo se puede objetar que, por la misma regla de tres, podían haber pasado por alto la construcción. ¿Qué sentido tiene repetir automáticamente y por enésima vez unas acciones si la automatización tiene un valor dudoso? La acción muestra cierta economía de pensamiento pero ¿economía para qué? Hay que darse cuenta de que los dos primeros métodos tienen valor *teórico*, en particular cuando se trata de mostrar que con cualquier polígono es posible construir un cuadrado con la misma superficie.

En algunos casos la estructuración del campo perceptivo ofrece unos métodos de solución inaceptables según los códigos matemáticos. Véase un ejemplo:

Se da un cubo ABCD.EFGH. Demostrar que la diagonal AG es perpendicular al plano BDE.

Algunos alumnos llegan a la siguiente conclusión: Según la simetría, las aristas AB, AD y AE son equivalentes: se puede invertir el cubo de manera que AB ocupe el lugar de AD, AD el lugar de AE y AE el de AB. Así el plano BDE gira sobre sí mismo. Lo cual no sería el caso si este plano formara un ángulo agudo con la diagonal AG. Esta se quedaría en su lugar durante la inversión, mientras que el otro lado del ángulo agudo entre AG y el plano BDE giraría en el movimiento (describiendo un cono). La única posibilidad que queda es que AG sea perpendicular al plano BDE.

Esta solución demuestra una comprensión total de la estructura del cubo, el concepto de perpendicularidad y el concepto de ángulo entre recta y plano. Sin embargo esta solución es inaceptable al no hacer uso del sistema de teoremas puesto a disposición de los alumnos. Así vemos que a la didáctica se le encomienda una tarea específica. Si queremos que los alumnos hagan uso de sus estructuraciones del campo perceptivo, hay que darles esa posibilidad, bien incluyendo en el sistema de teoremas los que hacen referencia a la simetría, bien enseñándoles cómo se pueden "traducir" propiedades simétricas al lenguaje lógico del sistema de teoremas.

En los ejemplos anteriores hemos visto que una comprensión basada en estructuraciones del campo perceptivo y en general una comprensión basada en la percepción de los elementos de los algoritmos, conduce a una mayor fluidez en el hallazgo de soluciones. Esto a veces se debe a que el alumno se considera menos apegado a los algoritmos. Sin embargo aún quedan por ver dos diferencias importantes en el hábito y más concretamente en la manera en que este tipo de alumno intentará apropiarse de los algoritmos y en la manera como reaccionará si su conocimiento del algoritmo es imperfecto. Llamemos a este tipo de alumno "tipo estructurante", frente al "tipo algorítmico".

Un alumno del tipo estructurante captará rápidamente que para el conocimiento de determinado terreno sólo se precisa saber las reglas básicas del algoritmo. El resto viene solo. Al estudiar las propiedades de un cono circular intenta darse él mismo una definición basándose en estructuraciones contemplativas. Luego verifica en el libro si tiene razón. A continuación averigua qué teoremas definen el aspecto de dicho cono. Vuelve a mirar en el libro para ver si va bien. Mira qué otros teoremas da el libro, intenta demostrarlos él solo e intenta además profundizar en su significado.

Por supuesto que esto sólo ocurre con alumnos inteligentes. Sin embargo para ellos significa un método muy útil y eficaz. Acaban pronto, tienen la certeza de que dominan el algoritmo y además han tenido la oportunidad de asimilar la materia de forma crítica. Es típico de estos alumnos que a menudo siguen utilizando definiciones propias y que trabajan con algoritmos propios. Sólo suelen abandonar estas definiciones y algoritmos después de un penoso sopesar de los pros y los contras.

El convencimiento de que si se conocen los elementos de un algoritmo éste se puede deducir de aquéllos suele ser la causa de que los alumnos del tipo estructurante no dominen muy bien los algoritmos. No son muy buenos calculadores y esto puede tener serias consecuencias: los profesores que dan gran importancia a la inteligencia constatan a veces que los alumnos, en los que tenían grandes esperanzas, fracasan al fallar en operaciones sencillas.

El alumno del tipo estructurante suele dominar materia de un nivel superior y en consecuencia es capaz de aportar soluciones sorprendentes. Sin embargo su sentido crítico le puede jugar malas pasadas. Puede ser que vea dificultades que el profesor ni siquiera haya vislumbrado. Puede ser que con los resultados de los problemas sea más exigente de lo que el ejercicio pretende. Puede ser que se ponga a profundizar en la validez general de su método cuando no se le pide. En matemáticas se hacen muchas convenciones obligatorias del tipo: demostrar todo lo que se afirma; dibujar todo con regla y compás; explicitar todo dibujo. Pero no se suele ser muy estricto con estas convenciones cuando se pretende ganar tiempo. Los alumnos algorítmicos tomarán la desaparición de estas reglas como un nuevo algoritmo mientras que los del tipo estructurante se volverán a acordar de estas reglas cuando no toca y se volverán a considerar vinculados por ellas.

Se conocen los casos en que los algoritmos no funcionan bien porque se han estudiado sin la suficiente cohesión. Los alumnos suelen emplear en tal caso un algoritmo erróneo o incluso uno sucedáneo que han inventado.

Tomemos como primer ejemplo la *simplificación de quebrados:* es difícil entender la regla según la cual el quebrado no cambia si dividimos el denominador y el numerador por el mismo número. El alumno la sustituye por su propia regla según la cual en el denominador y el numerador se pueden *tachar* números iguales.

Así el quebrado $\frac{a + b}{a + c}$ se sustituye por $\frac{b}{c}$. Cuando nos encontramos este error no podemos afirmar que el alumno desconoce la teoría. Es posible que el tachar se haya convertido en una acción automática, que la supresión de números iguales arriba y abajo de la raya no sea otra cosa que una acción de valencia. Pero también podría ser que la base racional haya desaparecido del todo. En tal caso el alumno sólo retiene de la corrección que está prohibido tachar cuando el quebrado contiene signos + o -. Se vuelve a liar cuando tiene que simplificar quebrados del tipo: $\frac{ab + ac}{b^2 + bc}$. De la explicación que se le da después sólo retiene que para simplificar quebrados los tiene que descomponer primero. Puesto que no sabe muy bien lo que significa descomponer llega a resultados muy extraños en situaciones donde no es posible descomponer: $2a + 3b = 5ab$ (ver Morrison, pág. 245).

Tomemos como segundo ejemplo la *resolución de ecuaciones:* A veces no entienden la regla según la cual una ecuación mantiene las mismas raíces si se dividen, suman o restan de ambos miembros un mismo número. En lugar de esta regla crean la de "pasar al otro lado". La ecuación

$3x + 5 = 2x - 1$ se convierte en

$3x = 2x - 1 - 5$ al pasar +5 con el signo inverso hacia el otro lado. No hay que considerarlo como grave: es la explicitación de una acción de valencia que surge sola después de resolver muchas ecuaciones. La ecuación $a(x + 3) = 2$ se convierte en $x + 3 = \frac{2}{a}$ al pasar el factor *a* hacia el otro lado. Esta vez, sin embargo, ocurre poniendo *a* en el denominador. Es otra vez una acción de valencia que se crea. El profesor no puede contrarrestar este proceso y sería discutible que lo hiciera si ello fuera posible. Es evidente que esta manera de actuar da origen a equivocaciones si se trabaja con sumas de productos. Para que ambas operaciones funcionen bien al mismo tiempo es aconsejable que los alumnos refresquen los fundamentos racionales de dichas operaciones. El buen funcionamiento de estas dos operaciones tan diferentes, aunque tan similares en apariencia, se puede mejorar practicando problemas sencillos con letras, como:

Resuelve:

1. $x + a = bx + c$,

2. $ax + b = cx + d$,

3. $\frac{x + a}{b} = \frac{cx}{d}$,

etc. Estos ejercicios también producirán una autonomía pero ésta se habrá alcanzado de manera racional.

CAPÍTULO VIII

POSIBILIDADES DE APLICAR LAS MATEMÁTICAS EN OTRAS ASIGNATURAS

Las matemáticas se pueden aplicar en muchas ciencias. Muchos alumnos se las vuelven a encontrar después del examen final en otros campos científicos. Aunque realmente ya ocurre en el instituto cuando se aplican las matemáticas en física, química, mecánica, o en comercio. Por ello es importante analizar cómo funcionan las matemáticas lo mejor posible en otras ciencias.

Resulta curioso que mientras, por un lado, el mal funcionamiento de las matemáticas en otros campos constituye una gran preocupación, se le preste tan poca atención cuando se elaboran las programaciones. Es cierto que a veces se recomienda que se dé cierta parte de las matemáticas antes de empezar con la mecánica; se recomienda cierto margen de tiempo al estudiar el cálculo diferencial porque sino pueden surgir problemas en física. Pero la primera pregunta que cabría hacerse es: ¿cómo funciona un algoritmo en matemáticas y cómo funciona ese mismo algoritmo en otro campo? Es una pregunta que no se suele plantear.

En una reunión de profesores de primer ciclo de formación profesional se intentó establecer una programación en que las distintas asignaturas estuvieran bien interrelacionadas. Resultó muy difícil averiguar cómo funcionaba el álgebra en otras asignaturas. Y eso que se trataba de un tipo de enseñanza muy enfocada hacia la práctica, donde se pretende estudiar sobre todo aquella parte del álgebra necesaria en otras asignaturas. Pero por lo menos aquellos profesores intentaron solucionar el problema de la transferencia, se sentaron a la mesa para intentar comprender los métodos recíprocos y llegar a un máximo de tranferencia. La "comisión Faber", que fue la primera en hacer una programación para la enseñanza técnica con estos criterios de cooperación, llevó hasta sus últimas consecuencias la "vinculación horizontal" entre las asignaturas. Sin embargo la práctica demostró que esto es insuficiente: la propia vinculación vertical de cada asignatura se vio perturbada y la cohesión interna de los temas quedó trastocada (Vollenbergh en Comunicaciones 2 de la Comisión de Trabajo para el R.K.L.T.O.[12] para chicos de 1956).

En bachillerato no existen estas colaboraciones. De vez en cuando se busca alguna solución a nivel horizontal pero casi nunca se analiza cómo los conocimientos adquiridos en una asignatura podrían funcionar en otra. Por todo ello tenemos que empezar considerando que estas dificultades de transfer se deben a una falta de organización.

Sin embargo hay más. Cuando un profesor de química o física quiere aplicar las matemáticas en su asignatura pretende que los alumnos dominen ciertos algoritmos. Pero ya vimos en el capítulo anterior que los algoritmos que más rápidamente se dominan son aquéllos que van enfocados a una situación concreta. Esto significa para el caso de las matemáticas situaciones específicamente matemáticas. Si queremos que el alumno use con la misma rapidez estos algoritmos en física o química tendremos que enseñarle algoritmos para situaciones específicas de física o química. Es muy difícil que esto se lleve a cabo en clase de matemáticas y aún así nos podríamos preguntar si sería conveniente.

Para terminar: hay una serie de algoritmos que se suelen evitar en matemáticas porque resultan poco prácticos o superfluos. Y son precisamente estos los algoritmos que suelen aplicar los profesores de otras asignaturas a pesar de que tampoco resultan muy apropiados en estos terrenos. Intentaré ilustrar estas dificultades en una serie de ejemplos:

[12] R.K.L.T.O. = Primer ciclo de la Enseñanza Técnica Católica (N. del T.).

En una clase de física se pretende deducir la fórmula para la expansión de una barra. Se sigue el siguiente método:

Una barra de 1 cm a 0° se expande por calentamiento a 1° en α cm, por lo que una barra de L_0 cm a 0° se expande por calentamiento a 1° en $L_0\alpha$ cm, y una barra de L_0 cm a 0° se expande por calentamiento a t° en $L_0\alpha t$ cm. Vemos pues que una barra que a 0° tiene una longitud de L_0 cm se ha expandido a t° en $L_0\alpha t$ cm. Si representamos la longitud a t° por L_t, tenemos:

$L_t = L_0 + L_0\alpha t$ ó $L_t = L_0(1 + \alpha t)$.

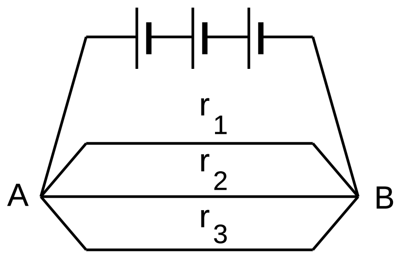
De las fórmulas $L_{t2} = L_0(1 + \alpha t_2)$ y $L_{t1} = L_0(1 + \alpha t_1)$ se saca, por eliminación de L_0:

$$L_{t2} = L_{t1}\frac{1 + \alpha t_2}{1 + \alpha t_1}.$$

Observamos que en las seis primeras líneas no se ha aplicado el álgebra. Todas las conclusiones se basan en consideraciones físicas. En este momento se llega a la operación $L_t = L_0 + L_0\alpha t$, una suma, que aún tiene el significado físico de expansión, y justo a continuación: $L_t = L_0(1 + \alpha t)$. Esta es una reducción algebraica y es precisamente la que ofrece dificultades. Lo cual es perfectamente comprensible puesto que el problema algebraico "reduce ab + a" es un atascadero típico incluso en álgebra. ¿Realmente es tan evidente que a los alumnos se les ocurra pensar en ab + a 1? Para mayor fastidio de los alumnos, resulta que la siguiente eliminación de L_0 tampoco es tan sencillita. Y es que, por mucho que los alumnos entiendan las operaciones de eliminar, siempre se refieren a eliminaciones de un L_0 determinado de dos relaciones en que aparecen un L_{t1} y un L_{t2}. Sin embargo el resultado de la eliminación ha de interpretarse como una relación funcional. La fórmula tiene esa operatividad. Estas deducciones de relaciones funcionales también aparecen en matemáticas aunque mucho más tarde que en física.

Cuando, después, en física se deduce también la fórmula $L_{t2} = L_{t1}[1 + \alpha(t_2 - t_1)]$, surgen otras dificultades. La deducción no sólo es diferente sino que además el resultado es un nueva fórmula. Si los alumnos quieren comprender qué es lo que ocurre, deberán fijarse en el grado de exactitud de los datos de que disponen. El algoritmo que se necesita se puede estudiar en clase de matemáticas aunque el contexto sea totalmente físico. Esto implica, o bien, que el algoritmo se tiene que estudiar en matemáticas cogiendo ejemplos físicos, o bien, que se debe desarrollar íntegramente en clase de física.

El segundo ejemplo de la física se refiere a la conexión en paralelo de corrientes eléctricas.



Los puntos A y B están conectados con una batería mediante un cable de alimentación y otro de descarga, respectivamente. Entre A y B hay tres conductores con resistencias respectivas r_1, r_2 y r_3, con lo cual por estos conductores fluyen las corrientes respectivas i_1, i_2 e i_3. Se pide la relación entre i_1, i_2 e i_3 si se conocen r_1, r_2 y r_3 y además la resistencia de sustitución, que pueda sustituir las resistencias conectadas en paralelo de tal manera que deje pasar la misma corriente que el conjunto de los ramales en paralelo.

Para el cálculo se supone que entre A y B existe una diferencia potencial de V_{AB}. En tal caso: $i_1 = \frac{V_{AB}}{r_1}$, $i_2 = \frac{V_{AB}}{r_2}$ e $i_3 = \frac{V_{AB}}{r_3}$.

El profesor de física suele deducir: $i_1 : i_2 : i_3 = \frac{1}{r_1} : \frac{1}{r_2} : \frac{1}{r_3}$. Es decir que las intensidades de las corrientes son inversamente proporcionales a las resistencias en los distintos ramales.

Puede que este razonamiento tenga sentido en física; no apela a ningún procedimiento matemático. En matemáticas ya se había deducido de la relación $i_x r_x = \text{cte.}$ o de: $i_x = \frac{\text{cte.}}{r_x}$ que existía una proporcionalidad inversa.

Para calcular la resistencia de sustitución r_v el profesor de física sigue este razonamiento: $i_1 + i_2 + i_3 = \frac{V_{AB}}{r_1} + \frac{V_{AB}}{r_2} + \frac{V_{AB}}{r_3}$, de lo que se deduce: $\frac{1}{r_v} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}$.

Esta reducción es efectivamente la más rápida. Pero si el profesor desea que sus alumnos la comprendan mejor tendrá que darle una forma matemática. De la siguiente manera: en base a consideraciones físicas, $i_1 r_1 = i_2 r_2 = i_3 r_3 = (i_1 + i_2 + i_3) r_v = V_{AB}$. Para llegar a la relación deseada entre r_1, r_2, r_3 y r_v hay que eliminar de estas relaciones i_1, i_2, i_3 y V_{AB}. De paso observamos que el problema considerado desde el punto de vista matemático dista de ser sencillo. Se encuentra más rápidamente la solución por el camino físico si se piensa en el concepto de conductividad.

En algún caso concreto el alumno con inclinaciones matemáticas no tendrá que echar mano de estas fórmulas. Veamos el siguiente problema (Krans en Vrij, Física sencilla, II):

> "Una corriente de 7'5 A se bifurca en cuatro ramales con una resistencia respectiva de 1, 2, 3 y 4 ohmios. ¿Qué intensidad tiene cada uno de estos ramales? ¿Qué diferencia de potencial existe entre el punto inicial y el final de esta bifurcación?

Solución: Llámense las intensidades en los cuatro ramales respectivamente i_1, i_2, i_3 e i_4; en tal caso $i_1 + i_2 + i_3 + i_4 = 7'5$ A e $i_1 = 2i_2 = 3i_3 = 4i_4$. Pongamos que $i_1 = 12p$, entonces $i_2 = 6p$, $i_3 = 4p$ e $i_4 = 3p$, de lo que se deduce que $25p = 7'5$. Así pues, $p = 0'3$ e $i_1 = 3'6$ A, $i_2 = 1'8$ A, $i_3 = 1'2$ A e $i_4 = 0'9$ A. La diferencia de potencial que se pide es igual a $i_1 = 3'6$ V.

De esta manera la utilización de estas fórmulas conduce a un algoritmo que no tiene una relación directa con algoritmos matemáticos.

El tercer ejemplo físico ilustra una aplicación del cálculo integral.

Se quiere determinar la energía de una carga no-pequeña sobre un conductor. Para ello se observa primero que la energía de una carga Δq muy pequeña, que se lleva sobre un punto de un campo eléctrico con potencial V, es igual a $\Delta q\ V$. Pero esto sólo es correcto si se admite que Δq es tan pequeño que por sí sola no ejerce ninguna influencia sobre el campo. El potencial V se determina por la carga que ya se encuentra en el conductor. Se expresa mediante la fórmula $V = \frac{q}{C}$. Puesto que el incremento de energía ΔW es igual a $\Delta q\ V$, la energía total de la carga se calculará mediante la integral: $W = \int_0^Q V dq = \frac{1}{C}\int_0^Q q dq = \frac{1}{C}\left(\frac{1}{2}q^2\right)_0^Q = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$. Q representa la carga total que se lleva sobre el conductor.

Esta resolución será muy sencilla si los alumnos dominan el algoritmo de las integrales. Sin embargo se puede discutir qué utilidad tiene todo esto. Sabemos que los alumnos no conocen mucho más de las integrales que el algoritmo. Ignoran lo que realmente están haciendo. Muchos miembros de tribunales de exámenes finales llegan incluso a decir que no les interesa que los alumnos demuestren su pericia en el cálculo diferencial o integral, que "no son más que truquitos enseñados". En efecto, la deducción que hemos visto, y que no supone otra cosa que la estricta aplicación del algoritmo, usurpa el lugar del conocimiento físico. El hecho de que exista una gran correspondencia entre la energía de un conductor cargado y la de un muelle tensado, la posibilidad de ver esto, queda oscurecida por la aplicación del algoritmo.

De ahí que podríamos plantearnos si no sería más importante para la física impedir que el aparato matemático crezca demasiado. Así se evitaría que los profesores de física, que se sientan inclinados hacia ello, intenten suplantar el conocimiento físico con algoritmos matemáticos.

Cojamos un ejemplo de las clases de geografía. Se les dice a los alumnos que la altura del polo de un lugar de la tierra es igual a la anchura geográfica de ese lugar. Esto se demuestra con esta figura. Se usa el teorema según el cual dos ángulos se complementan cuando los lados de un ángulo son perpendiculares a los del otro. Sin embargo es la primera vez que los alumnos ven este teorema. Es evidente que en tal caso la demostración podría darse igual de bien sin recurrir al teorema en cuestión.

En química se usan muchos algoritmos que en matemáticas se considerarían impracticables. La mayoría se basa en la teoría de la proporcionalidad, una teoría que en matemáticas cada vez se está considerando más superflua. Los problemas del tipo: Calcula *x* si (x - 2) : (x - 4) = x : (x - 3), se pueden considerar como ecuaciones en que aparecen quebrados. Son tres magnitudes interrelacionadas *a, b* y *c*, que se pueden equiparar a ax, bx y cx. Así se despacha de un plumazo la teoría de la proporcionalidad.

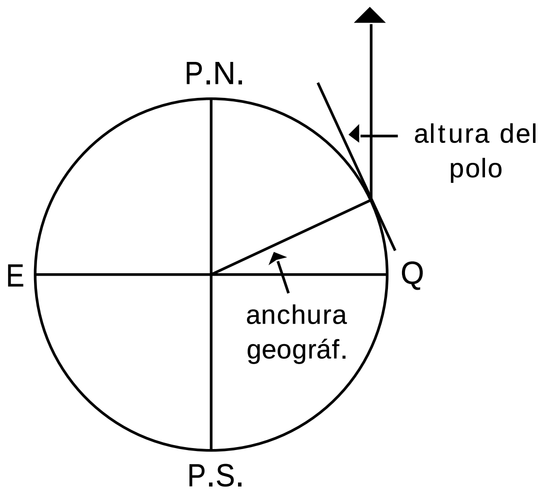
Daré a continuación la solución del problema de química del examen final del H.B.S.-B (ver nota 3) de 1952 para demostrar que es posible prescindir de esta teoría. El enunciado dice:

a. El análisis completo de un ácido orgánico débil, cuya valencia (basicidad) es desconocida, sólo muestra carbono e hidrógeno. La combustión de 0'528 g de este ácido produce 1'056 g de dióxido de carbono y 0'432 g de agua. ¿Cuál es fórmula proporcional del ácido?

b. Al disolver 0'359 g del ácido débil a que hace referencia el enunciado *a*, se necesita 27'2 ml de solución 0'15 normal de hidróxido de sodio en agua para disolverlo. ¿Cuál es el peso de 1 equivalente-gramo del ácido?

c. En circunstancias en las que 1 litro de oxigeno pesa 1'31 g, el peso de 73'2 ml del vapor del ácido es de 0'264 g. ¿Cuál es el peso molecular del ácido?

d. Di todo lo que se puede concluir acerca de la fórmula estructural y el nombre del ácido combinando los resultados obtenidos en *a, b* y *c.*



Pesos atómicos: H = 1; C = 12; O = 16.

Solución: *a.* Supongamos que el peso de 1 átomo de H es igual a *h* mg y que en 528 mg de ácido se hallan *n* moléculas. Supongamos además que la fórmula del ácido es $C_xH_yO_z$.

Entonces: 1056 = 44nxh, 432 = 9nyh, por lo que $x = \frac{24}{nh}$, $y = \frac{48}{nh}$. El peso del C que se encuentra en los 528 mg de ácido es 12xnh = 288 mg; el peso del H es ynh = 48 mg, y el del O el resto, es decir, 16znh = 192 mg. De lo que se deduce que $z = \frac{12}{nh}$. La fórmula proporcional del ácido es C_2H_4O.

b. 27'2 x 0'15 equivalentes-mg. del ácido = 359 mg.

O sea, 1 equivalente-mg. es igual a $\frac{359}{27'2 \times 0'15} = 88$ mg.

1 equivalente-g. es 88 g.

c. Supongamos que en esas circunstancias se hallan *p* moléculas en 1 litro de oxígeno; entonces 32ph = 1310. Supongamos además que el peso molecular del ácido es M, entonces 0'0732pMh = 264. De estos datos se deduce que $0'0732 \times \frac{1310}{32} \times M = 264$, de lo que se infiere que M = 88'1.

d. Según *a*, la fórmula del ácido es: $C_{2z}H_{4z}O_z$, con un peso molecular de 44z. Según *c*, 44z = 88'1, luego z = 2. La fórmula del ácido es $C_4H_8O_2$, se trata de un ácido monobásico. Por ello debe ser ácido propánico-carbónico 1 ó 2.

Segundo ejemplo: Durante mucho tiempo se ha dudado si el elemento Be era bivalente o trivalente y por ello era difícil determinar con exactitud el peso atómico del Be a partir de un análisis de clorito de berilio con un contenido de cloro al 88'75%.

¿Cuál será el peso atómico del Be en el que caso de que sea bivalente y en el caso de que sea trivalente?

Más tarde se consiguió determinar la densidad del vapor de clorito de berilio hallando que era 40. ¿Cuál es el peso atómico exacto y la valencia del Be? H = 1; Cl = 35'5 (H.B.S., 1935).

Solución: Supongamos que el peso de un átomo de hidrógeno es igual a *h*, y el peso atómico del Be igual a A. Según los datos, en 100 mg de clorito de berilio tenemos 88'75 mg de Cl y 11'25 mg de Be, Con lo que hay $\frac{88'75}{35'5h}$ átomos de Cl y $\frac{11'25}{Ah}$ átomos de Be. Si Be es bivalente entonces $\frac{88'75}{35'5h} = 2 \times \frac{11'25}{Ah}$, de lo cual se calcula que A = 9. Si, en cambio, Be es trivalente entonces $\frac{88'75}{35'5h} = 3 \times \frac{11'25}{Ah}$, y sale A = 13'5.

En el primer caso el peso de una molécula de clorito de berilio es igual a 80h y en el segundo caso igual a 120h. El primer peso se corresponde con la densidad de vapor 40 del enunciado. Se concluye que el berilio es bivalente y que tiene un peso atómico de 9.

Estos ejemplos demuestran lo siguiente: las proporcionalidades se pueden dejar completamente fuera de la enseñanza de la química. Así de paso tenemos la ventaja de que los métodos de resolución se ajustan mejor a la teoría; a los alumnos les costará mucho más ocultar la falta de comprensión que aprendiéndose los algoritmos de memoria.

Sin embargo es posible que los alumnos se encuentren en clase de química con problemas matemáticos que no han estudiado en clase de matemáticas.

Supongamos que, siguiendo el primer ejemplo, hallamos un compuesto orgánico de C, H y O, es decir, con la fórmula $C_xH_yO_z$. Pero supongamos en este caso que el alumno ha hallado $x = \frac{8'8}{nh}$, $y = \frac{15}{nh}$, $z = \frac{5'9}{nh}$. Para llegar en este caso a la fórmula proporcional del compuesto, el alumno deberá hallar tres números enteros que reflejen lo mejor posible la proporción de *x, y, z.* Por regla general se suele hallar la solución expresando todas las magnitudes en función de la más pequeña, es decir, en este caso, x = 1'49z, y = 2'54z. Con algo de buena voluntad se puede suponer que z = 2 y redondear 1'49z hasta 3 y 2'54z hasta 5, consiguiendo la fórmula $C_3H_5O_2$. Es imposible preparar bien este algoritmo en las clases de matemáticas ya que carece de sentido si no está en un contexto químico.

Espero que todos estos ejemplos hayan mostrado que las dificultades que se producen al aplicar las matemáticas a otras asignaturas como la física, la química u otras, se deben a las siguientes circunstancias:

a. El profesor quiere utilizar unos algoritmos distintos de los que el alumno ha aprendido en clase de matemáticas.

b. El profesor utiliza algoritmos que no son muy eficientes.

c. Al igual que a veces ocurre en matemáticas, se intenta en algunas asignaturas compensar una carencia de diferenciación del campo perceptivo o mental con el aprendizaje de algoritmos.

La causa de estas dificultades se debe a una falta de coordinación entre los profesores que dan asignaturas exactas. Parece ser que esta coordinación es muy difícil. Sería bueno saber si tendría sentido alguna coordinación más localizada. Con ello se resolvería el problema *a* pero no los *b* y *c*. Estos dos remiten a unos usos que se han ido asentando históricamente. El pretender cambiarlos equivaldría a cuestionar el sentido y los objetivos de la enseñanza de las ciencias exactas. En este sentido se puede hacer bien poco en un ámbito reducido.

A veces se intenta superar el abismo entre física y matemáticas dándole más énfasis en álgebra a ecuaciones camufladas. Estos intentos han tenido hasta ahora poco éxito sobre todo porque es muy difícil elaborar problemas que tengan un mínimo de sentido común. Supongamos que hay que solucionar el siguiente problema: "Un padre promete a su hijo 500 florines para el día en que éste tenga la mitad de años que el padre. El padre tiene ahora 35 años y el hijo 10. ¿Dentro de cuántos años recibirá el hijo el dinero?" Algo aprenderán los alumnos con este problema. Deberán pensar durante mucho tiempo para llegar a la conclusión de que la constante dominante del problema es la diferencia de edad entre padre e hijo. Cuando los alumnos se hayan adentrado suficientemente en este problema podremos esperar de ellos que otros problemas de este tipo les cuesten menos tiempo.

Es difícil determinar qué problemas físicos se ajustarían a la experiencia que se adquiere con un problema de este tipo. Lo mismo se puede decir de los demás problemas: grifos que gotean, trenes que se encuentran o se adelantan, mezcladores de agua o de vino. Todos estos problemas suelen remitir a magnitudes que han de considerarse centrales. La resolución de estos problemas puede ser útil para aprender a descubrir o reconocer dichas magnitudes pero tiene poco sentido el aprender a solucionarlos (Mursell, pág. 190 y Morrison, pág. 250). Los problemas tienen que remitir a situaciones reales además de parecer importantes a los ojos del alumno (Mursell, pág. 192). Si tenemos en cuenta estas últimas condiciones encontramos más fácilmente buenos problemas en álgebra y geometría que en estos problemas camuflados. Incluso hay cantidad de problemas físicos que son mucho más apropiados.

Veamos qué podemos esperar de los tipos de alumnos; el tipo algorítmico y el tipo estructurante, al aplicar las matemáticas a la física o la química.

El alumno algorítmico tendrá pocos problemas para adaptarse a los nuevos algoritmos físicos y químicos debido a su predisposición más receptiva. No hay que esperar que por sí solo halle el algoritmo que corresponda a una situación física o química concreta, y mucho menos que descubra en qué medida difieren los algoritmos físicos y químicos, por su carácter específico, de los que ha estudiado en matemáticas.

Cuando se enfrente a la fórmula de la relación entre distancia del objeto y de la imagen en los espejos cóncavos, $\frac{1}{b} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f}$, basará todos sus cálculos en la teoría de los quebrados, tal como le enseñaron en la escuela. Sin embargo se olvida completamente de que en álgebra ha estudiado la relación funcional entre *b* y *v* cuando se vió la ecuación (x - a) (y - b) = c. Tampoco es que se le ponga muy fácil ya que la otra expresión de esta relación: $(v - f)(b - f) = f^2$ no suele aparecer nunca en clase de física. Pero incluso en el caso de que se diera, es muy poco probable que el alumno descubra la correspondencia entre ellas: el simple hecho de que las variables ya no se llamen *x* o *y* ya le rompe el esquema (Mursell II, pág. 197).

Las posibilidades de que el alumno algorítmico triunfe o falle en física o química dependerán en gran medida de lo que se le exija. Si la asignatura tiene un enfoque marcadamente matemático, si se hacen muchos problemas de un determinado tipo muy reconocible, si se le pide al alumno que reproduzca razonamientos teóricos, será fácil que cause una buena impresión. En las "preguntas-comprensión" referidas a los algoritmos, demostrará tener comprensión. Su campo mental está bien estructurado por lo que se refiere a los algoritmos. Pero si en cambio se le hacen preguntas que apelen a una comprensión de tipo físico o químico, nos podemos encontrar con pobres resultados. Lo característico de una persona algorítmica es que su comprensión se basa en una estructuración que tiene como objetos las unidades simbólicas, mientras que desconoce la relación que tienen estos símbolos con el mundo de las experiencias. Es precisamente esta limitación la que impide una comprensión propiamente física o química.

La situación es exactamente la inversa para un alumno del tipo estructurante. Su predisposición le empuja mucho más hacia el mundo de las experiencias. Captará enseguida las preguntas que apelen a una comprensión de tipo físico o químico. Sin embargo cuando llegue a los algoritmos cambiará la cosa. En primer lugar, el hecho de que los algoritmos se refieran ahora a objetos distintos, le hará dudar a la hora de aplicarlos en estos nuevos terrenos. Y su duda tiene fundamento: las operaciones matemáticas que se realizan en física *ya* no son las mismas. *Siempre* aparecen números aproximados: no tiene sentido distinguir entre los racionales y los irracionales. Las letras que aparecen en física y química casi siempre suelen indicar números nombrados. En la fórmula E = ir, la E representa una cantidad de voltios, la *i* el número de amperios, la *r* el número de ohmios. La cosa a veces es aún más general y se omite decir en qué unidades se expresan las magnitudes. En tal caso E representa una fuerza electromotriz, *i* la intensidad de una corriente, *r* una resistencia, con la simple condición añadida de que, en caso de expresar estas magnitudes en unidades, debe ser en unidades correspondientes.

Cuando en matemáticas se usa el cálculo diferencial, se suele tratar con cocientes diferenciales y muy raramente con cocientes de diferencias. En física no aparecen cocientes diferenciales, sólo cocientes de diferencias. Sin embargo se trabaja con cocientes diferenciales porque simplifican bastante las fórmulas (Van Dantzig I). Dicho de otra manera: Los algoritmos que la física presta a las matemáticas son distintos en su propia esencia y deben volverse a practicar. No porque los alumnos hayan olvidado cómo funcionan, sino porque dudan en transferirlos sin más, lo cual sería efectivamente injustificado. Sólo se podría trabajar tranquilamente con algoritmos matemáticos en física teórica, donde los fundamentos se hallan axiomatizados, pero … la física teórica en realidad no es más que una variante de las matemáticas.

Al comentar el caso de los alumnos estructurantes hemos visto que no muestran gran tendencia a adueñarse de algoritmos. Muchas veces cuentan con que el conocimiento de los fundamentos teóricos les ayudará sin que tengan que practicar demasiado los algoritmos. Y es precisamente en física y química, donde hay vínculos tan fuertes con el mundo de las experiencias, donde mejor les sale la jugada. En el caso de alumnos muy críticos es muy posible que no sean muy rápidos en los cálculos físicos o químicos debido a la constante contrastación de sus resultados con el mundo de las experiencias.

Todas estas características las suelen apreciar los profesores de física y química. Esta apreciación suele ser más alta en éstos que en los profesores de matemáticas. Los propios alumnos se sienten más atraídos hacia las ciencias que hacia las matemáticas. He visto cómo muchos de estos alumnos han culminado estudios científicos y técnicos, aunque todo indicaba que habrían tenido el mismo éxito con estudios matemáticos.

CAPÍTULO IX

VALOR FORMATIVO DE LAS MATEMÁTICAS

Preguntarse si las matemáticas tienen valor formativo equivale a preguntarse cuál es el alcance de la comprensión matemática. Se trata de descubrir si las nuevas situaciones en que el niño es capaz de actuar adecuadamente, es decir, en que sabe aplicar los métodos que ha aprendido estudiando matemáticas, también pueden ser de índole no matemática.

Al hablar del valor formativo nos referimos, en líneas generales, a la cuestión formulada por Stellwag (II, pág. 165): "Cuando se aprende algo, esta cosa específica que se aprende ¿sólo se aprende o ocurre algo más, algo que deja sentir su influencia sobre otros terrenos del conocimiento y que debe valorarse más que lo estrictamente aprendido y que aquello que se pretendía al estudiar esta parte específica?"

Kohnstamm (I, pág. 20) se refiere explícitamente a la estrecha relación entre valor formativo y comprensión. Entre otras cosas escribe: "… lo que se entiende por valor formativo no es en modo alguno cierto grado de conocimiento, sino la adquisición de la comprensión, que es la consecuencia de cierto esfuerzo". Y sigue: "*La* cuestión central de la didáctica científica moderna radica en una distinción clara entre “comprensión” y “práctica”".

No es de extrañar que la cuestión del valor formativo suele surgir en torno a las matemáticas y las lenguas clásicas. Probablemente es debido a que los alumnos de matemáticas y lenguas clásicas sólo en contadísimas excepciones llegarán a usar en la práctica o en sus estudios posteriores la materia específica que han estudiado. El lugar importante que ocupan estas asignaturas en las programaciones radica más bien en su importante valor formativo; en el caso contrario tendremos que aceptar que muchos alumnos sólo las estudian "porque tienen muchas salidas", lo que equivale a decir que más tarde podrán hacer una elección a resultas de la cual gran parte de lo que habían aprendido será inservible.

Cuando en 1937 E.W. Beth publicó un informe del trabajo del Grupo de Matemáticas del Colectivo para la Renovación de la Enseñanza y la Educación acerca del "Objetivo y sentido de la enseñanza de la geometría" (I), todos los profesores integrantes del grupo estaban de acuerdo en que *el objetivo de la geometría en nuestras escuelas es contribuir a la formación intelectual.* En algún pasaje aislado aparece el concepto utilitario, según el cual la geometría se necesita como ciencia auxiliar para la física y la técnica, pero no profundizan más. Llegan a dos importantes conclusiones:

Conclusión I: El objetivo (sentido) de la enseñanza de la geometría radica en:

a. la educación del intelecto, la formación intelectual,

b. el valor pedagógico-ético y estético,

c. su significado socio-cultural.

Conclusión IV: El estudio de la geometría es deseable *para todos*, indistintamente del camino profesional que sigan en el futuro.

Resulta interesante observar a la luz de todo esto la polémica, de fecha más reciente, entre T. Ehrenfest-Afanassjewa y H. Freudenthal: "¿La enseñanza de las matemáticas puede contribuir a la educación de la facultad mental?" La primera frase de la Sra. Ehrenfest ya indica el cambio de la situación:

"Antes se consideraba evidente que esta pregunta se respondiera afirmativamente. Sin embargo más tarde han surgido dudas, debidas particularmente a los decepcionantes resultados de muchos alumnos que habían estudiado con cierta profundidad las matemáticas en el instituto".

Así es como expresa su opinión acerca del significado de las matemáticas:

"Las matemáticas son *el resultado del pensamiento más acertado:* se van incorporando gradualmente más terrenos en los que ya no encontramos conceptos confusos puesto que todos reciben una definición clara (y suficiente para el uso dentro del marco específico del terreno), las relaciones fundamentales que sustentan el conjunto son conocidas y dicho conjunto está recogido en un sistema ordenado y lógicamente razonado, de forma que cada una de las restantes relaciones está garantizada en la misma medida que las relaciones fundamentales. Si nos preguntamos por qué sólo las matemáticas ofrecen tanta claridad, tenemos que responder que se debe a que cada terreno que alcanza ese grado de claridad se eleva a la categoría de las asignaturas "matemáticas". Es por esto y sólo por esto que la geometría se considera desde sus inicios una asignatura matemática por mucho que en algún aspecto esté más bien relacionada con la naturaleza y por tanto sea una parte de la física".

Después de hablar de la índole del pensamiento matemático prosigue:

"Se suele entender por "pensamiento lógico" el proceso de *deducir, sin cometer errores, ciertas conclusiones de ciertas premisas.* Con lo anterior he intentado demostrar que esto no basta en absoluto: no garantiza la correcta resolución de un problema. Entender claramente *qué es un problema* y hallar *las premisas* correctas son tareas mucho más difíciles y decisivas que deben preceder a la deducción de posibles conclusiones".

"¿Cuándo se puede decir que una persona es "lógica"? Seguro que no será aquélla capaz de unir de modo irreprochable una serie de "entonces" a partir de una serie cualquiera de premisas incontroladas (u ofrecidas por otra persona), sino aquélla capaz de *sacar* los datos *pertinentes* de un *conjunto todavía desordenado.* Esta persona sabrá distinguir entre afirmaciones "correctas" y afirmaciones *pertinentes,* dará importancia a buenas argumentaciones y al empleo justo de las palabras y será sensible a los errores lógicos".

"Los hábitos mentales que ello conlleva son: buscar lo esencial en una situación dada (*capacidad de abstracción*), darse cuenta de ello (lo cual no es lo mismo), intentar formularlo minuciosamente, contrastar una posible respuesta con todo el conjunto de datos y no perder jamás de vista la situación total (capacidad *crítica*)".

Frente a esto, dice lo siguiente:

"Los exámenes finales ponen el acento en las aplicaciones; …".

"Los hábitos (¿mentales?) que se requieren son en este caso los siguientes: basarse en prescripciones de otras personas sin plantearse el "por qué"; esperar a que alguien presente unas premisas preparadas y llegue incluso a razonar las consecuencias y a continuación tal vez intentar comprender la corrección del razonamiento; pensar que "en matemáticas" se requiere un lenguaje y una "severidad" especial …, sin haber *experimentado* una búsqueda propia de alguna solución y su formulación con ayuda de esa severidad y ese lenguaje conciso; reconocer los tipos específicos de aplicaciones estudiadas y *recordar* los métodos correspondientes ... o bien probar suerte".

Este depurado análisis del pensamiento matemático, que sólo he reproducido en parte, da pie a las siguientes conclusiones:

a. La Sra. Ehrenfest distingue claramente entre el valor formativo de la geometría y la posibilidad de aplicarla en otras asignaturas.

b. Para ella las matemáticas no consisten en manipular y comprender unos algoritmos, sino que es mucho más importante comprender claramente qué es un problema y cómo encontrar las premisas correctas (ver Delacroix III, pág. 458).

c. El escaso éxito que en otros campos científicos puedan tener algunos que han tenido una educación matemática no constituye una prueba de que el pensamiento matemático sea intransferible. Más bien es posible que este fracaso sea debido a un tipo de enseñanza que no ha practicado esta clase de pensamiento.

d. La argumentación de la Sra. Ehrenfest, a diferencia del informe de Beth, indica minuciosamente cuáles son las formas de pensar cuya transferencia es importante. En el caso de que se aceptara el punto de vista de la Sra. Ehrenfest sería imposible hacer coincidir con él la didáctica de las matemáticas, siempre suponiendo que dispusiéramos de los profesores apropiados.

Freudenthal responde entre otras cosas:

> "La verdad es que nunca he entendido cómo puede haber personas que no entiendan las matemáticas, si todo es tan lógico. Una vez pude observar alumnos de éstos. Aún no sé a qué se deben sus fracasos pero sí sé *en qué consisten* (por lo menos en los casos que vi): no saben sustituir. Hay personas que, cuando ven la fórmula $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$, son incapaces de sustituir, según las reglas, *a* y *b* por expresiones más complejas; personas que son incapaces de sustituir un triángulo, que ahora aparece en un teorema por demostrar, por el triángulo que vimos en la demostración del teorema anterior; que son incapaces de rellenar los "lugares vacíos" de un esquema abstracto con sujetos, predicados, proposiciones, etc. -en una palabra, que son totalmente incapaces de llevar a cabo los métodos de sustitución formal, sin la cual todo pensamiento matemático resulta imposible".
>
> "¿Debemos concluir que son retrasados? ¿No serán capaces de ofrecer algo en otros terrenos? Y viceversa ¿tiene realmente tanta utilidad la sustitución formal fuera del campo matemático? …"
>
> "Existen también "buenos hábitos de pensamiento" totalmente distintos, que precisamente no salen a relucir mucho en matemáticas. Es perfectamente posible que una persona que carece de la capacidad de sustituir formalmente sea muy capaz de pensar con analogías -algo que de hecho hacemos mucho más a cualquier hora que deducir conclusiones silogísticas como hacíamos en la escuela. Para pensar con analogías también hay que ordenar material desordenado y descubrir lo esencial; sin embargo las características empleadas no son los criterios formales del pensamiento matemático, o más particularmente de la sustitución formal.
>
> "La sobrevaloración perjudica a aquello que se sobrevalora. Si uno pone el acento de su valoración incorrectamente se corre la tentación de hacer un uso inverso de dicha valoración. Lo que más amenaza la continuación de la enseñanza de las lenguas clásicas es precisamente la idea arraigada y tan manifestada por los profesores de que el Latín y el Griego son un azote maravilloso para el espíritu; mientras haya tales afirmaciones gratuitas para tranquilizar los ánimos, huelga esforzarse por descubrir los valores reales de las lenguas clásicas, enfocar las clases hacia estos valores y afirmar de paso que estas asignaturas no son más que un peso muerto".
>
> "… Me pondría … a temblar si los profesores de matemáticas o su mayoría sintieran la necesidad de dar clases de pensamiento basándose en las matemáticas, ya que me parece una tarea demasiado difícil para que la haga uno solito".
>
> "… La cuestión que nos tenemos que plantear continuamente es: ¿cómo lograr que tengan más prominencia las *matemáticas* en la enseñanza de las matemáticas?"

Esta respuesta tiene los siguientes puntos importantes:

a. Freudenthal considera que la capacidad de sustitución es el estrato más bajo en la transición de las tareas contemplativas a las actividades formales. Considera que la incapacidad de sustituir es un impedimento absoluto para las matemáticas.

b. Precisamente al situarse desde este punto de vista, constata el alcance limitado que tienen los hábitos de pensamiento en las matemáticas.

c. Considera que otro buen hábito mental lo constituye el pensamiento por analogías, una forma de pensamiento que la Sra. Ehrenfest, a la vista de su réplica, considera parte de las matemáticas.

d. Freudenthal opina que existe un gran peligro de que la sobrevaloración del valor formativo provoque situaciones no deseadas.

e. Freudenthal no considera que los profesores de matemáticas estén capacitados para impartir una enseñanza de las matemáticas enfocada a la transmisión de hábitos de pensamiento.

Lo sorprendente en toda esta discusión es que para la Sra. Ehrenfest el hallazgo de premisas correctas pertenece a las matemáticas, mientras que para Freudenthal no. Esta diferencia de posturas explica que la Sra. Ehrenfest ponga tantas esperanzas en los buenos hábitos de pensamiento que se adquieren en matemáticas, a diferencia de Freudenthal. Pero como ya argumenté en el capítulo VI, la cuestión definitoria de si el hallazgo de premisas debe considerarse parte de las matemáticas no afecta a la tarea del educador en la escuela. Si una enseñanza resulta más útil por incluir el aprendizaje de la búsqueda de premisas, entonces este aprendizaje debe darse en el instituto, indistintamente de si forma parte o no de las matemáticas. Dicho de otra manera: si una enseñanza enfocada hacia la creación de tipos algorítmicos brinda tan pocas posibilidades de transferencia de las formas de pensamiento, ¿por qué no cambiar el enfoque hacia la obtención de un tipo estructurante? Este tipo de enseñanza redundaría en beneficio incluso del futuro matemático: el hallazgo de premisas es una parte muy importante en la demarcación de nuevos terrenos y mini-terrenos.

Queda por supuesto la cuestión de si los profesores de matemáticas estarían en general capacitados para impartir este tipo de enseñanza. Quizá no salga muy bien al principio. En todo caso no me parece que un profesor de *otra* asignatura, pongamos de física, lo pueda hacer mejor ya que precisamente suele tener un respeto excesivo a los algoritmos. Pero frente a estas dificultades, observamos que la Sra. Ehrenfest ha definido muy minuciosamente qué hábitos son intransferibles (y por tanto inaplicables). Cuando los docentes tengan este objetivo bien claro estoy convencido de que los demás sabrán actuar en consecuencia.

El temor de Freudenthal a que una sobrevaloración del valor formativo de las matemáticas pueda provocar situaciones no deseadas está plenamente justificado. En las programaciones queda mucha materia inútil con la excusa de que es importante para el valor formativo de las matemáticas. Mursell (I, pág. 91) dice lo siguiente:

> "Según la teoría de la disciplina formal, el profesor se convierte en un maestro de tareas, puesto que lo que educa es la tarea *per se.* No importa lo que uno aprenda ni cómo lo aprenda, ni siquiera si uno adquiere un dominio real. No importa que un alumno estudie Latín durante cuatro o cinco años sin adquirir un cierta facilidad de lectura, puesto que en realidad no está estudiando Latín sino que está practicando su capacidad de discernimiento y de análisis lógico y mejorando su memoria. No importa que un alumno jamás acabe de dominar la geometría demostrativa hasta un punto en que sepa enfrentarse con tranquilidad y resolver con soltura una situación problemática que contenga principios geométricos, puesto que no está estudiando geometría en absoluto. Está entrenando su capacidad de razonar. De esta manera lo único que tiene que hacer el profesor es obligarle a trabajar. E incluso cuando toda la estructura fundamental de la teoría psicológica abandona estos puntos de vista, quedan todavía vestigios de esta manera de pensar. ¿O es que no existe nadie que esté metido en los ambientes escolares que no haya oído que se alaba a ciertos profesores porque “saben hacer trabajar duro a sus alumnos”?"

Es por ello que el criterio principal que se siguió en la "Programación de Matemáticas para el V.H.M.O (ver nota 2), un diseño del Grupo de Trabajo de Matemáticas de la W.V.O.[13]" (Purmerend, 1953) fue la utilidad directa de la materia didáctica de cara a la posterior formación del alumno. Esto no quería decir que no se deseaba tener en cuenta la posibilidad del valor formativo; simplemente se partía de la idea de que el valor formativo podía muy bien conseguirse tanto en la utilidad práctica como en cualquier otra materia didáctica. Mursell (I, pág. 104) dice lo siguiente:

> "Cuando cualquier habilidad se enseña de manera sumamente inteligente y organizada según criterios propios, se enseña y se organiza de tal manera que facilita la posibilidad de transferencia" y

> "Cuando trabajamos intencionadamente en pos de la transferencia de alguna habilidad, facilitamos su adquisición por sí misma".

De esta manera la elección de la materia no está realmente mediatizada por el valor formativo, y en realidad tampoco la manera de tratar dicha materia ya que, incidiendo en la argumentación de Mursell, una buena enseñanza de matemáticas es idéntica a aquélla que produce el máximo valor formativo. Y ciertamente estamos de acuerdo con Mursell: en los capítulos VII y VIII llegamos a la conclusión de que cuando mejor funcionan las matemáticas como matemáticas es cuando el profesor intenta crear en sus clases tipos estructurantes; el tipo de enseñanza vislumbrado por la Sra. Ehrenfest para la máxima obtención del valor formativo va encaminado en la misma dirección.

Visto así, estaría totalmente equivocado Freudenthal cuando afirma que, por lo general, los profesores no estarían capacitados para impartir unas matemáticas conscientemente enfocadas hacia la transmisión de hábitos de pensamiento. Con esta afirmación vendría a decir que considera que los profesores no son capaces de dar buenas clases. No es lo que pretende decir Freudenthal. Se le debe haber pasado por alto que la Sra. Ehrenfest, al hablar de la formación de buenos hábitos de pensamiento, se refiere a algo muy específico, muy delimitado y realizable: el aprender a hallar las premisas correctas, a distinguir las afirmaciones correctas de las pertinentes, etc.

Se trata de un malentendido que sin embargo tiene un significado muy principal. Veamos otras afirmaciones de Freudenthal:

> "Las matemáticas son … el peor terreno para … poder practicar, con esperanzas de transferencia, la costumbre (de intentar entender algo en lugar de tragarse una opinión o una regla impuesta por otros). Es la consecuencia funesta de la "simplicidad" de las matemáticas. Las matemáticas son poco problemáticas en el sentido de que su estructura excesivamente sencilla las resguarda en gran medida de la aparición de contradicciones. En matemáticas existe una autoridad, la autoridad de la corrección. Es muy difícil impugnar esa autoridad".

> "El material de pensamiento fuera de las matemáticas, en cambio, es un auténtico campo de batalla de contradicciones, y cuanto más nos alejamos de las matemáticas, tanto peor se pone la cosa. Es sólo fuera de las matemáticas que se puede hablar de “no aceptar algo bajo autoridad”".

> "Pensar fuera de las matemáticas supone sopesar los pros y los contras de las acciones. (A veces es posible una reducción hasta el nivel matemático. Esto es cuando los pros y los contras se valoran numéricamente y se suman de forma algebraica; pero el *proceso de reducción ya no es matemático* [la cursiva es de Van Hiele])."

Respecto de la afirmación referente a la sustitución, la Sra. Ehrenfest respondió lo siguiente:

[13] W.V.O. = Wet Voortgezet Onderwijs = Ley sobre la Enseñanza Continuada (N. del T.).

> "El Prof. Freudenthal utiliza expresiones como "conclusiones silogísticas en la escuela", "criterios formales del pensamiento matemático, o más particularmente de la sustitución formal", "pensar *con* analogías"; todo esto reafirma mi sospecha de que con el término "pensamiento lógico" se está refiriendo a las distintas *formas* específicas en las que se *expresa* el *resultado* del pensamiento en matemáticas, y que en parte llegan a convertirse en el *objeto* del pensamiento en matemáticas (por ej. en el caso de las transformaciones algebraicas o las investigaciones lógicas) …".

> "Puede que en parte (los fallos al hacer sustituciones sencillas) se deban a que la transición al uso de letras se ha hecho demasiado rápidamente y que estos alumnos (medianos) no han captado que la combinación de letras con ciertos signos equivale siempre a un único número …". "… hay personas que, por mucho que entiendan lo que significa una sustitución de este tipo, siguen siendo torpes al trabajar con fórmulas algebraicas. Para ello se necesita una capacidad especial -"algorítmica"".

Esta fue la respuesta de Freudenthal:

> " … la sustitución. Lo dije en un sentido más general de lo que cree la Sra. Ehrenfest; pero limitémonos al álgebra. La dificultad de aprender a sustituir *no* consiste en que "estos alumnos no han captado que la combinación de letras con ciertos signos siempre equivale a un único número …", sino más bien se debe a la incapacidad de poder hacer abstracciones a partir del conocimiento excesivamente entorpecedor de que las letras representan números. No sólo sería un error didáctico sino incluso matemático pretender que los alumnos se traguen sin más el carácter sustitutorio de las letras, lo cual por lo demás está totalmente en contradicción con los hábitos algebraicos".

Supongamos por un momento, para mayor comodidad, que el hallazgo de premisas, etc. *no* forma parte de las matemáticas. El matemático de pura cepa no se sentirá feliz sin haber negado el origen empírico de las matemáticas convirtiéndolas en un gigante con pies de barro. Pero en ese caso las raíces de las matemáticas, por mucho que ahora se hallen fuera de ellas, siguen estando en el mundo empírico. Berghuys (pág. 82) escribe lo siguiente:

> "La comprensión matemática *remite a ambos:* al material empírico, que se maneja con el esquema, y al espíritu, que incide sobre dicho material a fin de dominarlo…". "De esta manera las matemáticas son tanto un conocimiento del espíritu como del mundo; no es un conocimiento de una pura forma a priori sino también de nuestro entorno empírico".

Además argumenta (pág. 109) que las matemáticas tienen necesidad de volver constantemente al mundo empírico:

> "Los signos empíricos se confeccionan de tal manera que resultan ideales para la esquematización que nos proponemos. Este objetivo estaba enfocado *explícitamente* hacia el objeto matemático, pero esto sólo era posible si nos imaginábamos un signo en que se pudiera leer de manera *implícita. De esta manera cada despliegue desde lo empírico es a la vez una nueva involucración hacia lo empírico* … Las matemáticas son una espiritualización de la percepción; pero a la vez son un asentamiento, una materialización en un nuevo dato sensorial. De esta manera la explicitación del objeto puramente matemático jamás acaba con su carácter implícito. El pensamiento matemático está eternamente mediatizado por su pulsación rítmica entre lo abstracto y lo concreto".

Cuando uno ha adquirido cierta comprensión matemática, la aplicación de dicha comprensión suele consistir en una sustitución formal. En ese aspecto Freudenthal tiene razón y también es cierta la afirmación según la cual no sirve para nada intentar ayudar a alguien *que ya ha adquirido comprensión* y que sustituye mal, inculcándole los fundamentos (p. ej. el carácter sustitutorio de las letras). Ya se ha adquirido una autonomía y su mal funcionamiento no se arregla volviendo a la base racional. Pero frente a ello tenemos la imposibilidad de efectuar buenas sustituciones si no se conoce suficientemente el *significado* de aquello por lo que hay que sustituir (ver Delacroix, I, pág. 98 y 99). A veces sale bien cuando sólo se ha de sustituir dentro del *sistema de signos*, pero cuando realmente se intenta abstrayéndose del *significado,* resulta que este método fracasa estrepitosamente. Al fijarse en el significado se añaden o se omiten los corchetes, se recolocan las letras, algo muy necesario y que no se produce cuando se sustituye ciegamente en el sistema de signos.

La experiencia demuestra que no se les puede enseñar a sustituir en plan general a alumnos que todavía no tienen comprensión de cierta parte de las matemáticas. El aprendizaje de las sustituciones en un producto notable funciona en efecto tal como dice la Sra. Ehrenfest: se les hace ver que la combinación de letras con signos siempre representa un solo número. Y lo mismo ocurre con el triángulo del teorema que hay que demostrar. Primero hay darles a entender que el teorema anterior se refería a *todos* los triángulos. El que no entienda el proceso de la integración tendrá dificultades con la sustitución dentro de una integral. Las grandes dificultades aparecen cuando el profesor da la impresión de que no tiene importancia qué se sustituye, que tenga o no sentido. Es precisamente el significado de lo que hacemos lo que nos impone limitaciones a la hora de sustituir. En $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ es precisamente el significado lo que nos avisa de que cojamos valores positivos para *a* y *b.* De la misma manera, la simple sustitución en $\frac{a \times b}{a \times c} = \frac{b}{c}$ lleva a los alumnos a sustituir los signos positivos o negativos ante los signos de multiplicación.

Vemos así la utilidad de distinguir en el pensamiento la autonomía de la intención. Uno de los objetivos de la enseñanza de las matemáticas es conseguir que los alumnos adquieran, en las sustituciones y en todo tipo de terrenos, tal autonomía que nos creamos que todo funciona a la perfección y que el proceso prácticamente ha prescindido del pensamiento; los alumnos "deben ser capaces" de sustituir irreflexivamente. Sin embargo estos alumnos han llegado a esa autonomía a través de un proceso intencionado, que es cualquier cosa menos irreflexivo, y que además requiere una comprensión global de toda la situación.

De todo lo anterior podemos concluir que ni la Sra. Ehrenfest ni Freudenthal confían demasiado en el valor formativo de los algoritmos matemáticos[14]. La Sra. Ehrenfest confía mucho en el valor formal de la enseñanza de las matemáticas siempre que esté enfocado hacia lo que yo he llamando la creación de tipos estructurantes. Freudenthal no se pronuncia al respecto. Si opinamos, como Mursell (I, pág. 93), que sería muy grave tener que aceptar que el valor formativo es algo que no existe -y yo opino que efectivamente podría ser-, sería cuestión de considerar seriamente el tipo de enseñanza que defiende la Sra. Ehrenfest.

Los objetivos *b* y *c* del "informe Beth", el fomento del valor pedagógico-ético y estético y el significado socio-cultural de la geometría, han tenido poca repercusión en la enseñanza. Es comprensible: las propuestas para conseguir estos objetivos son tan dispares que no hay posibilidad alguna de poner de acuerdo a los profesores en un enfoque común. Además, es difícil imaginarse cómo evaluar los resultados de este tipo de enseñanza. Las investigaciones, mencionadas por Castiello, dejan entrever las dificultades de decir algo positivo acerca de esos resultados. En todo caso parece seguro que si el profesor no se esfuerza en la consecución de dichos objetivos, la enseñanza de las matemáticas en su conjunto no funcionará en esa dirección (Mursell, I, pág. 218 y ss.). De momento hay pocas razones para motivar la enseñanza de las matemáticas apelando a dichos objetivos.

La existencia real y regular de una transmisión de hábitos de pensamiento se ve claramente en la aparición de una transferencia negativa. Langeveld (I, pág. 428) distingue varios ámbitos de transferencia. Clasifica las matemáticas como pertenecientes a lo teórico constructivo y la física y la química a lo práctico experimental. El que procede de un ámbito para meterse en otro se trae consigo el enfoque específico. Es por ello que entre estos ámbitos puede circular una transferencia negativa mutua. Es conocido el caso del alumno con inclinaciones matemáticas, es decir que domina los hábitos de pensamiento matemáticos, que tiene dificultades iniciales al empezar con la

14 Al profundizar en su argumentación, Freudenthal dice que le es fácil imaginarse una larguísima actividad propedéutica que algunos alumnos son incapaces de sustituir por un nivel superior. Nunca llegan a la sustitución formal.

física. Le resulta raro que los resultados conseguidos algorítmicamente se tengan que contrastar constantemente con lo empírico. También le resulta raro que en física primero haya que analizar minuciosamente los fenómenos antes de pasar al planteamiento del problema[15]. Esta última dificultad no la tendrá tanto el alumno del tipo estructurante, que ha aprendido a buscar las premisas en matemáticas. Y además es tarea del profesor de química y de física hacerle ver al alumno que la metodología del físico y del químico es totalmente distinta.

Otro ejemplo de transferencia negativa es cuando un hábito matemático aparece en las ciencias del espíritu. El método matemático de dar a un nuevo concepto una definición que determine de la manera más exacta posible sus funciones, suele fracasar en estas ciencias puesto que no suelen disponer de la misma libertad para elegir o delimitar el contenido de los conceptos. No es que en matemáticas exista una libertad absoluta; sin embargo es cierto que en matemáticas sólo es posible manejar satisfactoriamente los conceptos después de producirse un empobrecimiento de los contenidos.

Así las cosas, tiene poco sentido llegar a una definición de este tipo fuera de las matemáticas, puesto que se corre el riesgo de llegar a un concepto distinto del que se pretendía estudiar. El camino consiste más bien en proceder a un análisis conceptual y a continuación indicar qué momentos conceptuales son especialmente relevantes. Incluso en matemáticas no siempre resulta posible dar una definición como: "Un X es un Y con las siguientes características". Por ejemplo, el punto, la línea y el plano se definen por sus relaciones mutuas. En otras ciencias será con mucho frecuencia imposible o complicado dar definiciones explícitas; los conceptos están definidos de manera mucho más minuciosa y sencilla por una serie de situaciones características. De vez en cuando nos encontramos con estos intentos fallidos que se pueden considerar como resultados de una transferencia negativa. Freudenthal ofrece en las Jornadas de la Conferencia de Grupos de Trabajo de Matemáticas de la W.V.O. (ver nota 13) de 1952 (I) unos ejemplos sorprendentes de las clases de mecánica, cogidos de los manuales H.B.S. (ver nota 3):

> "Cuando dos cuerpos se mueven de tal manera que en cierto momento se llegan a tocar, decimos que en ese momento chocan entre sí".

> "Definiciones: Movimiento y reposo. Nos podemos imaginar dos casos: 1°. Las coordenadas se alteran a medida que progresa el tiempo. Se dice en tal caso que las coordenadas cambian con el tiempo o que están en función del tiempo. 2°. Las coordenadas de un punto no cambian con el tiempo. En el primer caso se dice que el punto está en movimiento o que se mueve y en el segundo caso, que está en reposo".

No son casos aislados sino que forman parte de una tradición que se sigue en muchas asignaturas. Se cree erróneamente que es más científico si se intenta definir todo concepto que aparezca. Es lo de siempre: una metodología matemática con un vínculo más completo y honesto con los fundamentos no desembocaría tan fácilmente en esta transferencia negativa.

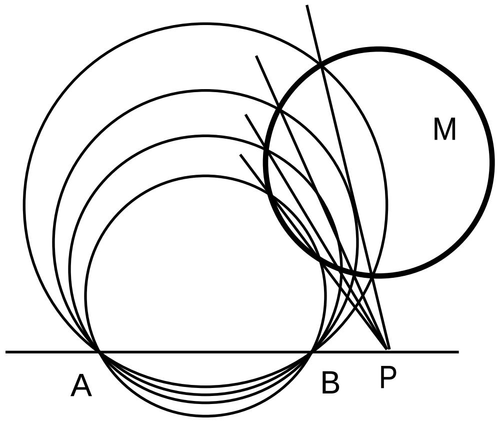
No hay motivos para despreciar el valor formativo de las matemáticas. El hecho de que se manifieste con tan poca frecuencia no tiene por qué preocuparnos. No son los buenos hábitos de pensamiento los que sobresalen, sino los malos. Si es tan fácil reconocer la transferencia negativa, podemos estar seguros de que también debe existir una transferencia positiva. El hábito de pensamiento matemático que con mayor frecuencia se transmite a otras asignaturas es la ordenación sistemática. No tiene por qué extrañarnos puesto que es un hábito propio del tipo algorítmico. Y es comprensible que no ocurra tanto con el hábito "distinguir afirmaciones correctas de afirmaciones pertinentes": este hábito es propio del tipo estructurante.

También es posible encontrarse la transferencia negativa en sentido contrario. Ocurre a veces que los alumnos aplican en las matemáticas métodos procedentes de la física y que son inaceptables en matemáticas. Veamos el siguiente ejemplo:

---

[15] Kohnstamm (I, pág. 10) da un caso similar de transferencia negativa.

Se pide construir una circunferencia que pase por dos puntos dados y que toque a una circunferencia dada.



Un alumno con inclinaciones técnicas enfoca el problema de la siguiente manera: Dibuja por los dos puntos un conjunto de circunferencias que cortan a la circunferencia dada. Determina los puntos de intersección de una de estas circunferencias con la circunferencia dada y los une. Esto lo repite con todas las circunferencias del conjunto y descubre que todas estas líneas de unión pasan por un punto P que se halla en la línea de unión de los puntos A y B. Desde ese punto P dibuja las tangentes a la circunferencia dada M. Los lugares en que estas tangentes tocan a la circunferencia dada corresponden a los puntos tangenciales de las circunferencias que se piden con la circunferencia del enunciado. De esa manera se conocen tres puntos de las circunferencias solicitadas, por lo que es posible construirlas.

Esta solución no es aceptable en matemáticas puesto que el alumno ha llegado a un fundamento teórico a partir de un experimento. En todo caso le podría servir de indicación de que la solución es correcta si el alumno consigue demostrar el fundamento teórico. De esta manera el profesor puede fácilmente reconvertir la transferencia negativa en positiva.

De todo ello podemos deducir que la argumentación de Miranda (I, pág. 87) en el sentido de que la falta de valor formativo de las matemáticas se debe a su pobreza óntica al no referirse ni siquiera a objetos reales, a diferencia de las ciencias, no tiene por qué conducir a la conclusión de que nos tenemos que resignar ante esa falta de valor formativo. No es que las matemáticas se ocupen de objetos más o menos reales que otras asignaturas, incluidas las ciencias del espíritu. Lo único que ocurre es que las matemáticas trabajan exclusivamente con objetos reales ideales, que no por ello son menos reales que los otros (ver Hönigswald, pág. 164).

Es cierto que la pobreza óntica es característica de las matemáticas. Pero precisamente por ello la enseñanza de las matemáticas brinda una oportunidad única de elegir esta pobreza óntica y su necesidad como objeto del pensamiento. Esto ocurre cuando a través del análisis de un campo perceptivo "real" y de una continua abstracción se llega por fin a las "matemáticas". Es en este sentido que hay que entender "el hallazgo de premisas" de que hablaba la Sra. Ehrenfest. En el momento en que se tenga el valor de romper con la costumbre de desarrollar las matemáticas a partir de sí mismas, formando un sistema lógico-deductivo, en el momento en que en vez de eso se descubran las matemáticas penetrando en ellas desde fuera, sólo entonces podremos esperar que se produzca la apropiada transferencia hacia prácticamente todos los ámbitos.

También hay otro fenómeno indicador de que los intentos del profesor por transmitirles determinados hábitos a sus alumnos tiene más éxito de lo que se suele creer. Lo observamos en aquellos adultos que, habiendo estudiado sin éxito matemáticas cuando eran jóvenes, prosiguen con el estudio siendo mayores. Sus progresos suelen ser increíbles, encuentran la materia tan sencilla que no entienden cómo les cuesta tanto a los pequeños. Cuando, en cambio, se dan clases de matemáticas a adultos que jamás las han estudiado, quizá les va mejor que a los pequeños, pero tampoco mucho mejor. ¿En qué puede consistir el efecto de esa enseñanza anterior, aparentemente fracasada? Es fácil convencernos de que los adultos dicen la verdad al afirmar que ya no se acuerdan de nada. Es cierto, prácticamente no se acuerdan de los algoritmos. Y no obstante los aprenden en la décima parte del tiempo que les cuesta a los niños. Usan unas soluciones que, efectivamente, se deducen de los medios de que disponen, pero que jamás se le ocurrirían a un niño. El profesor también comprueba que los adultos han ayudado a sus alumnos en los deberes. De ello deduzco que el niño, aparte de los algoritmos que vuelve a olvidar, aprende algo adicional que resulta más difícil de olvidar. Este algo adicional, que se distingue de tal manera del conocimiento latente que funciona directamente de manera totalmente nueva, tiene mucho que ver con el valor formativo de las matemáticas.

La transferencia negativa remitía a buenos hábitos de pensamiento aplicados erróneamente. Encontramos una forma muy distinta de transferencia negativaa en los tipos algorítmicos. Un alumno de este tipo suele tener la tendencia a utilizar métodos de cálculo en otros ámbitos de transferencia sin pensar en cómo se han de interpretar los resultados. Suele tener una alta estima hacia ese tipo de cálculos puesto que son matemáticos -o sea, correctos. Esta confianza en resultados de métodos algorítmicos cuyos datos suelen basarse en débiles fundamentos, es algo que encontramos en muchos ámbitos. Conocemos la fe ciega que algunos profesores tienen en la nota final que han calculado de manera irreprochable a partir de las notas de los exámenes y de los deberes. Con ello pierden de vista que estas notas iniciales pueden ser muy discutibles en sí (ver Mursell I, pág. 366).

Encontramos a veces en el tipo estructurante una forma de transferencia negativa que tiene menos que ver con la comprensión que con una determinada predisposición. Hay alumnos que están tan fascinados por los resultados de las matemáticas y también de las ciencias, que sienten un pronunciado desprecio por otras asignaturas, por ejemplo los idiomas. Esta predisposición suele ser la causa de ínfimos resultados en estas asignaturas. Los profesores de matemáticas y ciencias pueden corregir esta actitud diciéndoles y demostrándoles que un sólido conocimiento de las lenguas es imprescindible para el estudio de las matemáticas y las ciencias.

CAPÍTULO X

SIGNIFICADO DE LA COMPRENSIÓN PARA LA FORMA DE SER DEL NIÑO

Tendríamos una idea muy incompleta del significado de la comprensión si no profundizáramos en la cuestión de cómo se vive la comprensión. Existen dos motivos para no haber empezado el presente estudio por esta cuestión. El primero y más importante es que nos interesa estudiar la comprensión tal como se manifiesta en el instituto y particularmente en las clases de matemáticas. Con tal planteamiento parece más indicado partir desde el punto de vista del perceptor. El segundo motivo es que no resulta sencillo obtener datos objetivos acerca de la manera en que otros viven la comprensión, y más si se trata de alumnos que, por la índole de la situación, no se han ofrecido libremente como sujetos de prueba fiables. Los resultados se suelen alcanzar interpretando sus comportamientos a partir de datos obtenidos de forma introspectiva. Queda la pregunta de si el grupo de personas que intercambia los datos que se han obtenido introspectivamente y que dan lugar a dicha interpretación es lo suficientemente representativo para determinar el modo en que "un alumno" vive la comprensión. Pero por muy difícil que resulte conseguir datos fiables acerca del modo en que otros viven la comprensión, no es motivo para obviar la cuestión. Hay demasiados profesores convencidos de que el proceso de aprendizaje sólo tiene utilidad cuando el alumno ha experimentado varias veces la satisfacción de alcanzar la comprensión.

Volvamos al modo en que el alumno descubre la comprensión, es decir, cuando dice: "Ah, ya lo entiendo …" y a continuación formula una nueva proposición. Ya ha descubierto la comprensión antes de formular la proposición. Esta formulación no constituye más que la prueba que debe confirmar la sensación de comprensión. El alumno ve relaciones nuevas que no veía antes, de ahí que se puede hablar de la formación de una estructura de pensamiento. La aparición de comprensión suele ir ligada a una emoción: el alumno experimenta una sensación de poder porque se siente capaz de cosas que no sabía hacer antes; experimenta cierta sensación de seguridad porque se siente capaz de cumplir ciertas condiciones durante algún tiempo. Son precisamente estas emociones las que permiten que una situación, que antes no era de aprendizaje, se convierta en una de aprendizaje. Esto suele ocurrir con los juegos. La exploración que conllevan puede originar comprensión (Langeveld I, pág. 212). Sabremos que estamos ante una verdadera comprensión cuando veamos que el alumno actúa adecuadamente en situaciones nuevas, adecuadamente respecto de la solución del problema que él mismo se ha planteado. La intención de esta actuación suele verse en las constantes repeticiones.

Ya he dicho anteriormente que este deseo de alcanzar comprensión de problemas autoplanteados, que es característico de los juegos[16], también es propio del investigador científico y particularmente del matemático. Muchísimos problemas matemáticos fueron solucionados varias décadas antes de ser aplicados y otros muchos se han solucionado sin que se hayan aplicado todavía. De esto podemos deducir que la satisfacción de saber hacer algo, la sensación de poder y seguridad que conlleva la comprensión, va unida a la propia tarea autoimpuesta y no tanto a alguna obligación o utilidad general.

---

[16] Utilizamos el término "juego" en su acepción cotidiana y no la estrictamente psicológica. Para esta última acepción véase, por ej., E.A.A. Vermeer (Juego y problemas lúdico-pedagógicos). La característica principal del juego es que el niño crea un mundo ilusorio. Nos referimos al tipo de "juego" de los puzzles, los sonajeros, solitarios, pelotas. El objetivo de los "juguetes" es alcanzar la satisfacción de la exploración, no la creación de algo determinado aunque a veces pueda ocurrir (p. ej. los puzzles). Estos juegos, que se han de distinguir claramente de otros (p. ej. aquéllos que tienen carácter competitivo, como el "juego" de las damas), son vitales para la didáctica. Es una lástima que no tengan un nombre específico.

La formación de la comprensión puede producirse de la siguiente manera: El niño se encuentra inicialmente en una posición totalmente libre respecto del campo perceptivo correspondiente; a continuación se pone a explorar aunque de manera bastante libre. En el transcurso de este desarrollo se va dibujando claramente un determinado problema. La situación pasa a un segundo estadio: el problema concreto empieza a fascinar cada vez más al niño y éste enfoca toda su personalidad hacia su resolución. En el tercer estadio prorrumpe la comprensión: el campo perceptivo (campo del pensamiento) adquiere una nueva estructuración. En este momento tendrán gran importancia las percepciones del primer estadio. En el cuarto estadio se plasma la comprensión: el alumno hace pruebas de control, intenta utilizar la comprensión adquirida en situaciones creadas con variaciones de los datos originales.

Se necesita determinada tensión emocional para provocar el enfoque total de la personalidad durante el segundo estadio. El aumento de la tensión emocional hasta la prorrupción de la comprensión no es en absoluto constante: existen pulsaciones que bien pudieran ser esenciales para la formación de la comprensión. Pero el mayor grado emocional se alcanza sin duda alguna en el momento en que el niño se da cuenta de su propia comprensión y es precisamente la esperanza de alcanzar esta emoción la que hace tan atractivo el esfuerzo intelectual[17].

Dije en el capítulo VI que no se suele constatar este deseo de adquirir comprensión de los alumnos del primer curso de bachillerato. Nos tendríamos que plantear por qué el alumno no anhela las emociones que acompañan la aparición de comprensión. Puede haber dos posibilidades:

1°. El alumno está desalentado: ya no tiene la esperanza de que sus esfuerzos vayan a ser recompensados con las emociones de la comprensión adquirida.

2°. El alumno ya no es sensible a la fuerza de atracción de esas emociones ya que éstas han sido desbancadas por otras.

Existen otras posibilidades que no voy a tratar, como, p. ej., que el alumno es demasiado torpe, o no tiene interés o no tiene disciplina. Esperamos que estas posibilidades no se den en la mayoría del alumnado. Para estos casos pediríamos un tratamiento individual.

La primera posibilidad se da mucho pero sin duda la más frecuente es la segunda. Sólo tenemos que pensar en los exámenes y las notas (Morrison, pág. 43 y ss.), en la suma de los fallos cometidos, para entender que en el ámbito escolar pesan mucho más los resultados externos que la comprensión alcanzada. Todos estos medios que se utilizan de buena fe para fomentar el aprendizaje encierran el peligro de originar un tipo de aprendizaje sin comprensión, el efecto contrario del que se pretende. Se podría intentar justificar este sistema diciendo que los alumnos flojos y medianos pueden llegar de esta manera a una satisfacción que quizá no alcancen con el sistema de la comprensión. Una argumentación peligrosa puesto que ¿es así como se alcanzan los objetivos educativos? Esta justificación no es válida para los buenos alumnos y la práctica demuestra que a veces ellos también se pueden enviciar debido al sistema de gratificaciones. Sólo aquellos que poseen una independencia espiritual tan grande como para permanecer inmunes a dicho sistema trabajan a su aire con la esperanza de la comprensión como única recompensa. Son los aprendices directos de que habla Morrison. Tienen difícil cabida en las clases tradicionales.

Hagamos una comparación con el análisis fenomenológico del aprendizaje que hace Langeveld (I, pág. 445 y ss.). Langeveld parte de un "fenómeno calificado por todos y sin la menor duda como “aprendizaje”". Elige el "juego de damas". Quizá algunos sean tan ingenuos para creer que debería haber escogido una asignatura que se impartiera en los institutos. No obstante, de todo lo anterior podemos concluir que ha sido una elección afortunada ya que es muy discutible que la mayoría de las cosas que se aprenden en el instituto sean realmente representativas de un "verdadero aprendizaje". Langeveld llega, a partir de un análisis sumamente interesante, a unos

[17] El presente análisis de la formación de la comprensión lleva, por lo tanto, a la misma conclusión que Langeveld (I, pág. 245) cuando afirma que la adquisición de comprensión no es un proceso repentino.

ocho aspectos que constituyen la esencia del proceso de aprendizaje. Para mayor comodidad se pueden denominar de la siguiente manera:

1°. *orientación en torno* a la índole de la situación.

2°. *direccionalidad primaria.*

3°. *datos-cosas.*

4°. *determinantes* estructurantes.

5°. *información.*

6°. *integración con sentido* de los momentos de la experiencia.

7°. *conocimiento* (*"estar orientado"* en una situación).

8°. *dominio.*

Es evidente que el significado de estos términos sólo puede conocerse con exactitud a la luz de las explicaciones de Langeveld. En el punto 6 he sustituido el término original *"direccionalidad noética"* por las palabras que Langeveld utiliza al explicarlo, ya que no me quiero atar a ninguna teoría específica.

El esquema resulta muy apropiado para el "aprendizaje de la geometría". Encontramos prácticamente todo lo que caracteriza este aprendizaje específico.

1°. *Orientación en torno* a la índole de la situación.

La gran mayoría de los alumnos que se disponen a estudiar geometría en el primer curso del bachillerato no saben inicialmente de qué va la asignatura. En este aspecto la situación difiere mucho del aprendizaje del juego de damas en que el niño ve jugar a los demás y quiere aprender. El ambiente inicial que existe es el típico ambiente escolar en que el alumno oye en la primera clase algo de una asignatura que todavía carece de significado para él. De manera que la primera orientación la da siempre el profesor.

2°. *Direccionalidad primaria.*

La intención inicial del alumno en la primera clase no está en absoluto dirigida, en sentido estricto, hacia el aprendizaje de la geometría. El alumno no sabe ni siquiera a grandes rasgos en qué consiste la asignatura. La primera intención puede consistir en ser bueno y mantenerse a la expectativa. Con las damas la primera intención va dirigida al aprendizaje de las reglas de juego; si éste es el efecto de la primera intención en el aprendizaje de la geometría, es tarea del profesor intentar canalizarla positivamente. Explicar las "reglas de juego" de la geometría puede conducir a una disposición errónea por parte del alumno. En geometría, lo importante no son las reglas de juego sino el entender por qué son así y no de otra manera.

Así pues, si el profesor desea satisfacer los deseos de los alumnos por conocer las reglas *de juego,* debe darles las auténticas reglas de juego y no las reglas ordenadoras del espacio. Puede dar las reglas de algún juego que ha ideado e inducir a los alumnos a que, a través del juego, vayan descubriendo las reglas ordenadoras del espacio. Paulatinamente la situación irá cambiando de manera que la intención de los alumnos se podrá enfocar hacia el descubrimiento de los secretos del espacio.

Más adelante se puede dirigir la intención de los alumnos hacia los propios principios ordenadores. Es entonces cuando los niños entran en contacto con las matemáticas. No podemos esperar ni siquiera desear que, como dice De Miranda (I, pág. 59), los niños se conviertan, en lo que respecta a su intención, en matemáticos en un momento dado. Para empezar, no está muy claro qué se entiende por "ser matemático", pero lo que sí es evidente es que no constituye en modo alguno el objetivo de la enseñanza de matemáticas.

3°. *Datos-cosas.*

Por mucho que se consideren las matemáticas una asignatura abstracta, es curioso observar el gran papel que juega lo concreto en esta asignatura. El profesor puede, para introducir la geometría, pedir a sus alumnos que confeccionen modelos de papel; también puede enseñar estos modelos y pedir a sus alumnos que intenten descubrir sus propiedades. Puede preguntar con qué tipo de baldosas se puede pavimentar un piso; puede enseñar una figura y preguntar cómo se podría construir con compás y regla, triángulo o goniómetro. Al principio del estudio de la geometría tiene gran importancia el significado de las cosas para dirigir la intención. Puede dirigirse hacia la utilización de instrumentos de dibujo, aprender a comprender figuras conocidas o todavía desconocidas, averiguar si las figuras cuadran o no, etc. De hecho jamás se pierde el vínculo con la materia, lo único que ocurre es que la totalidad o la mayoría de las figuras se sustituyen por símbolos. Pero al trabajar con estos símbolos no se pierde de vista el carácter material que tienen (Berghuys, pág. 108 y ss.).

4°. *Determinantes estructurantes.*

Resultaría imposible posponer las acciones de los alumnos hasta que sepan cuáles son las condiciones que precisamente convierten esa asignatura en geometría. Estas condiciones son totalmente insondeables para el principiante, incluso partiendo de la idea de que el hallazgo de premisas pertenezca a las matemáticas. Por ello habrá que consentir, e incluso procurar, que el alumno las desconozca y que por lo tanto no pueda cumplirlas. De esa manera se podrá partir, p. ej., de un experimento, se les podrá hacer dibujar de una manera que no concuerda con los postulados para la construcción de figuras, etc.

5°. *Información.*

La información no se limita a la clarificación de qué acciones forman parte de la práctica geométrica. En un principio también supone dirigir la atención del alumno hacia problemas que estimulen un planteamiento geométrico. Después vendrá la transmisión de conocimientos acerca de los hallazgos de otras personas y de los métodos adecuados.

6°. *Integración con sentido.*

Al igual que cuando se aprende a jugar a las damas existe durante todo el proceso de aprendizaje una direccionalidad hacia saber jugar, de la misma manera deberá existir una direccionalidad hacia saber geometría durante todo buen aprendizaje (ver Mursell I, pág. 43 y II, pág. 16). Sabemos de sobra que no suele ser así. Esta claro que esta direccionalidad es imposible en los estadios iniciales, ni siquiera en la forma de una direccionalidad hacia algo "indefinido". No obstante, el hecho de que no se produzca por regla general, incluso en estadios avanzados del aprendizaje, es una de los grandes fallos del V.H.M.O. (ver nota 2). Tenemos que reconocer esta evidencia. Ya nos podemos considerar satisfechos cuando los alumnos se sienten dirigidos hacia la resolución de algún problema divertido, cuando captan el aspecto bonito de alguna demostración. Pero sabemos perfectamente que sólo en contadísimos casos se llega a una integración sensata; lo que el niño aprende en geometría se suele quedar en una serie de momentos aislados. Es difícil imaginarse algo distinto de los institutos. Es del todo impensable que alguien fuera capaz de dirigir de hora en hora toda su personalidad hacia totalidades totalmente distintas que van sucediéndose al ritmo del horario de clases (ver Langeveld II, pág. 201). En el mejor de los casos el profesor podrá enfocar su hora de tal manera que los alumnos participen en un proceso de aprendizaje dirigido hacia el dominio de una determinada unidad temática. Pero que no espere que los alumnos lo sientan como parte de un proceso integral enfocado al aprendizaje de la geometría.

7°. *Estar orientado en una situación.*

En el aprendizaje de las damas llega un momento en que la persona puede decir que sabe lo que es jugar a las damas. Después puede intentar perfeccionarse mediante la práctica. De la misma manera llega un momento en que el alumno sabe qué es la geometría. En este aspecto no hay que ser pesimistas. Cuando hay que demostrar la igualdad de segmentos o de ángulos, el niño piensa en la congruencia; cuando hay que calcular segmentos, surge inmediatamente el teorema de Pitágoras, etc. Por mucho que el proceso no haya estado jamás dirigido hacia la totalidad del aprendizaje de la geometría, se ha producido sin embargo cierta integración.

Suele ocurrir con mucha frecuencia que los alumnos al principio no son conscientes de dicha integración. Pero cuando se dan cuenta de ello lo viven como algo muy importante. A unos alumnos de tercer curso se les presentó una figura compuesta por un triángulo con un círculo inscrito. El centro del círculo estaba conectado con los vértices y con los puntos tangenciales en los lados. Se les pidió que listaran todos los teoremas que supieran, relacionados con la figura o alguno de sus componentes. Se pusieron a trabajar con gran entusiasmo. Los alumnos estaban contentísimos de descubrir que habían aprendido tantas cosas aplicables a la figura geométrica. Pidieron que este tipo de ejercicio se repitiera de vez en cuando. Esto demuestra que en principio los alumnos no eran conscientes de que se había producido un proceso de aprendizaje integral y también que los alumnos valoran muy positivamente este tipo de aprendizaje.

Los problemas pueden jugar un papel muy útil en este sentido. Suelen constar de un planteamiento central: todo el pensamiento va dirigido a solucionar el problema. Los alumnos disponen para su resolución de la geometría, en la medida en que la hayan estudiado. Puede llevarse a cabo una integración espléndida, puesto que todo lo que han estudiado hasta entonces puede servir para la consecución de ese único objetivo. Esta integración se vería perjudicada si se pretendiera simplificar la resolución de los problemas mediante los llamados métodos de pensar. Estos métodos conducen a una desintegración puesto que en vez de usar la totalidad de la geometría se insiste en algún método concreto capaz de solucionar el problema en cuestión.

8°. *Dominio.*

El dominio en el juego de damas en ilimitado. En este juego llegamos rápidamente a un momento en que podemos decir que sabemos jugar, es decir, que no infringimos las reglas de juego y que hacemos movimientos encaminados a ganar. Pero también es cierto que perdemos contra jugadores más experimentados sin que lo podamos evitar a corto plazo. Y es que por lo visto existen distintos niveles de dominio.

Lo mismo ocurre con la geometría. Incluso hay más posibilidades. Es posible estudiar problemas cada vez más difíciles que requieran niveles de dominio cada vez más altos. Pero también es posible profundizar cada vez más en los fundamentos consiguiendo un dominio de carácter distinto. Es conveniente no perder de vista el objetivo educativo. ¿Qué tipo de dominio necesitan los alumnos de V.H.M.O. (ver nota 2)? Está claro que es estupendo si son capaces de resolver todo tipo de problemas, ya que indica un gran dominio, una gran comprensión. Siempre que esta capacidad se deba a una visión global de la geometría y no al conocimiento de algunos métodos de resolución. En este último caso la sensación de tener comprensión queda mitigada por el convencimiento de que la capacidad resolutoria no abarca más allá del campo de los métodos de resolución (ver Mursell I, pág. 179 y ss.).

¿Pero realmente es necesario y útil que todos los alumnos dominen tan bien la asignatura como para poder resolver muchos tipos de problemas? ¿No debemos de considerarnos ya satisfechos si han aprendido a discernir lo geométrico en el espacio, si han entendido lo que es un sistema lógicamente cohesionado de relaciones, si son capaces de aplicar de manera sencilla la geometría en otras asignaturas? La profundización en los fundamentos no suele conducir lejos puesto que pedir más de lo justo en este terreno podría resultar catastrófico. Cuando se pide demasiado trabajando con problemas no suele haber consecuencias serias para el alumno pero ¿qué sentido tiene preguntar más de lo justo? ¿No será éste uno de los motivos del descrédito de la geometría?

He estado comparando el aprendizaje de la geometría con el del juego de damas para demostrar la manera en que se diferencia el aprendizaje de la geometría en el instituto de un proceso de aprendizaje normal. Es hora de volver a nuestro tema y ver dónde se puede producir la comprensión en este esquema. La primera comprensión geométrica ocurre en el punto 7°, es decir, cuando los alumnos se dan cuenta hacia qué totalidad ha ido dirigido su aprendizaje. En ese momento es cuando se manifiesta la verdadera comprensión en geometría; toda la enseñanza debe estar enfocada a que este momento sea sentido intensamente. Si esto se logra, existen grandes posibilidades de que los alumnos se pongan a estudiar la geometría por sí misma. Y es muy probable que los alumnos en el futuro la recuerden como una asignatura que tenía sentido y significado.

Esto no quita que sea imposible que haya comprensión desde un principio. Al contrario, hemos visto que suele tardar bastante antes de que pueda aparecer. La emoción, que debe ser la fuerza motriz del proceso de aprendizaje, tendrá que ser causada al principio por *otras* comprensiones, comprensiones de problemas más cercanos planteados por el profesor. Para que este tipo de problemas alcance su objetivo, debe cumplir ciertas condiciones. En primer lugar, el planteamiento del problema debe ser clarísimo desde un principio. A continuación debe hacer avanzar a los alumnos en la geometría integral. Debe ser apasionante: no debe desvelar los secretos demasiado pronto sino que también ha de ser gratificante: el alumno que haya estado pensando debe de poder aportar algo a la solución. Y efectivamente existen problemas de este tipo; es más, la mayoría de los temas geométricos se pueden presentar mediante estos problemas: ¿acaso la mayoría de los temas geométricos no han surgido a partir del planteamiento de una situación? Muchos problemas de la antigüedad, con la descripción de los intentos de resolución, siguen siendo apasionantes para gente avanzada.

El punto octavo: el dominio comprende muchos grados. No obstante es una lástima que estas comprensiones produzcan al mismo tiempo cierta desintegración. Los alumnos pueden alcanzar mayor dominio de la geometría al coger mayor práctica en la resolución de problemas. Si esta resolución de problemas se basa en los llamados "métodos de pensar" la comprensión obtenida tendrá poco que ver con la geometría integral.

Sin embargo una profundización teórica, p. ej. dirigida hacia la axiomática, hacia la trigonometría, etc., conduce rápidamente a la especialización. Y esta especialización suele causar un alejamiento de la geometría integral. Si este tipo de especialización no constituye un objetivo de la enseñanza, es mejor no forzar el dominio de la geometría puesto que supondría pasarse del objetivo.

El V.H.M.O. (ver nota 2), cuyos objetivos en la enseñanza de la geometría radican en el valor formativo de la geometría, el aprender a conocer un sistema lógico, el aprender a entender y dominar el espacio en que vivimos, no precisa de modo alguno continuar el proceso hasta el punto en que la mayoría de las acciones se hayan automatizado. Es bueno para el proceso de aprendizaje que los alumnos se den cuenta de que son capaces de solucionar problemas con sus propias ideas. A partir de ahí es posible ir aumentando el dominio hasta altos niveles, sobre todo si el proceso de aprendizaje se automatiza y además se basa en los llamados métodos de pensar. Sin embargo, esta mayor pericia sería sólo aparente si provocara una disminución de la sensación de haber llegado a la solución con ideas propias.

CAPÍTULO XI

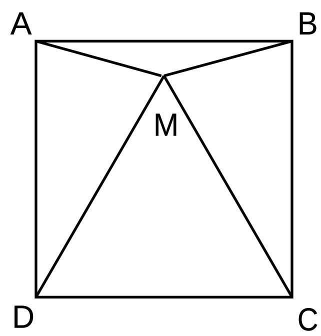
¿TIENE SENTIDO QUE LA META DE LA ENSEÑANZA CONSISTA EN EL DESARROLLO DE LA COMPRENSIÓN?

Después de todo lo que hemos dicho acerca del significado de la comprensión, parece una perogrullada preguntarse si tiene sentido elegir el desarrollo de la comprensión como objetivo didáctico. Desde cualquiera de los puntos de vista que lo hemos considerado, hemos visto que es vital que el aprendizaje incluya la comprensión. Sin embargo nos queda por ver otro aspecto importante: la organización de la enseñanza. La cuestión esencial que está todavía por analizar es si la organización actual de la enseñanza, los planes de estudio, los exámenes, permiten al docente impartir unas clases que brinden la mayor oportunidad al alumno de adquirir comprensión de aquellas asignaturas que debe estudiar.

Cuando estudiamos la influencia de la comprensión en el hábito del niño vimos que había que distinguir entre dos tipos: el tipo algorítmico y el tipo estructurante. Los alumnos del primer tipo tienen mayor tendencia a dominar algoritmos mientras que los del segundo tipo prestan más atención a las consideraciones que van unidas a esos algoritmos: las posibilidades de un problema hasta prepararlo para un tratamiento algorítmico (hallar premisas), las condiciones que posibilitan tal reducción, la similitud y la diferencia con otras reducciones, etc. Puesto que la diferencia entre estos dos tipos se mantiene mucho tiempo después de que los alumnos hayan concluido sus estudios, nos podríamos preguntar si no existen propiedades innatas, algo así como "cerebritos matemáticos".

En los institutos se suele creer que los alumnos se pueden catalogar según sus aptitudes para las matemáticas o las lenguas y se admite de paso que una aptitud excluye a la otra. La clasificación entre tipos algorítmicos y estructurantes nos hace ver que esta división entre aptitudes matemáticas y lingüísticas es simplista. ¿Con qué tipo se asocia la aptitud matemática, con el algorítmico o con el estructurante? Tal como está organizada la enseñanza hoy en día, con ambos tipos se puede llegar a tener un buen historial académico.

Es bueno hacer esta distinción para la aptitud matemática puesto que la mayoría de los alumnos del bachillerato superior que se quejan de carecer de un cerebrito matemático tienen poco interés por los algoritmos. Sin embargo suelen tener grandes aciertos cuando tienen que demostrar la comprensión matemática. He aquí un ejemplo característico:



A unos alumnos del curso VIα del bachillerato superior se les había planteado el siguiente problema: Desde los vértices A y B del cuadrado ABCD se trazan en el interior del cuadrado unas líneas que forman ángulos de 15° con AB. Estas líneas se cortan en el punto M. Demuestra que ΔDCM es un triángulo equilátero. Los alumnos habían demostrado poco interés por las clases de matemáticas; sin embargo, esta vez se sentían atraídos por el carácter enigmático del problema. Dieron con la siguiente solución: Dibujemos por C una línea que forme con CD un ángulo de 30°. Esta línea corta la línea que sale de B, en un punto que llamaremos N, y forma un ángulo de 15° con BA. Los ángulos B y N de ΔBCN tienen ambos 75°, de ahí que $\overline{BC} = \overline{CN}$. Unamos N con D y tendremos que ΔDCN es equilátero puesto que $\overline{DC} = \overline{CN}$ y C = 60°. De ahí resulta que ΔDAN es equilátero del que calculamos DAN = 75° y BAN = 15°. De esta manera la línea AN es igual a la línea que, conforme al enunciado, había que dibujar desde A. Así pues, el punto N coincide con el punto M del enunciado. Sabemos que ΔCDN es equilátero, o sea que lo mismo se puede decir de ΔCDM.

Para llegar a esta solución se necesita una comprensión de nivel muy alto. Los alumnos de la sección β a veces no dan con este tipo de soluciones. Como vemos, es más que discutible afirmar que los alumnos de la sección α sólo tienen *aptitudes* lingüísticas. Y no es este el único caso. Contra todos los pronósticos vimos que había una gran correlación entre las aptitudes para las lenguas clásicas y las matemáticas. Hubo algunos casos muy significativos en los que inicialmente parecía no existir dicha correlación y sin embargo apareció después. Veamos un caso de éstos:

En primer curso de bachillerato había un alumno que iba muy bien en idiomas pero fatal en álgebra. Por mucho que se esforzaba fallaba el 90% de los problemas. En segundo curso se llevaba trabajo a casa pero los resultados seguían siendo pésimos. Tras consultar con el profesor, abandonó el álgebra por algún tiempo. Los profesores estaban convencidos de que era un caso típico de aptitud α. Sin embargo durante el cuarto curso se produjo un cambio en la situación y finalmente, al concluir los seis cursos de bachillerato, el alumno hizo simultáneamente las reválidas de la α y de la β.

Los alumnos del tipo algorítmico se encuentran con más frecuencia en la sección H.B.S. (ver nota 3). No es de extrañar. El programa del H.B.S. permite en mucha mayor medida que alumnos poco inteligentes consigan salir adelante mediante el dominio de algoritmos, es decir, mediante el trabajo "mecánico". A la vista de los problemas del examen escrito final, da la impresión de que constantemente intentan poner las cosas más fáciles al alumno estructurante y más difíciles al algorítmico. Esto ocurre porque aparecen nuevos tipos de problemas para los que no han sido preparados los alumnos. Pero también vemos cómo los alumnos algorítmicos rápidamente pasan a dominar estos nuevos tipos de problemas si se les enseñan nuevos algoritmos. El final se convierte así en una acumulación constante de nuevos problemas que se resuelven mediante "métodos de pensar".

Para poder entender bien las "aptitudes" matemáticas, distinguiré tres tipos de alumnos:

1°. Hay alumnos que disponen de una inteligencia que les permite adquirir una buena comprensión matemática y que además disponen de las necesarias características para adentrarse con éxito en los correspondientes algoritmos. De estos alumnos es lícito esperar éxitos en el estudio de las matemáticas; todo el mundo coincide en que tienen "aptitudes" para las matemáticas.

2°. Hay alumnos que son capaces de adquirir la suficiente comprensión de las matemáticas, que tienen el campo perceptivo bien estructurado, que tienen campos de pensamiento ricamente estructurados pero que por algún motivo muestran poco interés por los algoritmos correspondientes. Es posible que tengan éxito a condición de que en la didáctica se tengan en cuenta sus particulares intereses. Si esto no ocurre estos alumnos no tendrán "aptitudes" matemáticas.

3°. Hay alumnos que carecen de campos perceptivos o de pensamiento bien estructurados, en lo que atañe a las matemáticas, pero que son capaces de absorber ciertas reglas de cálculo y utilizarlas en situaciones indicadas. Estos alumnos, al principio, suelen dar la impresión de tener aptitudes matemáticas. Pero a la larga vemos que no es cierto. Las posibilidades que estos alumnos tienen de concluir sus estudios dependen de si el profesor consigue y está dispuesto a mandar un gran porcentaje de "métodos de pensar" como tema de exámenes[18].

[18] En el presente trabajo he hecho varias clasificaciones de alumnos, por ejemplo con los "aprende-temas", etc. Hice otra clasificación al introducir los conceptos de "tipo estructurante" y "tipo algorítmico". Y ahora tenemos otra nueva distinción. No nos cansaremos de repetir que todos estos tipos son producto de un cierto tipo de educación. El significado de las aptitudes es sólo secundario. Se podrá considerar discutible -y con razón- que tenga algún sentido

La didáctica es muy importante para determinar si un alumno tiene o no aptitudes. Una didáctica enfocada a la rápida asimilación de algoritmos elimina los alumnos del segundo tipo y mantiene durante mucho tiempo a los del tercer tipo. Una didáctica que pone el énfasis en la estructuración del campo perceptivo implicará a los del segundo tipo pero eliminará pronto a los del tercero.

Esta circunstancia coloca al profesor ante un dilema complicado: las clases de los primeros cursos suelen tener distintos niveles de inteligencia, direccionalidad de interés y concentración. Por ello tienen un componente relativamente alto de alumnos del tercer tipo. Si el profesor quiere mantenerlos durante mucho tiempo tendrá que aplicar una enseñanza enfocada hacia los algoritmos. Con ello se elimina a los alumnos del segundo tipo que, sin embargo, tienen más aptitudes para los problemas de mayor nivel que se estudiarán más adelante. Nos podríamos plantear un tipo de solución intermedia en que el profesor haga depender su enfoque didáctico del número de alumnos de una u otra categoría. Pero esto tiene serios inconvenientes. Sólo es posible reconocer las categorías de alumnos cuando la enseñanza ya está en marcha. Además, una didáctica enfocada hacia alumnos del tercer tipo puede tener unas consecuencias no deseadas para los del primer tipo. Una parte de estos alumnos, precisamente aquéllos que se adaptan fácilmente a la enseñanza (el tipo transfer de Morrison), corren el peligro de convertirse, a consecuencia del tipo de didáctica, en alumnos algorítmicos cuando, debido a sus aptitudes, se habrían podido convertir en alumnos estructurantes.

La práctica de la enseñanza demuestra que este tipo de desarrollos, contrarios a la propia personalidad del alumno, suele ocurrir. Es frecuente ver a alumnos que se sienten abrumados por la cantidad de algoritmos que han de estudiar. Se sienten profundamente aliviados cuando se les hace ver que pueden llegar por sí solos a esos algoritmos con una buena estructuración del campo perceptivo o mental. Se sienten contentos cuando se dan cuenta de que, en matemáticas, no hace falta memorizar tanto. Y, por otra parte, nos encontramos constantemente con casos que muestran la limitación de una didáctica enfocada exclusivamente a la creación de algoritmos. Algunos adultos, que disponen de buena inteligencia, sólo saben trabajar con las matemáticas siguiendo unos caminos muy determinados que han estudiado minuciosamente; cada variante les supone un problema y se mantienen cerrados ante cualquier enfoque distinto.

Dicho de otra manera: una didáctica enfocada hacia la creación de tipos algorítmicos suele tener un efecto perjudicial sobre el desarrollo de la comprensión de los alumnos. Se corre el peligro de formar personas que se sienten demasiado vinculadas a los métodos de cálculo y que no se dan cuenta de que los algoritmos se pueden deducir, como productos del espíritu humano, a partir de las estructuras perceptivas. Esto va muy unido a la falta de visión que algunos matemáticos tienen de la cohesión de la geometría con el espacio contemplativo y a una falta de interés por el modo en que las matemáticas se manifiesta en otras ciencias.

Con ello no pretendo decir que estos matemáticos se hayan convertido en tipos algorítmicos. Para desarrollar nuevos algoritmos se precisa una buena estructuración del campo mental. A todos ellos les han enseñado a rechazar las estructuraciones del campo perceptivo por ser supuestamente inferiores y antimatemáticas. Cuando piensan en geometría, lo hacen de manera no contemplativa puesto que prácticamente todas las estructuraciones del campo perceptivo han sido automatizadas a resultas del continuo proceso de aprendizaje, es decir, se han sustituido por valencias. Consideran los comienzos contemplativos de su propio pensar geométrico como una aberración y por ello

---

la clasificación en tipos. El comportamiento humano tiene unas características tan variables que toda clasificación resulta artificial. Sólo un reducido número de alumnos se ajustará a las características de determinado tipo.

Sin embargo la clasificación tiene una justificación psicológica: es la manera de describir una variedad muy amplia de elementos. Para hacerse una idea del comportamiento diferenciado de un grupo de personas respecto de un fenómeno determinado se crea un número (el menor posible) de tipos cuyo comportamiento frente al fenómeno en cuestión puede considerarse característico. Estos tipos simbolizan las variables. Sin embargo la distinción por tipos pierde todo su razón de ser si se pretende utilizar respecto de unos acontecimientos que no están relacionados con el fenómeno para el cual fueron ideados).

intentan, cuando les toca dar clase, que los estudios iniciales de sus alumnos carezcan en la mayor medida posible del aspecto contemplativo.

De todo ello podemos deducir que para los alumnos del primer y segundo tipos resulta vital recibir una enseñanza enfocada hacia la obtención de tipos estructurantes. No es posible lo mismo para los del tercer tipo. Podríamos plantearnos si realmente es tan deseable el desarrollo como tipos algorítmicos. Ya lo demostramos en el capítulo VI.

Se trata de ver si en las circunstancias actuales es posible impartir buenas clases de matemáticas en los institutos. La respuesta es decepcionante: las posibilidades son muy limitadas. Lo demostraré.

En primer lugar tenemos las pruebas de acceso de cálculo en las que se pide gran cantidad de conocimientos adquiridos y métodos de cálculo. Precisamente al tratarse de habilidades inculcadas se pueden hacer preguntas mucho más difíciles que las que pueden entender los alumnos. Por ello las pruebas de acceso más enfocadas hacia lo conceptual dan la impresión de ser más sencillas y más fáciles. En efecto, una vez que se sabe de qué tipo son las preguntas conceptuales, es posible preparar al alumno: un examen no es precisamente la mejor oportunidad para averiguar los conocimientos conceptuales. La consecuencia es que un instituto que pone exámenes que están más en consonancia con los requisitos exigibles, empezará a atraer a alumnos menos inteligentes. Alumnos menos inteligentes quiere decir alumnos del tercer tipo; de ahí que el enfoque se desviará hacia la obtención del tipo algorítmico, un desvío que se pretendía evitar con las pruebas de acceso modificadas. Por mucho que se sepa que el tipo actual de pruebas de acceso es malo y funesto para el desarrollo de la comprensión en la escuela básica, resulta muy difícil desviarse de dicho tipo. Se suele conseguir así lo contrario de lo que se pretendía. Se progresaría mucho más si los profesores y los maestros supieran ponerse de acuerdo al hacer las nuevas programaciones de cálculo. Véase "Directrices para un nuevo plan de estudios de cálculo para la escuela básica", Ed. Purmerend 1956.

En las circunstancias actuales tendremos que aceptar que en el primer curso del instituto hay que dedicarle mucho tiempo y mucha atención a enderezar las intenciones de los alumnos que inicialmente pretenden estudiar algoritmos en vez de afinar sus estructuraciones contemplativas. Después de ese curso quedan unos cuantos cursos más en que se pueden dar buenas clases de matemáticas. Pero pronto, demasiado pronto, se va notando la influencia del examen final. Es indudable que una buena comprensión es la mejor preparación para dicho examen. Sin embargo no es suficiente. Para poder alcanzar el tempo requerido en el examen final la mayoría de los alumnos precisan de un entrenamiento intensivo. El examen está enfocado a que la mayor parte del pensamiento se produzca de forma automática. La mayoría de los problemas se han de solucionar con métodos estudiados especialmente de cara al examen. Boermeester (II) contestó en la reunión del Grupo de Trabajo de Matemáticas del W.V.O. (ver nota 13) del 3 de marzo de 1956 a una pregunta al respecto, de si los alumnos de las escuelas Mulo[19] sólo eran capaces de resolver los problemas del examen si habían estudiado de forma intensiva el máximo número de "métodos de pensar". Y no hay que hacerse ilusiones respecto de lo que son estos "métodos de pensar": se reducen al conocimiento de las recetas correspondientes a cada tipo de problemas. Ciertamente el caso de las V.H.M.O. (ver nota 2) no es tan grave como el de las escuelas Mulo, pero no hay duda de que los "métodos de pensar" siguen jugando un papel predominante en el examen final. La cuestión es que los candidatos tendrán que *conocer* muchos resultados y "métodos de trabajo", donde el saber que está en contacto con los métodos de trabajo es muy poco útil.

Por estos motivos, el examen necesita un largo periodo de trabajo, trabajo que no es de ninguna utilidad para entender el tema. El tiempo que dure depende de la forma de ser y de la inteligencia del estudiante, pero mucho antes de que el profesor haya decidido qué método utilizará en el examen, habrá muchos estudiantes que ya hayan empezado su propio método de llegar a ese examen.

[19] Mulo = un tipo de enseñanza básica prolongada; hoy en desuso (N. del T.).

Así pues, son los dos exámenes, al principio y al final de bachillerato, los que limitan gravemente la posibilidad de que el alumno desarrolle comprensión. Esta situación se repite también en muchas escuelas experimentales. Es inevitable que también ahí el examen final deje sentir su influencia. Es cierto que entre sus profesores suele haberlos que enfocan sus clases conscientemente hacia la obtención de alumnos del tipo estructurante. Algunos padres suelen decir que estas escuelas están diseñadas exclusivamente para alumnos inteligentes, lo cual no deja de ser cierto, puesto que los alumnos del tercer tipo no tienen cabida en estos centros. Otros padres dicen que en estas escuelas los alumnos tienen más oportunidades puesto que se ha visto cómo alumnos que corrían el peligro de fracasar en otros centros han hecho un buen papel en estas escuelas experimentales. Esto también tiene su explicación: los alumnos que Morrison llama aprendedores directos tienen más posibilidades de recibir la orientación que necesitan aquí que en otros centros. Suelen ser los triunfadores de las escuelas experimentales. Hacen exámenes finales tan buenos que se suele decir: "Son alumnos tan listos que lo aprenden todo por sí solos". Y es cierto. Lo único que ha ocurrido es que las escuelas experimentales les han brindado esa orientación mientras que otras escuelas los habían rechazado.

Estas dos opiniones tienen distintas implicaciones. La primera suele llevar a una presión por parte de los padres para que los profesores rebajen las exigencias y sobre todo para empezar cuanto antes con la preparación del examen. La segunda opinión provoca que todo tipo de alumnos, que corren el peligro de fracasar en otros centros, confluyan en las escuelas experimentales. Esto no es grave siempre que sean "aprendedores directos": su presencia no suele rebajar el nivel medio de inteligencia. Sin embargo un número excesivo de aprendedores directos puede acarrear una desorganización de los comentarios en el aula. Es inevitable que las escuelas experimentales atraigan también a casos más difíciles: alumnos con frecuentes bajas por enfermedad y que, por lo tanto, pierden el hilo de las clases y también alumnos con baja inteligencia. Es muy difícil diferenciarlos. En cualquier caso, parece que en las escuelas experimentales existe como una obligación moral de admitir a los aprendedores directos y a los que enferman frecuentemente. ¿Dónde irían si no? Los alumnos que a posteriori demuestran tener una inteligencia demasiado baja tienen que ser enviados a otro tipo de centro. Los padres de este grupo son los que más protestan: culpan a las escuelas experimentales de haber enviciado a sus hijos. Sin embargo se olvidan de que si sus hijos están en las experimentales es porque no los aceptaban en ningún otro sitio.

En círculos académicos todavía se suele medir la idoneidad de un instituto según los resultados obtenidos en el examen final. Incluso admitiendo que el examen final sea un medio eficaz para determinar la consecución de los objetivos didácticos no aporta muchos datos para aquellas escuelas experimentales que admiten muchos alumnos nuevos en los cursos superiores. En tales escuelas una gran parte del alumnado no ha tenido clases, o muy pocas, enfocadas hacia el desarrollo del tipo estructurante. Además no hay que dar mucho crédito a los porcentajes de los alumnos aptos y no aptos. No es preciso ver los centros que usan los métodos notoriamente conocidos de hinchar notas. Más sentido tiene averiguar cuánto han tardado los aprobados en completar los estudios o, quizá mejor, qué ocurre más adelante con determinada promoción de alumnos admitidos.

Pero quizá sea mejor desechar completamente el examen final como punto de referencia. Preparar para un examen es una actividad radicalmente distinta a perseguir unos objetivos didácticos. Acaso el mayor error de las escuelas experimentales haya sido que se han prestado a demostrar su efectividad a la luz del examen final. Y si bien una enseñanza enfocada hacia la consecución de la comprensión *también* puede preparar para el aprobado del examen final, no tiene la pretensión de ser el medio más eficiente para la consecución de dicho aprobado. Para el caso daría igual ir a un instituto de adiestramiento en el que se pronostique estadísticamente qué problemas pueden aparecer este año y en el que se haga un amplio estudio psicológico del supervisor del examen.

Es muy poco frecuente que escuelas experimentales tengan que justificar su razón de ser con buenos resultados en los exámenes finales. Una de las mejores características de un examen es que es conservador. Debe serlo, puesto que su tarea principal es dar normas. Por ello cualquier modificación de un examen debe hacerse muy paulatinamente y debe ir en un mismo sentido. Así se explica cómo una relajación de las exigencias, si se produce de golpe, puede tener el efecto de una mayor exigencia todavía. Perturba la marcha normal de las cosas. Asimismo los tribunales de exámenes tienen que ser normativos. Esto no quiere decir que tengan que "retroceder hacia el pasado". La siguiente frase del informe del Examen Estatal del H.B.S. (ver nota 3) de 1954 es típica de este malentendido: "Casi todos los candidatos desconocían las fórmulas, tan útiles para la resolución de tantos problemas, del tipo $r = 4\,R \text{ sen } A \text{ sen } B \text{ sen } C$".

El carácter conservador del examen y de los tribunales de exámenes los hace inadecuados para evaluar la función especial de las escuelas experimentales. Tal como observa Koning (II): "La tarea de una escuela experimental, en realidad, *no* consiste en "experimentar". La palabra proviene de las ciencias pasando por la psicología. Tiene poco sentido en una situación escolar". "Quizá sería mejor llamar a la escuela experimental *la escuela para la exploración,* ya que la tarea de los colaboradores de esas escuelas consiste en *descubrir* métodos, formas de enseñanza, formas de comunidad en *situaciones escolares".* Si ésta es la tarea de la escuela experimental, no es justo que su razón de ser dependa de una institución que evalúa y *debe* evaluar según costumbres establecidas. Quizá sea bueno averiguar si los alumnos de una escuela experimental responden en cierta medida a los requisitos "normales". Sin embargo los resultados de esta averiguación no deberían servir para determinar si estas escuelas cumplen o dejan de cumplir su función (ver también Langeveld II, pág. 202 bajo). Tal como están las cosas en la actualidad, las escuelas experimentales lo tienen difícil si quieren cumplir con sus tareas de exploración y también lo tiene difícil los profesores que quieran impartir unas clases enfocadas hacia dicho objetivo.

A pesar de la enorme significación de la comprensión, nos tendremos que plantear la conveniencia de elegir su desarrollo como objetivo didáctico. En caso de que exista una opinión común de que la enseñanza ha de incluirlo, se tendrán que tomar las medidas oportunas para permitir que el profesor pueda enfocar sus clases hacia dicho objetivo sin que esto le suponga problemas.

CAPÍTULO XII

CONDICIONES QUE DEBEN EXIGIRSE A UNA DIDÁCTICA PARA UN ÓPTIMO FUNCIONAMIENTO DE LA COMPRENSIÓN

Como vimos en el capítulo I, se dice que hay comprensión cuando un sujeto es capaz de sacar conclusiones de ciertos datos que se le dan y eso en unas situaciones distintas a las situaciones en que se le dieron dichos datos. Si queremos que el niño sea consciente de haber alcanzado comprensión tendremos que ponerle en esas nuevas situaciones. Incluso cuando no ha aparecido todavía la comprensión, estas nuevas situaciones pueden servir de estímulo para su aparición, siempre que se cumplan las condiciones referidas en el capítulo V. También existen unas dificultades de tipo práctico. Para poder estar bien seguro de que hay comprensión, el niño debe presentar *él mismo* sus conclusiones. En el contexto del aula esto sólo puede ocurrir con los alumnos que tengan la palabra. Además, el poco tiempo disponible no permite comprobar todas las respuestas incorrectas para ver si alguna de ellas se basa o no en alguna comprensión (parcial). Si se trata de una comprensión muy importante, podemos interrumpir los comentarios en el aula, clarificarles la situación exacta y pedirles que pongan sus respuestas por escrito. Así conseguimos que la mayoría de la clase fije su punto de vista. Inmediatamente después podemos hacer un comentario generalizado de las respuestas de manera que las comprensiones se vayan materializando y que las comprensiones parciales se vayan ampliando.

Las comprensiones alcanzadas en un único comentario en el aula suelen ser bastante elementales: ocurre, por ejemplo, cuando tienen que reconocer una estructura ya estudiada en un nuevo contexto. Esto suele ocurrir con mucha frecuencia en clase de geometría, donde se suelen fijar en forma de teoremas estructuras contemplativas muy conocidas. Sin embargo, cuando se trate de estructuras nuevas, habrá que proceder de manera distinta. El problema se podrá introducir mediante uno o varios comentarios, pero pronto tendremos que implicar a los alumnos, mediante tareas meticulosamente seleccionadas, en alguna actividad mental más independiente. Así los alumnos dispondrán de más tiempo para reflexionar. El inconveniente es, por supuesto, que esta tarea se suele hacer en casa, con lo que perdemos seguridad de si se ha realizado realmente de forma independiente. Y es precisamente la ayuda prestada en casa la que puede tener consecuencias nefastas al tratarse de una tarea mandada con la intención de que el alumno llegue a alcanzar comprensión y no de que se cumpla determinada rutina. Es difícil encontrar otra solución. Dejar que los alumnos hagan la tarea en el mismo instituto sólo es posible en aquellos centros especialmente diseñados para ello. Me llevaría demasiado lejos enumerar las dificultades que se producirían en centros que no están diseñados para tal fin. Están muy bien descritos en un artículo de Biele y Wiebenga (I) "Consideraciones con motivo del declive del Liceo Montessori":

Tendríamos una situación ideal si

1°. los alumnos captaran claramente que el trabajo hecho por otra persona carece de valor, véase el capítulo II,

2°. los padres compartieran este criterio y actuaran en consecuencia,

3°. los alumnos no se vieran constantemente presionados por las premuras del tiempo,

4°. los alumnos se pudieran entregar con plena dedicación a sus tareas sin que el factor estimulante sea la nota que pone el profesor.

Esta situación ideal es difícil de alcanzar puesto que a los alumnos les suelen exigir que *acaben* el trabajo. Así pues, cuando no alcanzan la comprensión se ven obligados a buscar en otras direcciones. Incluso si algún profesor indica, al repartir las tareas, de que lo más importante no es acabar el trabajo, no lo comprenderán muy bien sus alumnos si no hay un número suficiente de otros profesores que les digan lo mismo. La idea de que la corrección de las respuestas es el objetivo de los deberes está tan difundida y arraigada entre padres y docentes que resulta muy difícil para un solo profesor luchar con éxito contra esa idea. No debemos esperar que los padres sepan distinguir entre deberes que hay que acabar y deberes en que los intentos por realizarlos son igual o más importantes que su finalización.

Puesto que hay varios niveles de inteligencia en un aula, no se puede evitar que haya alumnos incapaces de alcanzar los resultados por mucho tiempo que dediquen a sus deberes. Estamos hablando, claro está, de las tareas conducentes a la adquisición de la comprensión y no de aquéllas que suponen una práctica rutinaria. Por mucho que estas tareas probablemente hayan contribuido en gran medida a la formación de su comprensión, aparentemente no han avanzado mucho, lo cual resulta muy decepcionante. Los alumnos tienen así la impresión de que han perdido muchísimo el tiempo, un tiempo en el cual habrían podido realizar unas tareas aparentemente mucho más productivas. Se han quedado retrasados con la programación de matemáticas y sentirán la tentación de pedir un tipo de ayuda que les lleve a resultados directos.

Al evaluar a un alumno, el profesor tiene que considerar la comprensión alcanzada; no se puede echar la culpa al alumno de que quiera guardar las apariencias si no ha sabido alcanzar la comprensión. Si el profesor da una nota por el trabajo, ejerce una presión que suele perjudicar la adquisición de comprensión; si no da nota, da la impresión de que la tarea en cuestión es secundaria a todas las demás.

Todas estas dificultades se pueden superar si entre profesor y alumno existe tal grado de confianza que ambos son conscientes de que trabajan por un objetivo común. Intentar conseguir una situación así no es una utopía: de hecho existen centros en los que es posible convencer a los alumnos del significado de su trabajo y en los que la mayoría de los padres ofrece su plena colaboración.

Incluso cuando el profesor cuenta con todo tipo de colaboración, se necesita un control constante. En primer lugar un control que permita al profesor evaluar cómo van los progresos de la comprensión de manera que, en caso de que aparezcan perturbaciones, pueda ofrecer apoyo con los medios más eficaces. Pero también un control a través del cual el profesor pueda saber si esa cooperación todavía existe.

El primer tipo de control vuelve a plantearle grandes problemas al profesor. Si hace tests escritos, es cierto que podrá concluir que hay comprensión pero, en caso de que no lo haya, los tests no le indicarán en qué medida ha ido progresando la comprensión. Si, por ejemplo, ha preguntado si las bisectrices de los ángulos de un cuadrilátero suelen cortarse en un solo punto y ha obtenido la respuesta correcta más un razonamiento explicativo, podrá concluir que hay una comprensión total de este aspecto. Si la respuesta ha sido incorrecta, no sabrá en qué punto ha fallado el alumno. No sirve para nada darle un insuficiente. Si da una explicación ante toda la clase le quitará a ese alumno la oportunidad, precisamente con el problema en cuestión, de adquirir comprensión de la materia que pretendía evaluar.

Casi no queda otra alternativa que un control en forma de charla oral individual con cada alumno que falló el test escrito. Sólo así podremos conocer los obstáculos del alumno. Por supuesto que después se puede hacer un comentario con toda la clase para estimular a los rezagados a que reflexionen un poco más. Este método precisa de un alto nivel de organización de la enseñanza. Si pensamos que en un aula de veinte alumnos a cada uno le tendrían que tocar cuatro minutos semanales para la charla individual, esto solo ya nos llevaría dos horas semanales. ¿Disponemos realmente de este tiempo? ¿Qué hace el resto de la clase entretanto? ¿Cómo hacer para que le toque el turno a cada alumno? Estas preguntas se solucionan de distintas maneras en los centros que trabajan así. Lo cierto es que este método, por muchas soluciones que se encuentren, impone grandes exigencias a los docentes y resulta agotador. Por ello, es perfectamente comprensible que muchos docentes no deseen este método, lo cual sin embargo significa para bastantes alumnos una comprensión nula o insuficiente. Hay una solución intermedia que, aunque no les garantice los cuatro minutos semanales a los alumnos, sí se acerca bastante. Consiste en que el profesor dedique la mitad de cada hora al llamado trabajo libre. Los alumnos se ocupan de sus tareas y el profesor se pasea por el aula ayudando a los alumnos que lo precisen. Hace años que Wijdenes (I) describió este tipo de enseñanza y hay muchos profesores que reparten así su tiempo.

El gran mérito de Selz ha sido demostrar que el pensamiento humano suele discurrir con mucha frecuencia siguiendo determinados métodos de resolución. Tiene gran importancia la afirmación de que el pensamiento del hombre discurrirá mejor en la medida en que disponga de esos métodos. Podemos decir con razón que la aplicación consciente de este tipo de métodos en nuevas situaciones indica una actuación con comprensión. No he podido encontrar en ninguna de las dos partes de "Über die Gesetze des geordneten Denkverlaufs" la afirmación de que fuera bueno que el hombre aprenda el máximo número de métodos de resolución. Ya indiqué en el capítulo anterior que la incorrecta interpretación de la psicología del pensamiento de Selz tiene consecuencias negativas respecto del examen final y por ello contrarresta toda mejora de la didáctica[20].

Viene al caso indicar que el estudio de muchos métodos de resolución no conduce al buen funcionamiento de la comprensión. El mismo Selz (II, pág. 642) ha observado que métodos específicos que surgen en determinados contextos pueden perturbar la formación del método adecuado. La práctica de la enseñanza de las matemáticas demuestra que los alumnos suelen utilizar un número reducido de métodos de resolución y se esfuerzan muchísimo por reestructurar los problemas planteados adaptándolos a algún método favorito. Y ese método suele ser uno que han aprendido por sí mismos, es decir, un método de resolución que no aparece explícitamente en la materia.

Nuestra experiencia con los alumnos no indica en absoluto que tengan más fluidez en la resolución de problemas por dominar muchos métodos. Al contrario, si ya disponen de muchos métodos (lo que no suele ser el caso) es más bien porque han adquirido muchos métodos mientras se lo pasaban bien solucionando problemas. Vemos asimismo que los alumnos que han estudiado muchos métodos no saben ya dónde elegir. La trigonometría nos enseña lo que, a la larga, puede ocurrir con una enseñanza de este tipo: muchos alumnos que han aprendido a solucionar problemas con cantidad de fórmulas y trucos, se sienten bloqueados en su vida posterior ante cualquier problema goniométrico porque se dan cuenta de que han olvidado las fórmulas y los trucos y carecen de principios ordenadores para recuperarlos. En cambio, los alumnos que no han aprendido más que las definiciones de seno y tangente están mucho más aventajados puesto que han aprendido a desenvolverse con un mínimo de material y son conscientes de las posibilidades que ello entraña.

También resulta peligroso aplicar sin más el método de Sand que aparece en "Über die Erziehbarkeit von Intelligenzleistungen bei schwachbegabten Kindern". El experimento descrito en el artículo tiene cierta utilidad a nivel teórico puesto que demuestra cómo, mediante charlas y mucha paciencia y tiempo, se pueden enseñar a los niños cosas que inicialmente se consideraban demasiado difíciles. En este caso concreto se trataba de continuar unas series de las que conocían cuatro o cinco términos. La elección de este material concreto es algo desafortunada ya que el resultado del proceso de aprendizaje tiene poco sentido para el alumno: es muy difícil imaginarse situaciones en que pueda funcionar la pericia adquirida. Además no hay que hacerse demasiadas esperanzas acerca del funcionamiento de la materia en estos casos esporádicos, puesto que a nivel estructurante ha sido asimilada de forma muy poco activa.

Si en una didáctica deseamos aplicar la teoría de Selz no hemos de inculcarles a los alumnos determinados métodos de resolución, ni mucho menos darles el máximo número posible de métodos, sino que hay que darles un número no excesivo de campos ricamente estructurados, de manera que, cuando se enfrenten con problemas, puedan utilizarlos mediante la complementación de complejos. Los protocolos descritos por Van Hiele-Geldof (p. ej., el 10° comentario en el aula) demuestran que este tipo de resolución es muy frecuente.

---

[20] De la misma manera Stellwag (II, pág. 642) sustituye "comprensión de un método" por el ambiguo "conocimiento de un método".

En el capítulo V incidí en la importancia de los segmentos horizontales de la curva de aprendizaje de un proceso de aprendizaje humano complejo. A partir de ahora me referiré a dichos segmentos como mesetas (Kingsley, pág. 178). En estas mesetas se crean valencias, la comprensión que acaba de adquirir se materializa: se produce una reorganización en que se distingue lo esencial de lo accesorio y los resultados obtenidos se materializan en un lenguaje o unos símbolos. Podríamos decir que todo lo que ocurre en estas mesetas tiene por objetivo la automatización de las acciones. Esta automatización tiene pleno sentido, puesto que es condición necesaria para poder hacer el salto por encima de la siguiente comprensión hacia una meseta superior. Esta función automatizadora determina en gran medida la didáctica. Para llegar a esta automatización en matemáticas se suelen dar una serie de tareas en forma de problemas. Estos problemas habrán de basarse en la comprensión obtenida y estar enfocados hacia la formación de valencias que se necesitan para la siguiente comprensión.

Así pues, es posible determinar con exactitud qué conocimientos se requieren en matemáticas: no se trata de una serie de conocimientos técnicos que un alumno tiene que dominar medianamente para demostrar que ha estudiado matemáticas, sino de valencias necesarias para las nuevas estructuraciones en el campo del pensamiento. Al final del proceso de aprendizaje que se produce en una meseta, podemos proceder a un control más sistemático de las valencias. Sin embargo este control no debe en ningún caso hacerse demasiado pronto ya que existe el peligro de que no sea posible una vinculación racional entre las valencias y la comprensión.

Es muy importante aquella didáctica que persigue la formación de la estructuración matemática correspondiente a una determinada estructuración contemplativa. Dicho en otras palabras: aquélla que tiene por objetivo impulsar el desarrollo de algoritmos en un campo no matematizado o la búsqueda de premisas en un problema determinado.

Lo primero que se ha de hacer es averiguar los conceptos que tienen los alumnos del objeto no matemático. Cuando, por ejemplo, el profesor pretende que se estudien los cuadrados, deberá averiguar qué entienden los alumnos por cuadrado, qué elementos consideran determinantes para la existencia de un cuadrado. De todos estos conceptos el profesor acentuará aquéllos que sean importantes desde el punto de vista matemático y en caso necesario deberá añadir unos cuantos más. A continuación podrá averiguar qué cohesión presentan las propiedades del cuadrado, qué objetos se crean al omitir ciertas propiedades, etc.

En el paso siguiente se traducen las relaciones halladas al lenguaje matemático: las relaciones halladas se fijan en un campo matemático operativo. Así, por ejemplo, se pueden describir las acciones de doblar y medir echando mano de las congruencias. Una vez que se ha establecido este campo operativo, se puede ir ampliando: los alumnos llegan, mediante cálculos, a nuevos resultados, a nuevas relaciones. Una vez que se ha adquirido cierta destreza en el sistema operativo, hay que averiguar el alcance que tiene el campo: bajo qué condiciones son válidas las relaciones halladas, de qué definiciones o axiomas se ha partido, cómo relacionar un campo con otros, etc.

Es evidente que de esta manera es difícil que se produzca un desfase entre el mundo de las experiencias y el mundo artificial de las matemáticas. Si el profesor ha procedido de la manera descrita, lo último proviene claramente de lo primero. Se puede llegar al mundo matemático abstrayendo el mundo de las experiencias. Si bien esto implica un empobrecimiento conceptual considerable, se puede llegar a leyes que permiten una elaboración mucho más segura que las leyes válidas en el mundo de las experiencias. No hay que preocuparse que este método lleve mucho tiempo: cuando se empiezan a estudiar las matemáticas hay muchos objetos que se pueden llevar de forma simultánea al campo operativo matemático.

Si, frente a este método, consideramos una didáctica que parte directamente de los algoritmos, las diferencias saltan al vista. Se empieza por las definiciones matemáticas y con ellas se va construyendo el campo operativo de las matemáticas. El alcance del campo operativo no suele ser problemático: siempre queda definido por las definiciones de los objetos recogidos en el campo. Sólo empezará a ser problemático si para hacer ciertas operaciones se amplia el campo, ya que entonces existe la duda de que esa ampliación quizá no sea aplicable a otras operaciones. Al final del estudio el profesor podrá observar que el sistema desarrollado muestra cierta correspondencia con el mundo de las experiencias, por lo que existe la posibilidad de aplicar el campo operativo desarrollado en la práctica. Al proceder de esta manera, el campo operativo ha adquirido un significado independiente, los objetos han adquirido forma matemática mucho antes de establecerse una relación con el mundo de las experiencias. Existe el peligro de que no haya una vinculación mutua suficiente entre las estructuraciones del campo operativo matemático y las del mundo de las experiencias.

En Paedagogische Studiën XXXII nº 10, incidí en la existencia de niveles de pensamiento en la enseñanza de la geometría del primer curso del V.H.M.O. (ver nota 2). Dije lo siguiente como característico de esos niveles:

> "Se dice que uno ha alcanzado determinado nivel de pensamiento cuando una nueva ordenación mental respecto de ciertas operaciones le permite aplicarlas a nuevos objetos. No se puede llegar a estos niveles con el estudio; sin embargo, el profesor puede, mediante una selección apropiada de tareas, crear una situación ideal para que el alumno alcance un nivel de pensamiento superior. Se puede afirmar además que la consecución de un nivel superior aumenta considerablemente el potencial del alumno, mientras que resulta muy difícil que un alumno vuelva a caer a un nivel de pensamiento inferior. En cambio, la materia de estudio se suele olvidar muy fácilmente".

De lo anterior se deduce claramente que la consecución de cierto nivel implica simultáneamente la consecución de cierta comprensión. Sin embargo, la consecución de un nivel implica la consecución de una comprensión muy específica, una comprensión relacionada con una ordenación mental totalmente nueva. Pondré como ejemplo el primer nivel de pensamiento que se alcanza al estudiar geometría. Este nivel se alcanza cuando el alumno es capaz de aplicar de forma operativa propiedades conocidas de una figura conocida. Los alumnos que no han alcanzado dicho nivel son, por supuesto, capaces de distinguir entre rectángulo y cuadrado; también son capaces, si se esfuerzan, de decir en qué se diferencian. También saben distinguir entre un rombo y un cuadrado y decir dónde está la diferencia. Pero si alcanzan el primer nivel sabrán mucho más. Serán *capaces de utilizar* las propiedades del cuadrado para demostrar que dos segmentos son iguales o que un ángulo es recto. En el mencionado artículo di el siguiente ejemplo:

> "Cuando, por ejemplo, un alumno sabe que las diagonales de un rombo se cortan perpendicularmente por la mitad, puede concluir, tras alcanzar el primer nivel, que al cortarse dos círculos entre sí, el segmento que une los puntos de corte y el segmento que une los centros de los círculos se cortan perpendicularmente por la mitad. Quizá no vea directamente el rombo pero estará preparado si se le llama la atención sobre ello. En cambio, el alumno que no ha alcanzado el nivel no se dará cuenta de la utilidad de saber que la figura contiene un rombo. Supongamos que un alumno que no ha alcanzado todavía el nivel uno se halla en el primer estadio y un alumno que sí lo ha alcanzado se encuentra en el estadio dos. Está claro que para un alumno del primer estadio cualquier razonamiento por conexiones que incluya elementos del tipo mencionado resulta incomprensible por principio. Vemos que no se trata tanto del número de conexiones como de su carácter".

Hay dos aspectos que hacen que el concepto de nivel sea tan importante. El primero es el carácter de comprensión, el hecho de que se trata de una estructura mental nueva, siendo por lo tanto imposible que el profesor ofrezca ayuda directa (una circunstancia que ya indiqué como característica de nivel). El segundo aspecto se refiere a que nos hallamos ante una ordenación mental y, en lo que respecta al primer nivel, una ordenación mental tan radical que un alumno, que todavía se encuentra en el primer estadio, sencillamente no puede seguir con el estudio de la geometría.

En mi artículo nombro las siguientes consecuencias importantes de la existencia de niveles:

> "En primer lugar, es muy discutible la elección de una línea lógica como directriz para una didáctica. Incluso si aguamos tanto el asunto que omitimos los axiomas habituales y nos basamos en un sistema axiomático simplemente constituido por todos los teoremas evidentes para los alumnos. Porque aún en ese caso habrá que ver si los razonamientos derivados de

dichos teoremas no están a un nivel demasiado alto. Sería una grandísima casualidad si no fuera así.

En segundo lugar, parece ser que el profesor se ha de dar cuenta de las dificultades que tiene el alumno al estudiar geometría, que debe analizar la materia con mucho cuidado, pero que por otro lado no puede prevenir ni debe evitar la crisis de razonamiento, puesto que ésta conducirá al fin al nivel superior.

En tercer lugar, parece que en principio el profesor ha de tener en cuenta la composición heterogénea de la clase incluso si hubiera podido practicar un método de selección ideal: suele ocurrir que una mitad de la clase habla un lenguaje que resulta incomprensible para la otra mitad".

Estas consecuencias pueden dar la impresión de que la existencia de niveles resulta muy desagradable para la enseñanza; perturban la marcha "normal" de las cosas. Sin embargo, la realidad es que la consecución de niveles constituye la garantía de que el proceso de aprendizaje tendrá resultados duraderos. Pero es comprensible que los profesores que no entienden el verdadero carácter de las dificultades busquen medios para evitarlas. En mi artículo me referí a los siguientes:

"Hay dos medios para eliminar los problemas de manera que no aparezcan, por lo menos, en el primer curso. El primero consiste en estudiar en casa los teoremas enseñados en clase. Se trata de pedirle al alumno que sepa dar las demostraciones de una figura en una situación distinta. El alumno que todavía no se encuentra en el estadio requerido puede salir muy bien parado con este método aprendiéndose de memoria el orden de las argumentaciones. Es difícil que falle, puesto que sabe exactamente qué características de la figura debe utilizar. Si no se encuentra en el segundo estadio no sabe por qué los tiene que utilizar pero eso es algo que tampoco se le pide[21]".

"El segundo método consiste en que el profesor presente la materia de tal manera que las actividades mentales del alumno queden limitadas a un nivel inferior. El autoengaño que esto supone es mucho más reducido que con el primer método: el profesor sabe que, para trabajar, tendrá que seguir con la materia a un nivel inferior".

"Esta claro que estos dos métodos no son en absoluto una solución: lo que hacen es evitar la crisis mental que precisamente es necesaria para el desarrollo del pensamiento del alumno. Pero por otro lado, en nuestro sistema educativo, en el que todo está mediatizado por la premura del tiempo, existen pocas posibilidades de que tal crisis se produzca. El alumno pide explicaciones al profesor, es decir, pide una reducción a un nivel inferior y el profesor, contento de que la cosa vuelve a funcionar, se las da enseguida. "

Suele ocurrir en geometría que el fallo de un alumno en la búsqueda de alguna solución se achaque a su falta de inventiva. Como remedio se suele aconsejar el estudio de "métodos de pensar". Ello supone un alineamiento con la idea de Selz según la cual el pensamiento productivo se basa primordialmente en la reproducción de métodos de resolución. Es posible aceptar en principio esta teoría y sin embargo buscar el origen de las dificultades en otro sitio. En primer lugar, puede ocurrir que el campo perceptivo del alumno no esté suficientemente estructurado. Las notas que compiló mi esposa (Capítulo X, pág. 109, 115, 121) dan a entender que los alumnos que disponen de un campo perceptivo ricamente estructurado tienen también gran riqueza de ideas.

En segundo lugar, la dificultad se puede deber a que el alumno todavía no ha alcanzado el nivel requerido. Los alumnos que aún no están en el estadio adecuado carecen de la ordenación mental necesaria para poder elegir, de entre todos los métodos de resolución disponibles, el correcto. El método reductivo del profesor consiste en que *enseña* qué método de resolución corresponde a cada situación. Podemos expresar el error del profesor utilizando la terminología de

[21] Burton (pág. 158) describe las graves consecuencias de este modo de proceder.

Selz. En vez de intentar conseguir una ordenación de los métodos de resolución que permita un desarrollo más fluido de la anticipación esquemática, se intenta catalogar dichos métodos vinculándolos a ciertas situaciones. Se camina de esta manera hacia una atrofia de los procesos mentales hasta obtener "Mittelaktualisierungen". Vemos a raíz de esto el peligro que supone partir unilateralmente de la psicología sin tener en cuenta los fenómenos del propio aprendizaje.

Parece aconsejable distinguir entre tres formas de comprensión. La más sencilla es *la comprensión algorítmica*, que acompaña a una técnica. Una técnica puede consistir, p. ej., en saber calcular la altura de un triángulo si se conocen los tres lados.

Hay que distinguir esta comprensión técnica de la *comprensión más general* que permite al alumno, cuando se ha olvidado de los algoritmos, volver a encontrar el cálculo con la ayuda del teorema de Pitágoras. Una comprensión más general le permitirá también calcular las medianas del triángulo.

Finalmente, existe aquel nivel de pensamiento que supone una comprensión en una *ordenación mental totalmente nueva.*

Al establecer estas distinciones, no debemos olvidar que toda comprensión es una estructuración cuyas unidades están unidas a otras comprensiones mediante valencias. Así, puede ocurrir que una técnica esté basada en un nivel de pensamiento y un nivel de pensamiento en muchas comprensiones generales y quizá también en técnicas.

Esta distinción es muy importante para la subsistencia de la materia didáctica. Observamos que, por regla general, resulta más difícil perder los niveles de pensamiento y más fácil las técnicas. Cuando una persona vuelve a estudiar la geometría al cabo de treinta años, es muy posible que tenga que volver a empezar de cero al haberse olvidado de la materia. Sin embargo su manera de proceder será muy distinta del principiante, ya que todavía posee los niveles de pensamiento que alcanzó. Estos niveles le hacen ver la materia en un contexto más amplio, por lo que no necesita tanto acordarse de los distintos componentes.

Sin embargo, cuesta mucho más alcanzar un nivel que adquirir comprensión. Para adquirir comprensión sólo se precisa obtener determinada cohesión, una determinada estructuración mediante métodos de pensamiento conocidos. Para alcanzar un nivel, el alumno debe pasarse a nuevas formas de pensamiento. No las alcanzará hasta que no se haya dado cuenta de que no llegará mediante una reflexión normal. El profesor no puede ofrecer mucha ayuda en esta transición: cualquier explicación supondría contactar con el alumno a un nivel inferior. Nos podremos dirigir al alumno a través de un método que le sea familiar pero con ello reduciríamos sus necesidades de alzarse hasta un nivel superior. El trabajo del profesor tendrá que consistir más bien en empezar a dar indicaciones en el lenguaje correspondiente al nuevo nivel de manera que el alumno se sienta intranquilo por no entender al profesor. Esta tensión puede llevar a que el alumno supere el obstáculo. Puede ser que falle en el primer intento. En ese caso el profesor, para prevenir desánimos, podrá volver a tomar el problema tras algún tiempo con una explicación a un nivel más bajo (ver también Langeveld II, pág. 202). Por regla general este tipo de reducción en los problemas iniciales del nuevo nivel se puede hacer. Pero, al llegar al siguiente problema, el profesor deberá volver a intentar que funcione una explicación del nivel superior.

En los próximos capítulos volveré a tratar los niveles en geometría. No suele ser sencillo determinar los niveles con exactitud puesto que la didáctica suele hacer frecuente uso de medios reductivos. Es sobre todo el caso del álgebra:

Se ha estudiado el producto notable $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$. Se pide que, con ayuda de este producto, se calcule $(4ac + 3b^2)^2$. Es una cuestión de sustitución. Se espera que el alumno dé la siguiente reducción:

$$(4ac + 3b^2)^2 = (4ac)^2 + 2\,(4ac)(3b^2) + (3b^2)^2 = 16a^2c^2 + 24ab^2c + 9b^4.$$

A los alumnos les cuesta muchísimo llegar a esta reducción. Es comprensible si pensamos que se requieren muchas actividades mentales para poder efectuarla. El contenido del producto notable que se puede deducir con ayuda de reglas de cálculo conocidas es la siguiente: El cuadrado de la suma de dos números es igual a la suma del cuadrado de esos números más el doble producto de esos mismos números. Es así como los alumnos suelen aprender el teorema, pero a menudo su formulación en palabras les suena más complicada. Prácticamente todos los alumnos (12-15 años) suelen decir que entienden mucho mejor la formulación algebraica que la lingüística. Sin embargo si aceptamos que los alumnos saben lo que significa realmente el teorema, veremos que aún así el enunciado tiene una dificultad oculta. El teorema -indistintamente si está formulado algebraica o lingüísticamente- se refiere a la suma de dos *números* mientras que el enunciado pide que se sustituyan *expresiones.* En este momento se podría decir perfectamente que estas expresiones no son *más* que números de los que únicamente se dice cómo se han obtenido. Sin embargo, no es del todo cierta la explicación tranquilizadora del profesor cuando dice que 4ac y $3b^2$ en realidad no son más que números, puesto que al alumno se le fuerza a pensar en los corchetes y acto seguido se vuelven a tomar $(4ac)^2$ y $(3b^2)^2$ en sus formas básicas para resolverlos.

Este tipo de concepción doble de una expresión algebraica supone claramente un nivel de pensamiento que los alumnos, en su primer contacto con los productos notables, no han alcanzado todavía. Algunos profesores introducen la sustitución con la advertencia: "Da igual por lo que sustituyas A y B. Como si quieres poner gato y perro: $(\text{gato} + \text{perro})^2 = \text{gato}^2 + 2 \times \text{gato} \times \text{perro} + \text{perro}^2$. Pues haces lo mismo pero esta vez poniendo $(4ac + 3b^2)^2 = \ldots$". Esto supone claramente una reducción a un nivel más bajo, a un nivel mecánico. Si se trata de destrezas técnicas no está del todo mal: se llega más directamente a la formación de valencias que no a través del método que requiere más comprensión. Por otro lado, no deberemos extrañarnos, al utilizar este método, de que los alumnos escriban el cuadrado del segmente AB como A^2B^2. Al contrario, tendremos que alegrarnos de que la formación de valencias haya llegado tan lejos.

Nos podríamos preguntar si la didáctica enfocada hacia el desarrollo de algoritmos puede elevar a los alumnos hacia un nivel de pensamiento superior. La asignatura del álgebra nos enseña que es perfectamente posible. La enseñanza del álgebra está tan dirigida al aprendizaje de técnicas que sólo se pueden indicar los niveles por aproximación. Hasta la fecha no hay otras didácticas para el álgebra que aquéllas más o menos enfocadas hacia el desarrollo de una comprensión algorítmica. Y sin embargo, vemos que alumnos inteligentes, a la larga, acaban dominando el álgebra con una comprensión superior y alcanzan niveles de pensamiento más altos. Es muy comprensible: los alumnos inteligentes tienen buenas posibilidades de llegar a una ordenación mental que les permita escoger, de entre varios métodos de resolución, el más adecuado. Además, el profesor no puede estar constantemente explicando todas las cosas con pelos y señales, es decir, reducirlo todo constantemente a niveles inferiores. Con una didáctica enfocada hacia el desarrollo algorítmico es más difícil controlar la transición hacia niveles superiores que con una didáctica enfocada hacia la adquisición de comprensión: con la primera existe incluso el peligro de que esta transición ni siquiera se llegue a producir en los alumnos medianos.

Para fomentar al máximo la comprensión hay que plantearse dos cuestiones relacionadas con los niveles. La primera, que se refiere a la didáctica específica de la asignatura, es la siguiente: ¿Dónde se hallan los niveles específicos de esta asignatura? En lo que respecta a la geometría trataremos, como ya dije antes, esta cuestión en los siguientes capítulos. La segunda cuestión, que es más de índole pedagógico, dice: ¿Cómo llevar al alumno hasta la situación idónea para que pueda dar el salto hacia el siguiente nivel? Estudiaremos la cuestión tras analizar cómo se consigue que los alumnos se interesen por la adquisición de comprensión.

En el capítulo V estudié los factores que fomentaban la formación de la comprensión y también los factores que la impedían. Ahora es importante saber cómo se puede conseguir que los alumnos quieran adquirir comprensión. Muchos alumnos se han acostumbrado en la escuela básica a dominar la materia exclusivamente mediante métodos de cálculo. Por ello, la tarea del profesor será, en primer lugar, convencer a los alumnos de que la comprensión es mucho mejor. La práctica demuestra que las fuerzas que empujan hacia las técnicas de cálculo son tan fuertes que el profesor tiene que pelear durante todo el bachillerato para demostrar que la comprensión, a la larga, vence.

Lo puede hacer, por ejemplo, demostrando que la comprensión muchas veces supone un considerable ahorro de tiempo. En geometría descriptiva es mucho más fácil comprender cómo se hallan con el método proyectivo las proyecciones de un punto, de una línea, el paso de un plano y hacer los dibujos utilizando esta comprensión, que no mediante el conjunto de reglas. En trigonometría suele ser mucho más sencillo llegar a una solución a través de la comprensión geométrica que enfrentarse al problema siguiendo ciertas pautas con ayuda de un arsenal de fórmulas. Pero tampoco resulta demasiado fácil para el profesor: mientras que los alumnos del tipo estructurante todavía están trabajando duro por adquirir comprensión, los del tipo algorítmico ya son capaces de resolver un buen número de problemas típicos. Por ello será necesario sacar a colación, incluso en los cursos superiores, el significado de la comprensión. Cuando los profesores se pongan de acuerdo en esta cuestión no tardarán en aparecer los resultados.

En cambio, habrá que advertir a los alumnos inteligentes, en especial a los aprendedores directos, que no sobreestimen la comprensión. Habrá que hacerles ver también la importancia del cálculo técnico. Suele ocurrir que estos alumnos tienen malos resultados porque no dominan suficientemente los algoritmos. Les basta con unos cuantos problemas para convencerse de que han adquirido la comprensión y tienden a dejar de lado la resolución de problemas en cuanto tienen ese convencimiento. En consecuencia practican poco y sólo se forma un número insuficiente de valencias. Los alumnos normales habrán de seguir practicando hasta que se forme el número suficiente de unidades sobre las que se pueda erigir la nueva estructuración, la nueva comprensión. A los alumnos inteligentes les basta con el reducido número de unidades formadas por las valencias para que surja la comprensión. De esta manera el proceso de aprendizaje en sí no fuerza a los alumnos inteligentes a una rutina determinada. Por ello el profesor debe evitar manifestar su entusiasmo por la comprensión delante de estos alumnos. Les podrá convencer de la importancia de la rutina si, para medir las destrezas técnicas, hace tests continuos en donde se exijan reacciones rápidas y prácticamente no se toleren errores.

Hemos visto que no es ninguna sinecura conseguir que ciertos alumnos aprecien la comprensión. Ahora bien, es mucho más difícil llevarles a unas condiciones que les permitan hacer el salto hacia el siguiente nivel de pensamiento. En efecto, es necesario que se den cuenta de las limitaciones de los métodos de pensamiento de que disponen hasta el momento. Y eso sólo se conseguirá cuando durante mucho tiempo hayan intentado en vano resolver problemas de la manera que saben. Es comprensible que antes duden de la benevolencia y la competencia del profesor que de su propia capacidad puesto que están trabajando con todo lo que conocen hasta ese momento. Muchas veces ayuda comentarlo en la clase: en estos comentarios los alumnos se enteran de que otros, que ya han alcanzado el nivel, son capaces de hablar con el profesor en un lenguaje que ellos todavía desconocen. Esto puede suponerles un reto para seguir perseverando. Es curioso observar que los alumnos que han de trabajar, por determinados motivos, con sus propias fuerzas (es decir sin profesor), toman ese obstáculo con mucha más filosofía. Probablemente ya se habrán preparado con anterioridad para complicados trabajos mentales, por lo que están más dispuestos a aceptar que las nuevas circunstancias también conllevarán nuevos métodos de pensar. En cualquier caso, el profesor, cuando empiece con materia que requiera un nuevo nivel, tendrá que preparar a sus alumnos. Tendrá que decirles que sigue algo muy difícil que requiere mucho esfuerzo y energía. Será gran responsabilidad suya si a algún alumno le da demasiadas ayudas, produciéndose así una reducción a un nivel inferior. Si este alumno se dedica a informar a sus compañeros, existe un gran peligro de que fracase la transición hacia un nivel superior.

Vimos en el capítulo VII que la comprensión puede agudizar el sentido crítico del alumno. Sólo podremos sacar partido de esta posibilidad si la tenemos en cuenta a la hora de elaborar la didáctica. El profesor debería sentirse encantado si el alumno recibe sus explicaciones de manera crítica, le pide los motivos por los que dibuja determinada línea auxiliar aquí, por qué da una definición de esta manera y no de otra, por qué da la demostración de aquella manera, si es que la da. El alumno tiene incluso el derecho a preguntar por qué el profesor da determinado tema, para qué sirve, etc. Al profesor le puede fastidiar tener que responder siempre de sus actos. Sin embargo estas explicaciones amplían la visión del alumno y previenen un anquilosamiento por parte del profesor. Muchas veces el alumno tiene la sensación de que los teoremas son medidas de orden impuestas unilateralmente. Esto lo vemos en el lenguaje que utiliza: el denominador y numerador de un quebrado se *pueden* dividir por el mismo número, al multiplicar potencias de una misma base se *han de* sumar dichas potencias, etc. Al igual que los términos "tachar" y "llevar al otro lado" hay que considerar estas expresiones como indicaciones de acciones de valencia. La formación de estas valencias es necesaria para poder calcular; el hecho de llamarlas de alguna manera agiliza el proceso mental. Pero lo característico de una postura no crítica es que los alumnos no suelen ser capaces de darles a dichas acciones más contenido de lo que indica su denominación primitiva.

Huelga decir que no hay que saludar con el mismo entusiasmo cualquier crítica por parte del alumno. Cuando dicha crítica no se basa suficientemente en comprensión, cuando el alumno es incapaz de presentar una contrapropuesta razonada, el profesor deberá rechazar la crítica. También tendrá que procurar, en su enfoque crítico, que los alumnos no se vuelvan demasiado críticos. Existe el peligro de que empiecen a buscar pegas en todos los sitios con lo que se sentirán frenados en sus procesos mentales y no se atreverán a seguir pensando.

Se puede fomentar la transferencia en la didáctica si nos ocupamos de ella de manera consciente. Así, por ejemplo, se puede fomentar la transferencia transmisora de buenos hábitos mentales si el profesor demuestra cómo enfocar un problema no matemático. Hace ver cómo, primero, se intenta descubrir la esencia del problema, cómo se separan las afirmaciones correctas de las pertinentes, cómo se despoja el problema de su contenido emocional, como se intenta llegar a través del razonamiento a una solución y, finalmente, cómo se interpreta dicha solución.

La transferencia que se produce al aplicar las matemáticas en otros campos, como p. ej. la física o la mecánica, se fomentará mejor si estos problemas se ven en clase. El énfasis deberá recaer en la dificultad de ajustar dichos problemas a cánones matemáticos. Una vez que se haya conseguido y que se haya encontrado la solución, el profesor deberá hacer que los alumnos estudien a fondo cómo interpretar las respuestas halladas. Esta posibilidad se da en el estudio del cálculo diferencial. El profesor puede empezar por estudiar el concepto de velocidad. Puede explicar que, por mucho que la velocidad sea un concepto conocido, es difícil establecer con exactitud en qué consiste y cómo se ha de determinar. Con este análisis se ponen, al mismo tiempo, los fundamentos para el cálculo diferencial. De la misma manera, un estudio sobre redondear números y calcular con números aproximados puede ir precedido de un análisis de distintas magnitudes físicas. En este análisis se puede averiguar por qué estas magnitudes siempre se miden en números aproximados y a continuación descubrir la relaciones que existen entre dichas magnitudes. Al estudiar la exactitud de los resultados estaremos al mismo tiempo poniendo los fundamentos de la teoría del cálculo con números aproximados. Así pues se puede averiguar, también en matemáticas, cómo se hallan las relaciones entre magnitudes físicas y cómo se puede deducir que una magnitud está en función de otra. Este tipo de estudio es de gran ayuda para entender el concepto matemático de función.

En algunos institutos se ha optado por una enseñanza puramente individual, basándose en el convencimiento de que el marco del aula no es el adecuado para alcanzar comprensión -una conclusión cuya exactitud he demostrado al principio del presente capítulo. Una enseñanza puramente individual tiene casi los mismos inconvenientes que una enseñanza en el marco del aula. Si se prescinde de las clases grupales, se pierde el estímulo que procede del trabajo común y la construcción conjunta. También hemos visto que los comentarios en el aula constituyen uno de los pocos medios disponibles para eliminar posibles resistencias contra la consecución de un nivel superior. Podemos afirmar que los comentarios en el aula tendrán asimismo una influencia positiva para la consecución de una comprensión general. En efecto, si estructuramos estos comentarios de tal manera que el grupo busque determinadas soluciones conjuntamente, es de esperar que el esfuerzo mental de aquéllos que participan en los comentarios pueda servir de ejemplo a los demás. Muchos alumnos se darán cuenta sólo a través del ejemplo de sus compañeros de que en matemáticas no se suele hallar directamente la verdad, sino que supone un laborioso trabajo de búsqueda.

CAPÍTULO XIII

POSIBILIDADES DE REALIZAR EN LA PRÁCTICA UNA DIDÁCTICA QUE PERSIGA EL MÁXIMO DESARROLLO DE LA COMPRENSIÓN

En el capítulo XI hemos visto que la situación de la enseñanza en nuestro país ofrece pocas posibilidades para llevar a cabo una didáctica enfocada hacia el desarrollo de la comprensión. Incluso llegamos a la conclusión de que era discutible poner este desarrollo como objetivo de la enseñanza secundaria. Al enumerar las condiciones que debe cumplir una didáctica para el óptimo funcionamiento de la comprensión, admitimos tácitamente en el capítulo XII que no tendrían validez las limitaciones impuestas por el estado general actual. Esta asunción está justificada. El objetivo del presente estudio es fomentar que la situación de la enseñanza cambie de tal manera que se creen más posibilidades de desarrollar la comprensión. Para ello es necesario que tengamos en cuenta la eliminación de ciertas limitaciones. Esta misma idea ha guiado al Grupo de Trabajo de Matemáticas. Casi todo intento de renovación de la educación y de la enseñanza está destinado al fracaso si se parte de la idea de que es imposible modificar las programaciones de las clases y de los exámenes.

Sin embargo en el presente capítulo pretendo partir desde un punto de vista distinto. Quiero averiguar qué posibilidades le quedan al profesor que, por un lado, se siente atado por las programaciones vigentes pero que, por otro lado, es consciente de su papel como educador y pretende desarrollar la comprensión en todos aquellos casos en que hay algo más que el simple conocimiento de una técnica. Vimos en el capítulo XI que estas posibilidades son muy reducidas, tan reducidas que el profesor se desanima; en este capítulo mostraré que estas posibilidades son de tal índole que vale le pena que un profesor concienciado las tenga en cuenta.

Las circunstancias que limitan el desarrollo de la comprensión son, tal como vimos en el capítulo XI, las siguientes:

1°. Una disposición errónea que los alumnos arrastran de la enseñanza básica, influenciada también por el examen de acceso;

2°. El examen final adaptado a la didáctica errónea que se aplica en todos los sitios;

3°. Las fuerzas que durante la educación tienden en sentido opuesto al desarrollo de la comprensión. Hay que pensar en la presión de los padres y las direcciones de los centros, la influencia de los libros de texto, de los compañeros, de las personas que dan una ayuda suplementaria a los alumnos sin consultar al profesor.

A veces hay que añadir a estas condiciones:

4°. Clases demasiado numerosas.

En el capítulo VI indiqué la mejor manera que tiene el profesor para provocar un cambio en la disposición errónea que el alumno trae de la escuela básica. Consiste en intentar reconducir la intención del alumno, modificar su disposición. Lo hará con pleno convencimiento ya que sabe que con ello cumple con una importante obligación de todo docente y que su trabajo tiene una función social vital. Por lo menos le costará dos años, pero es una tarea que le resultará agradecida ya que los resultados no tardarán en aparecer.

La influencia del examen final se deja sentir por regla general al principio del último curso. Esta influencia va en aumento y durante todo el último curso se hace dominante. Poco se puede hacer para modificar esto. El profesor tendrá que resignarse a aceptar que lo que cuenta son los *resultados* del examen final. Así pues, durante el último curso y quizá también durante parte del penúltimo, el profesor deberá hallar un camino por el que se obtengan buenos resultados en el examen final sin por ello tener que renunciar a una importante función educadora del trabajo que está realizando. Para una parte, quizá una gran parte, del alumnado, se podrán utilizar los problemas del examen final para alcanzar una integración de la materia (ver capítulo X). Sólo tendremos éxito si no exigimos que resuelvan estos problemas en un tiempo corto: al principio harán falta unos días, quizá una semana incluso. El valor integrador de estas tareas se echará parcialmente a perder si se realiza delante de todo el grupo: el hecho de que cada alumno vaya aportando su granito de arena a la solución no garantiza una disposición integradora en cada alumno individual. Pero incluso si el profesor se ve forzado a efectuar un análisis de un problema delante de todo el grupo, puede a menudo ejercer una gran influencia sobre el perfeccionamiento de la comprensión de sus alumnos. Pondré como ejemplo el primer problema de álgebra del H.B.S. (ver nota 3) de 1955. Dice lo siguiente:

"Los términos de una serie vienen determinados por $t_n = \dfrac{(2 + x)^{n-1}}{(2 + 3x)^n}$, donde *n* es un número entero positivo.

a. Demuestra que esta serie es una serie geométrica.

b. ¿Para qué valores de *x* existe $\lim\limits_{n \to \infty} s_n$, si con s_n nos referimos a la suma de los *n* primeros términos de la serie?

c. El límite referido en *b* se denota por S. Escribe S en función de *x*.

d. Haz una representación gráfica de S en función de *x* para los valores de *x* para los que exista $\lim\limits_{n \to \infty} s_n$ ".

Este problema no es ni mejor ni peor que otros. La respuesta a la pregunta *a* es muy sencilla para los alumnos al haber *aprendido* que en estos casos hay que dividir t_n por t_{n-1}. El cociente $\dfrac{2 + x}{2 + 3x}$ es independiente de *n* y los alumnos han *aprendido* que es una característica de las series.

También son capaces de enfrentarse con la cuestión *b* ya que conocen la regla según la cual para una serie geométrica existe $\lim\limits_{n \to \infty} s_n$ si la relación se sitúa entre -1 y +1. De manera que tienen que solucionar: $-1 < \dfrac{2 + x}{2 + 3x} < +1$. A partir de una gráfica (o reducción algebraica) pueden deducir que esa condición se cumple con $x > 0$ y con $x < -1$.

Los alumnos conocen la regla según la cual el límite de la suma de la serie geométrica es igual al primer término dividido por 1 menos la relación. La respuesta de *c* es $\dfrac{\dfrac{1}{2 + 3x}}{1 - \dfrac{2 + x}{2 + 3x}} = \dfrac{1}{2x}$.

Dibujar una gráfica, tal como se pide en la cuestión *d*, es muy sencillo. Sin embargo los alumnos no deben olvidarse de aislar la zona en que el límite no existe (el área entre 0 y 1). El único inconveniente que se le puede reprochar a esta problema es que se dé tan poco tiempo para solucionarlo (sobre media hora), por lo que los alumnos tiene poco tiempo para reflexionar. La consecuencia es que con ello no se mide tanto la comprensión como, sobre todo, la rutina.

No obstante, este inconveniente no existe si el profesor analiza el problema en clase. En tal caso se pueden sacar a colación todo tipo de problemas. En la cuestión *a* un alumno podrá dar la solución: En una serie geométrica $t_n = ar^{n-1}$, se tiene que $t_n = \frac{(2 + x)^{n-1}}{(2 + 3x)^n}$, de ahí que $r = \frac{2 + x}{2 + 3x}$ y $a = \frac{1}{2 + 3x}$. Un comentario en clase podrá aclarar que este razonamiento es correcto si se observa que *a* y *r* determinan una serie geométrica que es idéntica, término por término, con la serie del enunciado. Si un alumno se ha olvidado de las fórmulas de las series geométricas, se le puede hacer ver que puede salir adelante con tal de que sepa cómo derivar cada término de su predecesor. Incluso se puede encontrar de esta manera la condición que ha de cumplirse para que exista el límite de la suma de la serie.

Este aprender a recuperar cosas tiene un gran valor educativo ya que los alumnos aprenden *que* es posible recuperar muchas cosas que aparentemente han olvidado y se dan cuenta de *cómo* funciona esta recuperación. Si se soluciona en grupo la relación $-1 < \frac{2 + x}{2 + 3x} < +1$, los alumnos se han de dar cuenta de que es natural que se piense enseguida en hacer una gráfica. Precisamente la gráfica es la forma *ideal* para obtener una idea clara del desarrollo de una función. La cuestión *c* puede servir para recordar la manera refinada en que se obtiene la fórmula deseada. Tras solucionar la cuestión *d,* queda todavía algo muy importante que sin embargo no se pide en el examen final: la interpretación del resultado obtenido.

Con todo esto he querido demostrar que el análisis de los problemas del examen final en clase puede resultar muy educativo y apasionante. No obstante, este tipo de tratamiento no es en absoluto el camino que garantice buenos resultados en el examen final. Lo más importante de este último curso es la formación de valencias: los alumnos han de saber inmediatamente que hay que dividir t_n por t_{n-1}; han de saber que $S = \frac{a}{1 - r}$ y no importa tanto la manera en que se ha conseguido dicho resultado. Al solucionar la relación $-1 < \frac{2 + x}{2 + 3x} < +1$, no importa tanto que la solución se base en un principio muy general con la ayuda de la gráfica de $\frac{2 + x}{2 + 3x}$. Lo que importa mucho más es que esta forma de tratar el problema producirá las valencias suficientes. De no ser así, se habrá de buscar un método diferente más idóneo, por mucho que esta idoneidad sólo dure hasta la fecha del examen final.

Así pues, vemos que hay que hacer de tripas corazón. Si elegimos un tratamiento cuidadoso podemos conseguir que los problemas del examen final contribuyan de manera positiva al entendimiento y a la comprensión de los alumnos. Sin embargo esta clase de tratamiento disminuirá a medida que se vaya acercando el examen final.

La tercera dificultad que hallamos en nuestro camino hacia una buena didáctica es la siguiente: la existencia de fuerzas que contrarrestan este desarrollo. Son terriblemente desagradables (ver también Burton, pág. 187). El profesor que sabe lo que hay en juego no debe obviarlos. Sobre todo tendrá que comprender a las fuerzas contrarias que se encuentre en su camino. Hay que perdonar a los interesados que no entiendan muy bien que la escuela debe educar y que uno de los resultados de esa educación lo constituye la comprensión. El profesor tendrá que llegar a darles la razón cuando no estén dispuestos a considerar todo intento de cambio como una mejora. Por mucho que el desarrollo de la sociedad se deba a los pioneros de antaño, a menudo a esa misma sociedad la salvan de la perdición aquéllos que saben frenar a los pioneros impetuosos. Además, el profesor se puede consolar con la idea de que las instancias con capacidad de decisión entienden perfectamente el significado del V.H.M.O. (ver nota 2). El que las cosas cambien tan poco se debe mucho más a las dificultades de alcanzar mejores enfoques que a una supuesta satisfacción con la situación actual. Por ello es preciso que los profesores dedicados a la renovación didáctica colaboren entre sí en este terreno todo lo que puedan y den la publicidad suficiente a sus trabajos y resultados.

Es evidente que las clases demasiado numerosas tienen una influencia negativa sobre la didáctica. Con clases demasiado grandes, el profesor no tiene tiempo suficiente para atender a los alumnos más flojos con conversaciones individuales. Por ello cae en la tentación de enseñar algoritmos. Este camino permite que también los más flojos salgan adelante en el contexto del aula. Sin embargo el profesor concienciado tendrá que actuar de manera distinta. Tendrá que ir a por la comprensión y resignarse a que algunos alumnos flojos, que tendrían más posibilidades en un grupo reducido, tengan dificultades. Es preferible a que consiga que el máximo número de alumnos alcance unos resultados que sólo serán aparentes. Nos tenemos que dar cuenta de que el método algorítmico conducirá también a los estudiantes medianos hacia resultados *aparentes* puesto que al elegir este método se perjudicará a un número superior de alumnos. Así pues, las clases demasiado numerosas no impiden que se imparta una buena didáctica, pero sí que fuerzan al profesor a trabajar en un ámbito de inteligencia más reducido.

Hemos de concluir que incluso en las circunstancias actuales vale la pena que un profesor concienciado dedique su esfuerzo a la consecución de comprensión. En los dos primeros cursos tendrá que dedicarse a mejorar la disposición de sus alumnos. Habrá de resignarse a que parte del resultado se vuelva a perder bajo la influencia del examen final. Hará bien en enfrentarse con firmeza a aquéllos que valoran más las apariencias que los progresos efectivos. Pero pese a todos los impedimentos y trabas, se sabrá fortalecido por la idea de que sus clases tienen sentido y que realmente ha hecho todo lo posible en las condiciones actuales.

CAPITULO XIV

CONSIDERACIONES GENERALES SOBRE LA DIDÁCTICA DE LA GEOMETRÍA ENFOCADA AL MÁXIMO DESARROLLO DE LA COMPRENSIÓN

Si queremos averiguar qué condiciones debe cumplir la didáctica de la geometría para favorecer el máximo desarrollo de la comprensión, nos habremos de plantear la cuestión importante de cuáles son los objetivos especiales de la enseñanza de la geometría.

En la "Programación para Matemáticas del V.H.M.O. (ver nota 2)" leemos lo siguiente:

> "*a.* La geometría aporta unos conocimientos mediante los cuales aprendemos a entender y dominar las propiedades del espacio en el que se desarrolla la vida.
>
> *b.* Ninguna otra asignatura ofrece al alumno una oportunidad tan grande de construir un sistema científico cohesionado así como la posibilidad de aprender a valorar que sus conocimientos se amplían gracias a la reflexión pura en lugar de a la experimentación".

El primer objetivo se suele subestimar, por un lado, porque se cree que la enseñanza de la geometría aporta poco al conocimiento y entendimiento del espacio y, por otro, porque se cree que este conocimiento y entendimiento es tan sencillo que este objetivo es algo que apenas hay que tener en cuenta.

La duda de que la enseñanza de la geometría pueda servir de apoyo al conocimiento del espacio es comprensible pero no justificada. Hasta la fecha ha habido pocos intentos prácticos de averiguar cómo se habría de remodelar la didáctica de la geometría para cumplir dicho objetivo. El profesor que desee cumplir este primer objetivo habrá de darse cuenta de que el niño, al empezar con la geometría, ya lleva unos doce años formándose una idea de lo que es el espacio. El profesor se ha de imponer como tarea procurar que la estructura geométrica que se desarrolla bajo su supervisión se vaya entretejiendo con la estructura contemplativa ya existente. En caso contrario la enseñanza de la geometría conducirá a un ente abstracto que coexistirá, sin tener mucha relación, con la construcción concreta ya existente. Una buena enseñanza de la geometría debe partir de la estructura contemplativa preexistente, debe hacer que el alumno tome conciencia de ella en la medida de lo necesario y debe rastrear y rellenar las lagunas. Sólo después se pueden tomar caminos abstractos.

El conocimiento y el entendimiento del espacio conlleva muchas más cosas de las que podríamos suponer a primera vista. Lo veremos inmediatamente a la luz de una listado de todos los aspectos geométricos que pueden surgir.

a. Aprender a ver y reconocer figuras geométricas.

b. Divisiones de plano y espacio.

c. El uso y la colocación de figuras congruentes.

d. Figuras semejantes.

e. Apilamiento de figuras.

f. Transformación de figuras.

g. Simetría con respecto a un plano.

h. Simetría con respecto a una recta.

i. Simetría con respecto a un punto.

j. Superficie y contenido.

k. Movimientos espaciales: traslación, rotación, movimiento helicoidal.

l. Curvaturas de la trayectoria.

m. La no-congruencia en sentido general de figuras geométricas que sean imágenes especulares entre sí.

n. Representaciones del espacio sobre un plano.

o. Sección de figuras.

El punto *a* es importante ya que un mayor conocimiento de las formas permite una mayor elección de aplicaciones.

El punto *b* se refiere a suelos de baldosas y parqué, con la división del espacio en cubos y prismas hexagonales regulares (panales).

El punto *c* se refiere a fabricaciones en serie, intercambiabilidad de unidades (accesorios y bombillas) y contiene también un elemento estético: ubicaciones rítmicas de objetos congruentes, platos, cucharas y tenedores congruentes.

El punto *d* tiene su aplicación en mapas, ampliaciones y reducciones de fotos.

El punto *e* se refiere al relleno completo del espacio, como los ladrillos de un muro; o se puede referir también a apilamientos en los que queda espacio vacío, como por ejemplo el apilamiento de bolas congruentes y no congruentes. También se pueden obtener cuerpos por apilamiento de otros: una casa se puede ver como el apilamiento de un paralelepípedo rectangular y de un prisma triangular truncado.

El punto *f* tiene que ver con la vista: un cuadrado puede ser visto como un trapecio, un rectángulo, un rombo, un cuadrilátero irregular, etc. También tiene que ver con transformaciones mecánicas: compresión, torsión, etc.

Los puntos *g, h* e *i* son importantes para el estudio de figuras de la naturaleza o de la técnica. También incluyen un elemento estético: una disposición simétrica suele ser "rígida", una figura que tiene un eje de simetría pero no un plano de simetría da la sensación de "dinamismo", etc.

El punto *j* está relacionado con la determinación y transmisión de propiedad, como terrenos, madera, etc. El significado de este punto es tan evidente que muchos sólo buscan aquí el significado práctico de la geometría.

Los puntos *k, l* y *o* son importantes sobre todo para problemas técnicos.

El punto *m* recuerda que los objetos simétricos no suelen ser intercambiables: zapato izquierdo y derecho, etc.

El punto *n* incluye p. ej. las representaciones en perspectiva, las representaciones con plano, vistas frontales y laterales.

Todos estos temas le resultan más o menos familiares al alumno antes de empezar a estudiar geometría. Sin embargo suele tener nociones muy vagas. Por lo general las ha visto superficialmente, sin reflexionar demasiado. Es importante que aprenda a percibir mejor estas nociones y conozca las relaciones entre los fenómenos percibidos. Por ello al principio del curso tendremos que dedicar mucho tiempo a este aspecto. En su conocido trabajo Übungensammlung, la Sra. Ehrenfest (I) da muchas ideas sobre qué hacer al principio del curso. Los temas citados son tan variados y tienen tantos puntos de contacto con el mundo de las experiencias que resulta difícil imaginar que el alumno no sienta ningún interés.

Es importante tener esto en cuenta si pretendemos motivar a los niños. Así como en el primer año se trata más bien de lo que tienen que *hacer*, en los siguientes cursos adquiere más importancia *la labor intelectual* que han de realizar (De Groot, II). En los últimos tiempos podemos detectar cierta infravaloración de la geometría según la cual es de poca utilidad para los alumnos. Es por eso que se ha convertido en asignatura optativa en el programa del M.M.S.[22] y que en el gymnasium-α la estereometría se ha ido sustituyendo por la historia de las matemáticas. A mi juicio esta infravaloración y sus consecuencias están absolutamente injustificadas. Habría sido mejor, antes de proceder a la supresión de la geometría, estudiar si la didáctica no necesitaba una reorganización en profundidad y unos contenidos distintos. Resultaría mucho más difícil justificar por qué se mantiene el álgebra en el programa del M.M.S. y del gymnasium-α. Por muy sorprendente que parezca jamás se ha cuestionado la importancia que pudiera tener el álgebra para estos alumnos.

Da la impresión de que la supresión de la geometría no se ha debido tanto al convencimiento de que sea menos importante para los alumnos sino al hecho de que con una enseñanza algorítmica es más difícil conseguir los resultados aparentes deseados.

El segundo objetivo ha sido hasta la fecha determinante en la enseñanza de la geometría. Ninguna otra asignatura matemática pone tanta atención en que cada teorema se derive del precedente -en ninguna otra se dice con tanta claridad qué es el enunciado y qué se pide. Ninguna otra da tanta importancia a la universalidad de las demostraciones. Sin embargo esto no es suficiente para alcanzar el objetivo deseado. Si pretendemos convencer a los alumnos de que el método tiene sentido, tendremos que demostrarlo con ejemplos. Se habrán de dar cuenta por sí mismos de que la elaboración de secuencias lógicas es una algo eficiente. Tendremos que demostrar con ejemplos que si no se comprueba la universalidad de determinado método podrán surgir errores. Sólo cuando hayamos convencido a los alumnos del sentido del método matemático podremos esperar que lo adopten.

Una didáctica enfocada hacia la realización del segundo objetivo no tiene por qué chocar con los requisitos exigidos para la realización del primer objetivo. Si queremos ordenar las propiedades que se perciben en el espacio nos daremos cuenta enseguida de que necesitamos una ordenación lógica. Sólo el grado de exactitud dependerá del tipo de centro.

El estudio de la geometría también es necesario para los alumnos puesto que se aplica en otras asignaturas. Sin embargo no es necesario mencionar esto como un objetivo más ya que una didáctica de la geometría que cumpla con el primer objetivo ya es por sí sola suficiente para hacer funcionar la geometría en otras asignaturas.

Si nos fijamos en la manera en que se imparte la geometría hoy en día y qué se pide en los exámenes, nos llama la atención la preponderancia que tienen los problemas, una preponderancia que no está justificada por los objetivos mencionados. Si analizamos las funciones que cumplen los problemas, hallamos las siguientes:

1°. A través de los problemas los alumnos aprenden a concienciarse de la manera en que determinadas propiedades aparecen en las figuras y cómo sacar partido de ellas.

2°. A través de los problemas los alumnos practican la búsqueda de propiedades que saltan a la mente en determinadas situaciones.

3°. Los problemas pueden introducir nuevas teorías.

4°. Los problemas pueden servir para que los alumnos aprendan a hallar el campo operativo correspondiente a una situación concreta.

[22] M.M.S. = Middelbare MeisjesSchool = Bachillerato para Chicas (N. del T.).

5°. Los problemas pueden apelar al sentido de belleza. Por ejemplo en una figura se pueden descubrir propiedades sorprendentes y preguntarse si estas propiedades son válidas para todo un conjunto de figuras.

6°. Los problemas responden a la necesidad de los alumnos de resolver enigmas.

7°. Los problemas pueden contribuir a la integración de la materia de estudio.

Esta claro pues que los problemas tienen mucha utilidad. Sin embargo es importante darse cuenta, al dar un problema, de la función determinada que habrá de cumplir y preguntarse si tiene las características necesarias para cumplir dicha función.

Por ejemplo, al tratar el teorema de Pitágoras, tiene sentido pedir que en el triángulo, cuyos lados son conocidos, se calculen todo tipo de segmentos (alturas, medianas, etc.). Se aplica en este caso la primera función reseñada. El problema no cumplirá tanto su función si además pedimos al alumno que diga qué otros teoremas tiene que utilizar.

La teoría de los ángulos inscritos y los arcos del círculo se puede introducir con el siguiente problema: demuestra que en un cuadrilátero de subtensas la suma de los ángulos opuestos es de 180°. Este problema combina perfectamente la tercera y la séptima funciones. Para aprovechar al máximo estas funciones es preferible no precipitarse en dar indicaciones para la solución.

Los problemas que tienen la segunda función sirven para estructurar un conjunto de métodos de resolución. Estos problemas se aprovecharán al máximo si se presentan como una serie de problemas con la misma función. Si pedimos que resuelvan una serie en la que cada problema apela a características distintas, la diversidad de las posibilidades irá desvelando paulatinamente el tipo de método de resolución. Si con cada problema o clase de problema diéramos a conocer el método a utilizar, no conseguiríamos más que un sistema de valencias insuficientemente estructurado que duraría bien poco.

Los problemas que cumplen la cuarta función habrán de tener, sobre todo al principio, un carácter claramente señalador, es decir que los alumnos tendrán que recordarlos más tarde perfectamente. Pensemos en soluciones con ayuda de la trigonometría, de cálculo de segmentos, de cálculo de ángulos, etc.

Los problemas de la quinta función pueden tratarse en clase con pleno éxito. El profesor ha de vigilar en tal caso que la atención de los alumnos no se vea distraída por aspectos secundarios.

Los problemas del sexto tipo por supuesto sólo tendrán éxito con aquellos alumnos que gusten de enigmas. Es mejor buscar problemas que cumplen al mismo tiempo la séptima función. Para los alumnos que no gusten de los enigmas tendremos que buscar problemas mixtos sencillos para poder integrar la materia de estudio. No les deberemos exigir que resuelvan en un tiempo determinado los problemas diseñados para integrar la materia. No podemos saber de antemano si serán capaces de solucionarlos. Precisamente aquellos problemas destinados a dirigir toda la personalidad del alumno hacia un objetivo geométrico no pueden prepararse de manera que el éxito esté prácticamente asegurado. ¿Cómo se podría hablar de un direccionalidad total de la personalidad si la solución ya estuviera establecida de antemano mediante una serie de valencias?

Una gran parte de los problemas que aparecen en las antologías son inadecuados al no estar clara la función que han de cumplir. Los problemas que piden la construcción de triángulos en que, aparte de los ángulos y los lados, se dan también las sumas y las restas de los lados, son inadecuados puesto que para solucionarlos se necesita conocer el nuevo sistema algorítmico que precisamente se ha de construir para ese tipo de problemas. Por la misma razón, hay que rechazar los problemas que piden la construcción de líneas en el espacio que han de cumplir todo tipo de condiciones e igualmente la construcción de secciones de pirámides, etc.

En el examen final el alumno puede demostrar a través de los problemas:

1°. que conoce la manera como actúan las características estudiadas en las figuras y cómo sacar partido de ellas,

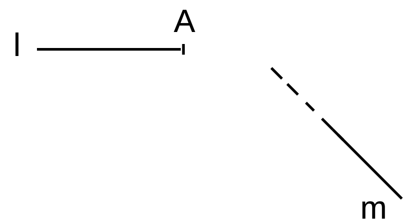
2°. que sabe qué características saltan a la mente en una situación determinada,

3°. que en una situación concreta sabe hallar el campo operativo correspondiente.

Sin embargo sólo se puede decir de un problema de examen final que es adecuado si vale la pena tratar, en función de los objetivos de la enseñanza de la geometría, las características que en él aparecen y los campos operativos que se han de usar en la solución. Parece ser que la mayoría de los problemas del examen final *no* cumplen esta condición. Las características que los alumnos han de conocer para resolverlos y los campos operativos que han de usar van mucho más allá que los que resultan útiles para los objetivos de la geometría.

La situación en que una persona puede demostrar que ha aprendido las características del espacio en que se desarrolla toda su vida se suele presentar en forma de problema. Así pues, sería de suponer que los problemas que se dan en las clases de geometría tienen la función de preparar a las personas para estas situaciones.

Veamos alguno de estos problemas:



1. Uno sacado de la práctica de la construcción de carreteras y canales. Un camino proyectado empieza por el trazado *l*, se convierte en el punto A en una curva circular, con radio y centro desconocidos, y esta curva acaba en el trazado *m*. Se pide el radio y el centro de la curva así como el punto en que la curva pasa al trazado *m*.

La solución se halla dibujando la intersección entre la perpendicular de A sobre *l* y la bisectriz del ángulo entre *l* y *m*.

2. Una aplicación de la geometría en geografía natural. Una persona se encuentra a 7 m por encima del nivel del mar. ¿Qué distancia hay entre esta persona y el horizonte?

La solución se deriva directamente de la elevación a la potencia del círculo.

3. Otro sacado de la construcción de carreteras y canales.

Para calcular si dos palos tiene la misma altura una persona se sube a tal altura que la parte superior de los palos coincide con el horizonte y concluye que ambos palos tienen la misma altura. ¿Qué error ha cometido?

La solución se halla aplicando dos veces la elevación a la potencia. No es fácil hallar esta solución pero es debido a que no es sencillo interpretar los datos de forma geométrica.

4. De la astronomía.

¿Cómo se puede calcular la latitud geográfica si conocemos la declinación de determinada estrella y hemos medido su altura de culminación en un lugar concreto?

La solución se halla sumando directamente los ángulos y los arcos.

Y así podríamos seguir. Es muy raro encontrar un problema que requiera una preparación específica. Uno de estos casos excepcionales podría ser el método de Snellius para determinar el lugar de un punto si conocemos los ángulos bajo los cuales se ven tres puntos fijos con respecto al punto que hay que determinar. Este problema es útil para topógrafos, para la navegación y el balizamiento y por tanto su estudio correspondería más bien a ciertas carreras especiales. No obstante hay que decir que para este problema existen en la práctica unos impresos en que sólo hay que rellenar las indicaciones para llegar a la solución. Vemos pues que si buscamos una explicación para gran número de problemas que los alumnos realizan en el instituto no hallaremos las respuestas en aplicaciones directas de la geometría.

Para determinar la didáctica de la geometría es importante plantearse qué cosas tiene que "inculcar" el profesor a sus alumnos, es decir, qué valencias tienen que formarse en los alumnos. ¿Tiene algún sentido que los alumnos reproduzcan partes de la teoría? ¿Han de saberse fórmulas, y en caso afirmativo, cuáles? ¿Han de saber inmediatamente por dónde se ha de buscar la solución en ciertos tipos de problemas? ¿Han de conocer de memoria ciertos teoremas, las definiciones de las figuras más importantes? La orientación de la didáctica dependerá en gran medida de la respuesta a estas preguntas.

Hay que distinguir claramente entre valencias que cumplen una función en el proceso de aprendizaje y valencias que no son más que un fenómeno acompañante. Vimos en el capítulo XII que en las mesetas de la curva de aprendizaje se forman valencias que tienen por objeto la creación de unidades que puedan servir para la siguiente estructuración del campo de pensamiento. Entonces ya indiqué que al final del proceso de aprendizaje que se desarrolla en las mesetas es bueno que haya un control sistemático de las valencias por parte del profesor. Se trata pues de valencias que cumplen determinada función y el profesor que dirige el proceso de aprendizaje ha de dedicarles la necesaria atención. Sin embargo no hay que perder de vista que estas valencias a veces no son más que temporales: una vez que se ha alcanzado la estructuración superior es posible que esas valencias pierdan su razón de ser. Por ejemplo, puede resultar útil que, para que surja la comprensión en la relación entre ángulos inscritos y arcos de un círculo, los alumnos se sepan al dedillo ciertos teoremas auxiliares. Sin embargo este conocimiento deja de tener sentido una vez se ha formado la nueva comprensión. Es evidente que después es absurdo evaluar el conocimiento de estos teoremas.

Pero ocurre algo muy distinto con las valencias que aparecen como fenómenos acompañantes en el proceso de aprendizaje y que no juegan un papel imprescindible. Son valencias que se forman "espontáneamente" al prolongarse el proceso durante cierto tiempo. Son la demostración de que el alumno ha estado estudiando la materia de manera intensiva, a no ser que disponga de una excelente memoria o se haya empeñado en dominar estas valencias mediante algún proceso especial. Estas valencias de algo que no cumple ninguna función de cara a los objetivos de la enseñanza de la geometría han de considerarse como un producto secundario de dicha enseñanza. Pueden formarse de trozos de teoría, de fórmulas, de métodos de resolución, etc. No sería muy táctico que el profesor manifestara alguna apreciación por la formación de estas valencias ya que con ello encaminaría el proceso de aprendizaje hacia unas direcciones en las que la materia de estudio carece de toda utilidad.

Una cuestión muy importante es si los alumnos deben ser capaces de reproducir demostraciones de teoremas. ¿O quizá deben ser capaces de hallarlos por sí solos? ¿O a lo mejor basta con que sepan en qué parte del libro pueden consultar dichas demostraciones? El segundo objetivo didáctico dice que en geometría el alumno tiene la oportunidad de construirse un sistema científico cohesionado y tiene la posibilidad de aprender a valorar cómo sus conocimientos aumentan gracias a la reflexión pura. Esta afirmación sugiere claramente que los alumnos han de poder hallar las demostraciones por sí mismos. Y es evidente que si tienen el campo de pensamiento bien estructurado serán capaces de hallar muchas de estas demostraciones ellos solos. Por otra parte sabemos por la historia de la geometría que muchas demostraciones no han sido fáciles de hallar. Seríamos excesivamente optimistas si esperáramos que los alumnos lograran en unos años lo que ha costado siglos de trabajo a muchos científicos de renombre. Esa no es la manera de entender el segundo objetivo. El profesor más bien ha de intentar, mediante la explicación de algunas demostraciones en clase, que en los alumnos se vaya formando una estructura mental a base de métodos de demostración de manera que, tras algún tiempo, sean capaces de hallar por sí solos las demostraciones en nuevas situaciones.

Pero si dividimos los alumnos en futuros "consumidores" y "productores" de las matemáticas, habremos de admitir que como mínimo debemos dudar de que la capacidad de demostración tenga alguna utilidad para los alumnos del primer grupo. A ellos les basta con saber qué principios sustentan un sistema lógico cohesionado y la razón por la que ese sistema es preferible frente a otro ordenado de manera distinta. Quizá deseamos que esos alumnos *sientan por propia experiencia* que el sistema ordenado de forma lógica resulta tan eficiente y por ello nos parece adecuado que sepan reproducir alguna (o quizá la totalidad) de las demostraciones. Sin embargo no debemos esperar demasiadas cosas de esa reproducción: el saber reproducir demostraciones no garantiza en absoluto que los alumnos valoren de alguna manera especial la cohesión lógica. Ni siquiera garantiza que hayan comprendido bien las demostraciones reproducidas. La enseñanza tendría mucha más utilidad si se dedicara más tiempo a convencer a los alumnos mediante ejemplos claros de la utilidad de las cohesiones lógicas y menos tiempo a su reproducción. Quizá estaría muy bien si el profesor se contentara con crear en los alumnos la necesidad de consultar las demostraciones de los teoremas importantes. La cuestión de cómo se ha de materializar esa necesidad no viene muy al caso en este momento.

Todo lo anterior también tiene mucho que ver con la organización de los libros de texto. Si partimos de la idea de que los alumnos han de ser capaces de reproducir demostraciones, la tarea del profesor será mucho más llevadera si disponen de un libro de texto que les ayude a estudiar las demostraciones. Este libro habrá de evolucionar a medida que lo hagan los alumnos, es decir, cada demostración debe estar en el nivel que hayan alcanzado. Esta es precisamente la característica que define al libro de texto. Si partimos de la idea de que los alumnos han de aprender a hallar las demostraciones por sí solos, el libro de texto habrá de contener las indicaciones necesarias para que puedan hallarlas. Estas indicaciones deberán ser de tal manera que en los alumnos se vaya formando poco a poco una estructura a base de métodos de demostración. Los alumnos que reciben un tipo de enseñanza que, al encontrarse con un teorema, sienten la necesidad de consultar la demostración en algún sitio, han de tener alguna obra de consulta. Este tipo de libro ya no se puede considerar un libro de texto puesto que no tiene por qué evolucionar a medida que lo hace el alumno. Habrá de ser más bien un libro científico escrito por personas que tienen cierta familiaridad con la geometría. Pero el libro no servirá en absoluto para que los alumnos adquieran esa familiaridad con la materia.

La gran dificultad es que ningún profesor desea exclusivamente que las demostraciones se sepan reproducir, ni exclusivamente que los alumnos las hallen por sí solos ni exclusivamente que las sepan consultar. Todo profesor admite que la capacidad de reproducción de algunos teoremas puede resultar útil, valora el que un alumno sea capaz de hallar pos sí solo las demostraciones y espera que un alumno que se haya olvidado de alguna demostración sienta la necesidad de consultarla. El libro de texto tendría que cumplir esas tres funciones. La combinación de las dos primeras choca con dificultades puesto que los profesores no se ponen muy de acuerdo sobre la capacidad de sus alumnos. Pero la combinación con la tercera función es completamente imposible ya que un libro de texto, tal como hemos visto, no puede funcionar como una obra de referencia. La cuestión de cómo lograr la distribución de estas tres funciones queda sin resolver.

CAPÍTULO XV

LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA EN EL PRIMER CURSO DE LA ESCUELA SECUNDARIA

Si deseamos un desarrollo máximo de la comprensión, la enseñanza de la geometría en el primer curso deberá cumplir las siguientes condiciones:

a. Deberá ajustarse a experiencias espaciales conocidas[23].

b. Deberá de cuidar de que el alumno adquiera experiencias que todavía necesita antes de emprender el estudio del espacio en su sentido matemático.

c. Deberá capacitar al alumno para expresar sus experiencias espaciales en lenguaje matemático.

d. Deberá ser de tal manera que exista una motivación suficiente y justificada por la materia.

e. Deberá tener en cuenta las transiciones de unos niveles a otros.

f. Deberá ajustarse a la forma de pensar del alumno.

g. Deberá suscitar en el alumno la necesidad de servirse del sistema matemático.

Las experiencias espaciales preexistentes.

En el capítulo anterior ya indiqué que por regla general a los alumnos primero hay que concienciarlos de las experiencias espaciales de que ya disponen. Esta concienciación es el principio del estudio de las matemáticas. Puesto que las experiencias varían de un individuo a otro, existen buenas posibilidades de que se produzca un intercambio de ideas acerca de estas experiencias. Esto casi siempre tendrá lugar en un comentario en clase.

La manera más fácil de ajustarse a las experiencias de los alumnos es hacerles distinguir y reconocer ciertas figuras geométricas. Ellos ya conocen muchas: cuadrado, rectángulo, círculo, rombo, cometa, cubo, prisma (caja de pinturas), pirámide, esfera. Si les preguntamos por la diferencia entre las figuras (entre rectángulo y cuadrado, entre cuadrado y rombo, entre prisma y cubo) se fijarán en los aspectos conceptuales. El hecho de que los alumnos conozcan muchas figuras al entrar en el instituto no significa que se tengan que ver todas directamente. Por mucho que en las primeras clases les guste demostrar sus conocimientos sobre figuras geométricas no es necesario compilar a estos niveles una lista de dichos conocimientos. Tiene mucha más importancia averiguar qué conceptos conocidos (a medias) serán de utilidad para el funcionamiento posterior de la geometría. Serán éstos los que tendrán que recibir la máxima atención.

---

[23] La expresión "experiencias espaciales" ha de entenderse aquí y en lo sucesivo en el sentido (limitado) del contexto geométrico. Esto no significa que estas expresiones hayan de estar totalmente desprovistas de su contenido emocional habiéndose convertido en matemáticas. Sólo significa que nos limitamos a aquellas experiencias de las que tenemos la certeza de que contribuirán al conocimiento de la geometría (actual). En la génesis del concepto espacial estas experiencias no aparecerán en un estadio muy temprano. En primer lugar nos encontraremos con la manera en que se vive el espacio, cómo se ve lo lejano, cómo se alcanza algo, cómo se desplazan las cosas. Para este tipo de vivencias remito a Langeveld (IV): "El Lugar Oculto en la vida del niño" y (V, p. 91) "Das Ding in der Welt des Kindes". Podemos admitir que cuando el niño entra en la escuela secundaria, ya se ha producido en él la separación entre estos dos tipos de experiencias por lo que sabrá perfectamente, según el contexto, qué tipo de experiencia se le está pidiendo.

Uno de los conceptos de vital importancia para la ordenación de figuras y el establecimiento de relaciones es la simetría. Nos referimos sobre todo a la simetría en el espacio con respecto al plano y a la simetría en el plano con respecto a una recta de dicho plano. Los alumnos conocen la simetría sobre todo por contemplación directa. La mayoría también sabe que al doblar una hoja en un plano se obtiene una figura simétrica. Sin embargo conocen mucho menos la relación que tiene un espejo con el concepto de simetría. No es malo que los alumnos aprendan a utilizar un espejo como medio auxiliar para determinar relaciones simétricas. La estructura contemplativa que va unida al concepto de simetría también lo está al concepto de perpendicularidad de dos rectas. Es muy fácil basar sobre la simetría las construcciones fundamentales de la geometría plana.

Los alumnos ya estuvieron en contacto con el concepto de semejanza cuando tuvieron que dibujar a escala y hacer mapas. La congruencia se puede introducir como un caso especial de semejanza. Observemos de paso que entre los objetos de uso diario son muchos más los congruentes que los uniformes por lo que los alumnos en realidad han tenido mucho más contacto con la congruencia que con la semejanza. Sin embargo esto no puede servir de argumento para empezar primero con el estudio de la congruencia. La congruencia no tiene nada de nuevo para los alumnos: para ellos los objetos y las figuras congruentes son idénticas. Sólo cuando lo único que distingue los objetos congruentes, es decir, el lugar que ocupan, tenga importancia se podrá fijar la atención de los alumnos sobre la congruencia. Esto ocurre por ejemplo cuando hay que rellenar planos con figuras congruentes. Por supuesto también se podrá estudiar la importancia de la congruencia en la sociedad si es que los alumnos sienten algún interés por el tema.

Superficie y volumen son conceptos que el niño conoce bien a nivel de experiencias. Ya los conoce desde la escuela básica[24]. Puesto que la cohesión lógica de estos conceptos aparece en un estadio bastante avanzado de la geometría se tiene la tendencia a ignorarlos en el primer curso. No es del todo correcto proceder de esta manera: estos temas son básicos para la física y su tratamiento en la escuela básica deja mucho que desear. Para muchos alumnos resulta todo un descubrimiento ver que polígonos equivalentes aditivos tienen la misma superficie. Y eso a pesar de que esta propiedad es el fundamento del concepto de superficie; tanto es así que la medición de superficies es totalmente imposible sin la ayuda de esta propiedad. Lo mayoría de los alumnos calculan el volumen de un prisma multiplicando largo, ancho y altura sin ver la relación que existe entre esta fórmula y el número de cubos unitarios que puede contener el prisma. Si estos temas no se tocan, existe el peligro de que estas fórmulas aprendidas e insuficientemente entendidas se vinculen tan fuertemente a determinadas valencias que los alumnos sean incapaces de someterlas a un análisis crítico.

Los alumnos ya han tenido contacto con la división de superficies y espacios a través de los rompecabezas y las cajas de construcciones. Nos podemos ajustar a esa primera experiencia explicándoles la relación entre los ángulos de un polígono. Podemos aprovechar la segunda experiencia para hallar las relaciones entre distintos tipos de poliedros.

La concienciación de relaciones de tipo mecánico puede hacerse con ayuda de material consistente en barras o franjas unidas mediante bisagras. Con ello los alumnos pueden construir modelos móviles p. ej. paralelogramos que pueden transformar en rectángulos, o rombos que pueden transformar en cuadrados. También se pueden unir con bisagras las diagonales y añadir los lados mediante franjas estriadas. De esta manera podemos hacerles (re)descubrir las relaciones entre las figuras planas.

[24] Los conceptos formados en la escuela básica suelen tener un carácter muy esquemático. Aparte del contexto geométrico, el concepto de superficie remite sobre todo a 1°) aquello que se encuentra en la parte externa y 2°) aquello que es liso, áspero, ranurado, frío, etc. Sería bueno averiguar si la vinculación del concepto geométrico formado en la escuela básica con este concepto general es lo suficientemente fuerte. La idea de contenido, aparte del contexto geométrico, remite antes a aquello que se encuentra en un espacio determinado que al espacio que ocupa determinado objeto. De ahí que en los problemas de la enseñanza técnica elemental del S.I.T.O. se distinga consecuentemente entre contenido y volumen.

Todos estos ejemplos sirven para demostrar cómo podemos concienciar en parte a los alumnos de las experiencias que ya poseen. El material se realiza en el instituto para asegurarse de que los alumnos disponen de las experiencias fundamentales. Esto no tiene que ver con un supuesto intento de darle una base experimental a la geometría. No se toman decisiones en base a los experimentos ya que supondría una flagrante contradicción con la esencia de las matemáticas. Pero sí que debemos intentar que la estructura contemplativa sea lo más completa posible para evitar que la estructura matemática carezca de base firme.

La traducción de las experiencias espaciales al lenguaje geométrico.

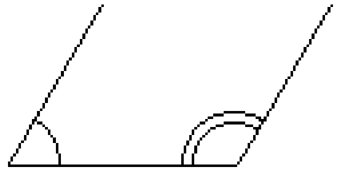
El buen uso del lenguaje geométrico comienza dándoles a las figuras sus denominaciones correctas. La mejor manera de formar las valencias es mediante un uso activo del lenguaje. Esto lo podemos introducir con una charla con los alumnos acerca de las figuras en su significado específico. No es necesario empezar con definiciones: estas surgen de manera implícita al comparar las distintas figuras. Desde el principio habrá que vigilar, para evitar un conflicto con el uso general matemático, que no se pierda el nombre genérico al añadir nuevas propiedades: un cuadrado sigue perteneciendo a la categoría de los rectángulos, un rectángulo a la categoría de los paralelogramos, etc. Aquí nos encontramos con uno de esos casos, que no son infrecuentes, en que la estructura matemática que se pretende introducir no se corresponde con la estructura lingüística existente. Si no le prestamos la suficiente atención habrá problemas a la hora de hacer la conversión desde el lenguaje hacia las matemáticas y, al revés, desde las matemáticas hacia el lenguaje. La consecuencia será una transferencia insuficiente.

Además de los nombres de las figuras, el uso activo del lenguaje practica también las denominaciones correctas de las relaciones entre las distintas figuras. Las relaciones debidas a acciones, como doblar, proyectar, medir, etc. tienen una importancia especial. De esta manera la transformación del lenguaje posibilita la transición de la estructura contemplativa a la estructura matemática. Así por ejemplo, después de estudiar la congruencia podremos enseñar con ejemplos elaborados cómo se traduce al lenguaje geométrico el doblamiento de una figura o el corrimiento de un triángulo.

Los niveles de pensamiento del primer curso.

En el capítulo XII incidí en la importancia de los niveles de pensamiento e indiqué la manera en que se pueden reconocer. Como ejemplo me referí al primer nivel de pensamiento que nos encontramos en geometría. Es el que alcanza un alumno cuando es capaz de aplicar de manera operativa las propiedades conocidas de una figura conocida. Esto significa que debe ser capaz de clasificar las figuras geométricas en categorías y deducir del hecho de que una figura pertenezca a determinado categoría que tendrá las propiedades de dicha categoría. Un alumno que haya alcanzado el primer nivel es capaz de denominar isósceles a un triángulo del que se le han dicho que dos de sus lados son iguales. Pero también será capaz de deducir de este hecho que dos ángulos determinados son idénticos.

El primer nivel se manifiesta cuando observamos cierto estancamiento en los progresos de los alumnos en cuanto tienen que hacer un uso sistemático de las propiedades de la figuras. Al principio hay unos cuantos alumnos que no lo saben hacer pero unas semanas después observamos que todos utilizan esas propiedades activamente.



El segundo nivel aparece cuando se han de utilizar relaciones geométricas. Ocurre cuando por ejemplo en determinada figura hay que deducir, utilizando la congruencia de dos triángulos, que dos segmentos son idénticos. Cuesta mucho más alcanzar este nivel que el primero. Mucho tiempo después de que los alumnos han entendido las condiciones que convierten dos triángulos en congruentes todavía encontramos alumnos incapaces de aplicar este conocimiento para demostrar la igualdad de ángulos y lados. De igual manera hay un largo trecho entre el momento en que los alumnos han aprendido las propiedades de una figura formada por dos rectas paralelas seccionadas por una tercera y el momento en que son capaces de utilizar dichas propiedades de manera operativa. Esto lo comprobamos en la incapacidad de los alumnos para demostrar que los ángulos opuestos de un paralelogramo son idénticos.

Algunos profesores intentan evitar este estancamiento haciéndoles memorizar teoremas según las cuales los dos ángulos de una figura U se suplementan y que dos ángulos con el mismo suplemento son idénticos. Si aplicamos estos teoremas sucesivamente llegamos a la misma conclusión: que los ángulos opuestos de un paralelogramo son idénticos. Con ello se ha reducido el segundo nivel al primero. Esto es un flaco favor para los alumnos: procediendo de esta manera se ha eliminado la necesidad de llegar a una estructuración de las relaciones entre las figuras. Puesto que no hay ninguna prisa en tratar este teorema, sería mucho mejor posponerlo hasta el segundo curso para cuando tengamos la certeza de que existe un número suficiente de alumnos inteligentes que hayan alcanzado el segundo nivel.

La preparación para el salto hacia el primer nivel deberá consistir sobre todo en provocar al alumno para que piense por sí solo. Hay que procurar que el alumno se sienta profundamente insatisfecho por tener que recurrir constantemente a su profesor o a sus compañeros en busca de ayuda. La situación a principios de curso no suele ser la óptima para la transición hacia el primer nivel ya que los alumnos suelen tener una predisposición reproductiva debido al examen de acceso. Además el profesor todavía tiene que granjearse la confianza de los alumnos: han de tener el convencimiento de que los altos requisitos impuestos por las tareas diseñadas para la consecución del primer nivel son razonables.

El paso al segundo nivel es mucho más radical. Por ello acarrea muchas más dificultades que el primero, por mucho que haya ido mejorando la predisposición de los alumnos. *Cada vez que fracasan* en sus intentos, el profesor puede aliviar la tensión creada prestándoles ayuda al primer nivel. Así se les evita la desagradable sensación de no poder hacerse con la materia. Sin embargo, para que siga imperando la necesidad de hacer el salto, es preciso que las comentarios del profesor sigan estando en el segundo nivel. Estos comentarios incitarán a los rezagados a esforzarse puesto que irá aumentando el número de alumnos que participan en dichos comentarios.

La aproximación a una ordenación lógica en el primer curso.

No tiene sentido empezar de forma sistemática durante el primer curso con una ordenación lógica de las propiedades puesto que el segundo nivel no se suele alcanzar a lo largo de ese curso. Un comienzo tan temprano provocaría la formación de valencias antes de que exista una base racional para ellas. Es difícil imaginarnos un caso más evidente de conocimientos aparentes: se pretende que los niños adquieran un sistema lógico, y por tanto racional, en forma de valencias y ello en un momento en que existe la certeza de que los alumnos aún no comprenden las relaciones racionales del sistema. No se puede en absoluto empezar a estudiar en el primer curso el sistema lógico de la geometría. No se puede empezar desde abajo, desde los axiomas, pero tampoco desde la mitad, donde aparecen los teoremas no triviales.

Así pues, la aproximación al sistema lógico no podrá consistir en una adquisición demasiado temprana de valencias para el edificio que hay que construir. El profesor tendrá que centrarse en suscitar en los alumnos la necesidad de servirse del sistema matemático. Es decir, los alumnos tendrán que empezar a ver, al solucionar problemas, la utilidad de averiguar primero de manera general qué datos pueden servir para la resolución. Los alumnos también tendrán que ser capaces de ver, con un solo ejemplo, el sentido que tiene ordenar una número de teoremas en una serie cohesionada de manera lógica. De esta manera, sólo después de darse cuenta durante el primer curso de la cohesión que existe entre las propiedades de las figuras y entre las relaciones entre las figuras, y sólo después de convencerse de la utilidad que tiene estudiar estas relaciones, habrá llegado por fin el momento de intentar ordenar el máximo número de teoremas en ese sistema lógico. Más tarde se podrán ir colocando en ese sistema los teoremas que vayan apareciendo después. Esto por supuesto no significa que a partir de ahora haya que proceder de forma deductiva. El método deductivo no suele ser muy recomendable y menos en la enseñanza a niños (ver también Van Est, I y Van Dantzig, II).

Hay dos reglas importantes con respecto al desarrollo lógico posterior. Son las siguientes:

1. No se darán jamás definiciones, teoremas o demostraciones que no tengan sentido para los alumnos.

2. Si nos vemos en la obligación de presentar un aspecto teórico de una manera más sencilla de la que realmente le corresponde a un sistema lógico, tendremos que elegir esa manera de forma que incluya en esencia los mismos elementos que la forma puramente matemática.

Estas dos reglas son en realidad complementarias. Si queremos convencer a los alumnos de que el razonamiento geométrico es el modo más adecuado de enfocar determinados problemas, no deberemos incluir ahora toda una serie de elementos que para ellos sólo tendrán sentido mucho más tarde. Sin embargo las simplificaciones habrán de ser escogidas minuciosamente para que los alumnos puedan reconocer los razonamientos de ahora en aquéllos que estudiarán más tarde y que serán mucho más exactos.

Así por ejemplo no tiene sentido, al principio de la geometría, poner el acento en el hecho de que un segmento sólo tiene largo y no grosor. Cuando se introduce el concepto de segmento como arista de un cubo o frontera entre luz y sombra, los alumnos ven por sí mismos que no se le puede adscribir grosor a un segmento. A través de los comentarios en clase nos podremos convencer fácilmente de la exactitud de esta afirmación. Tampoco tiene sentido demostrar o definir que todos los ángulos rectos son idénticos. Cuando les pedimos que formen un triángulo rectángulo plegando un papel dos veces esa igualdad es evidente para cualquier alumno. Cualquier duda que en este estadio se pueda introducir acerca de la igualdad de estos ángulos no provocará más que una pérdida de confianza en el sentido de la geometría. Un ejemplo de la aplicación de la segunda regla: doblando una hoja podemos demostrar que en un triángulo isósceles los ángulos de la base son idénticos. Esta demostración es perfectamente aceptable si más tarde, al estudiar la congruencia, demostramos que este razonamiento se puede repetir paso por paso de forma más geométrica.

El primer nivel de pensamiento en geometría consiste en que el alumno entiende lo que significa un teorema. De ahí que no tenga sentido empezar con el estudio sistemático de teoremas antes de que la mayoría de los alumnos hayan alcanzado el primer nivel. Más tarde podremos hablar de teoremas pero esto no significa que podamos empezar con el sistema lógico. Es evidente: todavía no se ha estudiado la cohesión lógica entre los teoremas. Puesto que los alumnos todavía no han alcanzado el segundo nivel y no conocen las relaciones entre las figuras geométricas no hay que esperar que conozcan las relaciones entre los teoremas. En las notas de van Hiele-Geldof (pág. 100 y ss.) vemos la manera en que nos podemos aproximar con suma cautela a este tipo de cohesión entre teoremas con alumnos que han alcanzado el primer nivel.

Quiero dejar aparte la cuestión de si es deseable ver de una manera más o menos sistemática la cohesión lógica de los teoremas durante el primer curso. No es en absoluto necesario desde el punto de vista de la programación: hay mucha materia que se podría dar antes. Pero en el caso de que se quisiera demostrar la cohesión lógica de un número de teoremas, habríamos de aconsejar con toda seguridad la serie de teoremas relacionados con el paralelismo. La mayoría de los grupos de teoremas no admitan bien este tipo de ordenación. Es cierto que algunos libros de texto incluyen árboles genealógicos de teoremas pero en realidad dan una impresión muy engañosa. En esos árboles parece que cada teorema proviene sólo del anterior. Pero si analizamos las demostraciones vemos que casi cada teorema está directamente relacionado con un gran número de teoremas precedentes. En lugar de un árbol genealógico de teoremas tenemos una ramificación muy compleja de teoremas interrelacionados. Nos podemos dar una idea de la complejidad de esta red si representamos con sus interrelaciones únicamente los teoremas referentes al paralelismo de la estereometría y sus correspondientes axiomas: incluso esto ya cuesta de abarcar.

Sin embargo los teoremas referentes al paralelismo en la geometría plana tienen una cohesión más sencilla. Es cierto que cada teorema está relacionado con otros varios pero estas interrelaciones no resultan demasiado abrumadoras. Veamos un ejemplo de una ordenación de este tipo:

a. axioma: si tres ángulos de un cuadrilátero son rectos, el cuarto también lo será (este cuadrilátero se llama rectángulo).

b. teorema: un rectángulo tiene dos ejes de simetría.

c. teorema: los lados opuestos de un rectángulo son iguales.

d. teorema: la suma de los ángulos de un rectángulo es de 360°.

e. teorema: una diagonal divide un rectángulo en dos triángulos congruentes.

f. teorema: la suma de los ángulos de un triángulo rectángulo es de 180°.

g. teorema: la suma de los ángulos de un triángulo cualquiera es de 180°.

h. teorema: la suma de los ángulos de un cuadrilátero es de 360°.

i. definición: dos rectas, ambas perpendiculares a otra, se llaman paralelas.

j. definición: un cuadrilátero con dos lados paralelos se llama trapecio.

k. definición: un trapecio con dos ángulos rectos se llama trapecio rectángulo.

l. teorema: la suma de los ángulos no rectos de un trapecio rectángulo es de 180°.

m. teorema: si dos rectas paralelas son cortadas por otra, los ángulos interiores al mismo lado de la recta de intersección suman 180°.

Está claro que esta serie se puede interrelacionar de una manera totalmente distinta: podríamos haber partido de un axioma distinto. Esta serie, cuyo historial describe Fladt (I, pág. 30 y ss.) tiene para el primer curso la gran ventaja de que todos los razonamientos se efectúan en el primer nivel. La demostración del teorema b resulta algo complicada pero de momento puede sustituirse por plegado de papel.

Suscitar la apreciación del sistema lógico.

La cuestión de cómo suscitar en el alumno una apreciación del sistema lógico puede formularse de otra manera: ¿Cómo educar al alumno hasta convertirlo en matemático? La respuesta será: precediendo al alumno como matemático. Ya vimos en este mismo capítulo que es discutible que la función de la geometría consista en convencer a todos los alumnos del método matemático. Y en tanto esto sea discutible no podemos saber si es apropiado educarlos para matemáticos. Precederles como matemáticos tampoco resulta fácil de definir. Aún tendremos que esperar mucho antes de que los matemáticos nos den una definición unánime de las características típicas del enfoque matemático.

En el primer curso se puede dar la materia de manera que resulte importante para los futuros "consumidores" de las matemáticas y al mismo tiempo empezar también con una estructuración en el sentido matemático. Van Hiele-Geldof (I) da una serie de ejemplos. El capítulo "Baldosas" es muy convincente.

Una vez que este tipo de ejemplos ha convencido a los alumnos de la utilidad de una ordenación lógica, podemos lanzarnos a intentar ampliarla a todo el campo de la geometría. La puesta en práctica de esta idea conduce a los axiomas y las definiciones. Pero antes de poder empezar con todo eso ya ha acabado el primer curso.

La materia del primer curso.

Un lugar importante de la programación lo ocupa la enumeración de las figuras, con sus propiedades, que se han de estudiar en los distintos cursos. Esto se justifica desde dos puntos de vista: el conocimiento de las figuras con sus propiedades es el primer objetivo para los alumnos y además es importante que en los institutos se estudien las mismas figuras y las mismas propiedades de manera que los alumnos no tengan dificultades si tiene que cambiar de centro.

El inconveniente de dividir la materia según las figuras es que no se tiene en cuenta la progresión del pensamiento del niño. Se persigue un tipo de globalidad de manera que, cuando se trata determinada figura, se pretende enseñar todas las propiedades importantes de la figura incluyendo aquéllas que se encuentran por encima del nivel del niño.

Casi todas las figuras geométricas que se ven en el V.H.M.O. (ver nota 2) podrían estudiarse perfectamente en el primer curso incidiendo sólo en *algunas* de sus propiedades. Esta manera de enfocar las figuras sería sin duda útil para las matemáticas y sus aplicaciones. Un ejemplo de esas propiedades que se imparten en el primer curso en todos sus aspectos sin que realmente sea adecuado hacerlo, es el teorema según el cual la suma de dos lados de un triángulo es mayor que el tercer lado. Los polígonos regulares son unas de esas figuras que juegan un papel importante en el mundo de las experiencias de los alumnos y que sin embargo no se ven en el primer año. Por regla general se suelen estudiar demasiadas pocas figuras en este primer curso ya que se pretende llegar lo más rápidamente posible a un sistema lógico y una globalidad.

Para demostrar la esencia del sistema lógico, los profesores suelen pasar pronto a una metodología deductiva de la materia. Con ello se empuja al alumno por el camino opuesto al que produce resultados científicos (ver Van Est, I). La metodología deductiva lo coloca todo al revés: se estudia el triángulo irregular antes de ver el triángulo isósceles o el equilátero, el cuadrolátero irregular antes de ver el cuadrado, la recta antes del ángulo y el ángulo antes del polígono. Sin embargo el niño conoce por sus experiencias mucho mejor el triángulo isósceles o equilátero que el irregular; conoce el ángulo como ángulo de una habitación o de un cuadrado pero no como concepto abstracto. Ajustándonos a las experiencias del niño llegamos mucho antes al esquema de una pirámide hexagonal regular o de un prisma regular, a las construcciones de hexágonos, octógonos y dodecágonos regulares, que a la figura consistente en dos rectas paralelas cortadas por una tercera.

El comienzo de la enseñanza de la geometría.

El problema del comienzo del estudio de la geometría se puede solucionar satisfactoriamente de muchas maneras distintas. Y sin embargo es una cuestión muy importante. El tema debe ser familiar al mundo de las experiencias pero al mismo tiempo tiene que haber algo nuevo que aprender. Debe dar pie a actividades que susciten el interés del niño. Debe tratar de propiedades que hagan que el estudio valga la pena y cuya ordenación produzca resultados evidentes para el niño. Además, el estudio del tema ha de tender al cumplimiento de los objetivos educativos. Hay muchos temas de este tipo. Los encontramos fácilmente si repasamos la lista que di en el capítulo anterior de los aspectos geométricos que se podrían tratar al estudiar el espacio. Van Hiele-Geldof (II) ha elaborado algunos de esos temas. El primer tema, "baldosas", se basa en divisiones de un plano, "ampliar y reducir" en figuras uniformes, "dodecaedro rómbico" en la acumulación de figuras, "lámpara de pasillo" en las representaciones del espacio en el plano, etc. Cada tema intenta explicitar estructuras espaciales preexistentes, desarrollar la estructura lingüística correspondiente llevando finalmente a distintas estructuraciones geométricas. Resulta de gran utilidad centrar la atención en una figura central en la que el niño descubra los campos geométricos que van apareciendo. Siempre hemos elegido el cubo (Van Hiele en Van Hiele-Geldof, Cuaderno de geometría, I). Así se pueden ir viendo: los elementos de la geometría, puntos, rectas y planos; la construcción de una estructura; la utilización de un plano diagonal para poder medir la diagonal del cuerpo; superficie y volumen del cubo; el concepto de poliedro regular; la cuenta sistemática de vértices y aristas.

La simetría.

La simetría es importante puesto que rige en gran medida nuestro pensamiento espacial. Cuando los alumnos construyen figuras tienen cierta tendencia a hacerlas con simetrías bilaterales. La simetría suele jugar un papel muy importante en la resolución de problemas aunque los alumnos no se den realmente cuenta de ello. Por ejemplo, cuando los alumnos encuentran en un cuerpo una diagonal de un plano que se cruza perpendicularmente con alguna diagonal espacial, no les cuesta nada encontrar las demás diagonales de planos con esa propiedad. Esto lo hacen usando una simetría que no saben describir del todo bien. Y en la mayoría de los casos no es que hayan vislumbrado la posibilidad de sustituir entre sí las diagonales de planos aplicando una rotación en torno a la diagonal del cuerpo. Más bien habría que pensar que han vislumbrado la posibilidad de intercambiar el papel de rectas y puntos con lo que se mantienen las distancias y los ángulos. Por ello es muy importante concienciar a los alumnos de las relaciones simétricas, relacionándolas y, en una palabra, matematizándolas. Willers (mencionado en Fladt I, pág. 9) lo ha hecho de manera muy consecuente. Ha basado los axiomas para determinar las medidas en la simetría. Con ello consigue un sistema lógico que se adapta perfectamente al mundo de las experiencias de los alumnos.

De todas las formas, de simetría la más indicada para servir de punto de partida para el desarrollo de operaciones geométricas es la simetría del plano respecto de una recta. Los alumnos conocen casi igual de bien la simetría en el espacio respecto de un plano. Por ello no hay que despreciar este conocimiento. Quizá sea recomendable considerar la simetría en un plano respecto de una recta como un caso especial de la simetría en el espacio respecto de un plano. De la misma manera podemos hacerles ver que la simetría en un plano respecto de un punto es un caso especial de la simetría en el espacio respecto de una recta (lo mismo se puede decir de la simetría en un plano respecto de una recta). Pero hay que tener en cuenta en ese caso que se trata de un tipo de simetría que les resulta menos familiar. Lo más fácil es que piensen en un eje de rotación en que la figura, con un eje de n°, posee la característica de que una rotación sobre un ángulo de $\frac{360°}{n}$ la hace volver a su posición inicial.

La concepción primitiva que los niños tienen de un polígono regular suele ir asociada al concepto "centro de orden *n"*. Tendremos muchas ventajas si elegimos como definición del polígono regular: un n-ágono regular es un n-ágono con un centro de orden *n.* Esta definición se ajusta a la representación original de polígono regular y da además las principales propiedades: los lados de un polígono regular son idénticos entre sí, los ángulos de un polígono regular son idénticos entre sí, un polígono regular tiene círculos inscrito y circunscrito concéntricos. De esta manera la construcción de un polígono regular consiste en dividir el círculo en cierto número de partes iguales.

Es significativo observar que la simetría de estas figuras hace que sea tan fácil reconocer directamente sus propiedades simplemente mirándolas: el triángulo isósceles, la cometa y el trapecio isósceles, porque tienen un eje simétrico; el rectángulo y el rombo, porque tienen dos; el triángulo equilátero y el cuadrado, porque tienen un centro respectivamente de tercer y cuarto orden, etc. A los alumnos les cuesta poco leer estas propiedades directamente de las figuras puesto que se apela sobre todo a la estructura contemplativa preexistente. Por supuesto que cuando llegue el momento oportuno habrá que demostrar la existencia de las propiedades de simetría. Habrá que demostrar que un triángulo con dos lados iguales tiene un eje de simetría, que un cuadrilátero con cuatro lados iguales tiene dos, etc. Es relativamente sencillo si partimos del sistema axiomático de Willers. De esta manera al final del curso podemos enseñar a los alumnos buenos cómo conseguir una construcción lógica rigurosa de la geometría.

Las construcciones en la geometría plana.

Desde muchos lados se observa que las construcciones son en realidad afirmaciones existenciales (ver p. ej. Gerretsen, I). Su significado de cara al sistema lógico es por lo tanto muy relativo. Cuando una enseñanza da mucha importancia a las construcciones, lo tendrá que justificar apelando a algún valor didáctico. No resulta difícil encontrarlo. La actividad de construir apela simultáneamente a la cabeza y a la mano, las propiedades de figuras tienen una aplicación directa en las construcciones, los alumnos ven sentido en la capacidad de poder dibujar por sí solos las figuras que explica el profesor. Esta motivación determina al mismo tiempo el límite de las construcciones: no se puede pedir a los alumnos que construyan figuras que se han dado de tal manera que carecen de sentido para ellos; tampoco se les puede pedir que hagan construcciones que precisan del estudio de nuevas técnicas.

Las construcciones pueden todavía tener otra función al principio del estudio de la geometría: los alumnos pueden descubrir, mediante sus construcciones, las formas externas que puede adoptar determinada figura. Por ejemplo, pueden descubrir que un trapecio puede tener en uno de sus lados paralelos un ángulo agudo además de un ángulo obtuso, que el centro del círculo circunscrito a un triángulo puede estar fuera del triángulo, etc.

Fladt (I, pág. 26) observa que de las propiedades simétricas del rombo se pueden deducir las siguientes construcciones básicas: dividir un segmento por la mitad, dividir un triángulo por la mitad, dibujar la perpendicular desde un punto sobre una recta, dibujar la perpendicular en un punto de una recta. Van Hiele-Geldof profundiza en este tema (I, pág. 19).

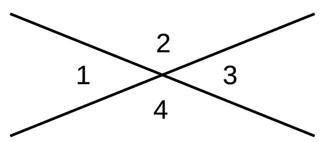
El concepto de ángulo.

La definición de ángulo da pie a una interesante polémica. Algunos definen el ángulo entre dos semi-rectas que tienen en común el punto de partida como la parte del plano limitada por dichas semi-rectas. Otros definen el ángulo como la figura formada por dichas semi-rectas. Los partidarios de ambas definiciones tienen razón al afirmar que en la otra definición hay algún aspecto incorrecto. Al definir el ángulo como parte de un plano se crea la sensación de que un ángulo es algo parecido a un triángulo del que se ha perdido el tercer lado. Además parece como si se quisiera abarcar una superficie infinitamente grande. La segunda definición no especifica para nada qué se entiende por una *figura formada* por dos semi-rectas. Las semi-rectas forman en realidad *dos* ángulos: uno interno y otro externo. La definición no los distingue.

Las expresiones "estar *dentro* de un ángulo", "girar *sobre* determinado ángulo" corresponden mucho más a la primera definición que a la segunda. Todo esto habrá clarificado que ni la primera ni la segunda se aproximan bien al *concepto* de ángulo. Para indicar la posibilidad de medir ángulos podemos pedir a los alumnos que doblen un papel en ángulo recto, después medio ángulo recto, un ángulo recto y medio, una figura consistente de tres ángulos rectos, etc. Puesto que haciendo esto se ha corrido quizá el peligro de formar una imagen demasiado estática de los ángulos, podemos pedir a los alumnos que representen ángulos moviendo los brazos (ver van Hiele-Geldof, pág. 21). Si estos ejercicios clarifican el concepto de ángulo podemos prescindir tranquilamente de su definición. Este es uno de los ejemplos que demuestra que a veces las definiciones no son suficientes para formar un concepto.

El teorema según el cual "en una figura formada por dos rectas que se cortan en ángulo no recto los ángulos opuestos son iguales", se suele catalogar como uno de esos teoremas que son tan evidentes que la demostración no es en absoluto apropiada para un primer curso. Esto es discutible. La demostración del teorema consiste en relacionarlo con otro teorema (que éste sí es evidente) según el cual los ángulos suplementarios forman juntos un ángulo de 180°. Relacionar de esta manera hechos fácilmente constatables no es algo que les cueste mucho de entender a alumnos de primer curso. Si les pedimos que encuentren mediante un cálculo que los ángulos opuestos son igual de grandes, se darán perfecta cuenta de que este resultado se ha obtenido echando mano de las propiedades de los ángulos suplementarios.

La verdadera dificultad está en que se persigue una demostración *general:* se quiere deducir una *relación* nueva (la igualdad de dos ángulos) de dos *relaciones* dadas (que dos pares de ángulos sean suplementarios). Esta demostración está a un nivel demasiado alto para principiantes. Se puede reducir la demostración a un nivel inferior haciéndoles estudiar esquemas complementarios, pero resulta mucho más natural posponer la demostración para un momento más adecuado.



La demostración presenta una segunda dificultad, la asimetría señalada por Bunt (I). Si queremos demostrar que 1 es igual a 3 nos tendremos que fijar en 2, que es el suplementario de ambos, o en 4. El alumno que se fija en ambos a la vez encuentra en primer lugar que ambos son el suplementario de 1, por lo que 2 es igual a 4. Es en efecto el teorema que tiene que demostrar, pero para los otros ángulos, no para éstos. Para el alumno experimentado no hay ningún problema: sencillamente cambia los números de los ángulos. El que tiene menos experiencia se puede liar fácilmente. En alguna ocasión se formula la solución de manera que 3 también tiene como suplementario a 2 y 4 debiendo por tanto ser igual a 1. La simetría se mantiene de principio a fin. Este fenómeno puede explicar por qué es más complicado el *hallazgo* de la solución. Sin embargo no puede explicar por qué hay también dificultades en su *reproducción.* Una solución asimétrica resulta complicada hasta en los cursos superiores; sin embargo su reproducción no resulta problemática. Pero hay que tener en cuenta que los alumnos de los cursos superiores ya alcanzaron el segundo nivel hace tiempo.

Congruencia y semejanza.

Ya he dicho en este capítulo que la semejanza tiene más cosas que ofrecer que la congruencia. Tiene por ello muchas más ventajas empezar con la semejanza. Podemos partir del convencimiento de que la semejanza es un concepto que les es familiar aunque el nombre quizá les suene a nuevo. Por eso el estudio de la semejanza puede empezar con un análisis del concepto. A veces son ellos mismos los que empiezan diciendo que la semejanza se caracteriza por la igualdad de ángulos y por el hecho de que los segmentos correspondientes tienen la misma relación. Si no se les ocurre esto les podemos enseñar la semejanza de rectángulos y de rombos. No hay que insistir demasiado en la semejanza de triángulos puesto que representan una excepción: en los triángulos la proporcionalidad de los lados se deriva de la igualdad de los ángulos y al revés. Véanse también las notas de Van Hiele-Geldof (I, pág. 121).

No nos referiremos aquí a la semejanza basada en la multiplicación de figuras. Estamos interesados en crear una estructuración matemática sobre una estructuración contemplativa preexistente. La relación entre figuras que son producto la una de la otra respecto de un punto, no suele aparecer en la esfera de lo contemplativo. Todavía está por ver si en los cursos superiores tiene sentido basar la semejanza en la relación de productos. Tratar la semejanza a la luz de las multiplicaciones suele conducir a factores materiales perturbadores. El peor de todos es que los alumnos se sientan vinculados por el concepto de equivalencia. La única ventaja que tiene este método es que se obtiene una definición más sencilla de figuras curvilíneas semejantes. Pero hay otra manera de solucionar esta dificultad. Si se dispone de mucho tiempo, se pueden ver una serie de transformaciones de figuras e incluir entre ellas la transformación por multiplicación.

La congruencia se puede considerar un caso especial de semejanza. Para los alumnos resulta más fácil ver primero las condiciones para la congruencia de rectángulos, rombos, cuadrados y cometas antes de empezar con la congruencia de triángulos.

La *aplicación* de la congruencia de triángulos para demostrar la igualdad de segmentos y ángulos exige mucho más de los alumnos que el análisis conceptual descrito. Por ello podríamos plantearnos si es aconsejable tratar esta aplicación justo después de dicho análisis. Para que los alumnos pueden aplicar, con comprensión, la congruencia es necesario que hayan alcanzado el segundo nivel.

Si se decide proceder a la aplicación de la congruencia de triángulos, hay que seleccionar los ejemplos con el cuidado necesario: los resultados no han de ser evidentes, como p. ej.: "En los triángulos congruentes son idénticas las medianas equivalentes". Las congruencias tampoco han de ser demasiado difíciles como para distraer la atención del problema principal. En muchos casos se podrá ejemplificar perfectamente la igualdad de segmentos o de ángulos mediante una proyección especular o una rotación. En tales casos se pueden relacionar los campos contemplativos y geométricos: el uso de la congruencia constituye una forma de expresión más clara. Los alumnos se dejan convencer rápidamente por esta forma de expresión matemática. La congruencia supone a la larga una economía del pensamiento: en muchos casos les resultará más fácil hallar triángulos congruentes que imaginarse dónde se ha movido un segmento después de una rotación o giro. A la larga pueden considerarse métodos complementarios la detección de simetrías y la aplicación de congruencias. Sería tan absurdo insistir constantemente en la aplicación de la teoría de la simetría como introducir directamente la congruencia ignorando totalmente la simetría.

Tiene poco sentido poner problemas que tengan como única función la aplicación de la teoría de la congruencia. Al proseguir con la teoría (teoría de los paralelogramos, lugares geométricos, etc.) se hace un uso excelente de la congruencia, lo que supone una estupenda oportunidad para que los alumnos vayan cogiendo práctica. Los problemas que se suelen poner para practicar la congruencia no cumplen ninguna función en la construcción del sistema lógico y no fomentan la comprensión espacial. Esos problemas no hacen más que ratificar la idea de que la geometría no tiene mucho sentido.

Paralelismo.

Hay muchas maneras de tratar el paralelismo. Sin embargo su tratamiento no ha sido nunca satisfactorio a juzgar por la cantidad de estudios que se han escrito al respecto. La teoría del paralelismo tiene unas propiedades típicas:

1°. Aparece en un axioma no evidente.

2°. La parte de las conclusiones que tratan de la suma de los ángulos de un polígono se halla en el primer nivel mientras que la parte que trata de las relaciones entre los ángulos formados cuando dos rectas paralelas son cortadas por una tercera recta, se halla en el segundo nivel.

3°. La tradición quiere que la teoría del paralelismo se trate muy al principio del curso.

Fladt (I, pág. 30 y ss.) indica las distintas formas en que se puede tratar la teoría del paralelismo y los axiomas iniciales. Son importantes sobre todo los siguientes axiomas:

A. La suma de los ángulos de un triángulo es de 180°.

B. Si en un cuadrilátero son rectos tres de sus ángulos, el cuarto también lo será.

Ambos axiomas hacen que la teoría del paralelismo tenga un desarrollo muy fluido. Van Hiele-Geldof enseña cómo podemos partir del axioma A (I, pág. 92). Pone como ejemplo el problema del piso que se puede cubrir con baldosas en forma de triángulos o cuadriláteros congruentes pero que resulta prácticamente imposible de cubrir con baldosas de pentágonos congruentes. Ya me he referido antes en este capítulo a la serie de teoremas que se obtienen a partir del axioma B. La ventaja consiste en que la primera figura ya incluye el paralelismo. La definición según la cual "dos rectas son paralelas cuando ambas son perpendiculares a otra" puede servir para derivar los teoremas posteriores.

Sin embargo la definición tiene sus inconvenientes. El más grave es que una de las muchas características, y ciertamente no la más significativa, se eleva a rango de definición. En cambio resulta mucho más convincente el método de Van Hiele-Geldof. Se van descubriendo las rectas paralelas en el piso de baldosas, se van hallando las características del paralelismo y se van estableciendo determinadas relaciones. La ordenación del conjunto de teoremas en una relación lógica se deja para más tarde. Así se evita que se deriven teoremas que se encuentran a un nivel demasiado alto.

No es bueno, ni desde el punto de vista teórico ni desde el práctico, tratar el paralelismo al principio del curso. En Euclides hay mucha teoría antes de llegar al paralelismo; es posible tratar mucha geometría antes de tener que hablar de paralelismo. Además, en la geometría contemplativa el paralelismo no es un fenómeno tan llamativo como para requerir rápidamente una explicitación, una estructuración lingüística y geométrica. Podemos estar seguros también de que estos argumentos jamás han servido de justificación para un tratamiento temprano del paralelismo. El motivo de este tratamiento temprano se debe más bien a una didáctica trasnochada que parte de los elementos. En ese tipo de didáctica lo primero que se pide es la relación recíproca entre dos rectas.

Las mayores dificultades de la teoría del paralelismo aparecen cuando se quiere mostrar la relación entre los siguientes teoremas: "al cortar una recta a dos paralelas los ángulos correspondientes son idénticos"; "al cortar una recta a dos paralelas los ángulos interiores intercambiados son idénticos"; "al cortar una recta a dos paralelas los ángulos interiores al mismo lado de la recta de intersección son suplementarios". Ocurre los mismo cuando se quiere demostrar los contrarios de estos teoremas. Esto es debido a que la demostración de estos teoremas está en el segundo nivel y porque los alumnos aún no distinguen bien un teorema de su contrario. Es preferible mantener de momento la complejidad de la relación y observar que, al cortar una recta a dos paralelas, se forman dos grupos de cuatro ángulos idénticos y que la suma de dos ángulos desiguales es siempre de 180°. Si, al cortar una recta a otras dos, se crea esta situación para los ángulos, podremos concluir que esas dos son paralelas.

El método usual que insiste tanto en el paralelismo no resulta tan difícil. Esto se debe a que la figura de dos paralelas cortadas por una tercera sigue jugando un papel ínfimo en el posterior desarrollo del sistema. El paralelismo se suele aplicar directamente para demostrar que la suma de los ángulos de un triángulo es igual a 180°. Este teorema es mucho más manejable para los alumnos y es precisamente el que se seguirá aplicando continuamente. Cuando después se estudian los paralelogramos, los alumnos están tan entrenados que el paralelismo ya no les cuesta nada.

Superficie.

En las programaciones actuales el concepto de "superficie" suele aparecer en segundo curso. Es una lástima ya que los alumnos conocen el concepto desde la escuela básica aunque lo hayan visto de manera errónea. Es precisamente el primer curso el más adecuado para enderezar ese mal aprendizaje. Hay tres temas que forman un todo: congruencia, superficie y fracción. El concepto de "superficie" no se puede tratar sin usar fracciones, el concepto de fracción está íntimamente relacionado con la división en partes congruentes y la mejor manera de demostrarlo es en una superficie. Podemos admitir que los tres conceptos parten de una misma estructura contemplativa. Si analizamos el concepto de "superficie de una figura cerrada" veremos que representa la delimitación de una parte del plano. Si a esa superficie le damos un valor en números ese valor debe ser el mismo para las figuras congruentes. Además la superficie de una figura cerrada considerada como la suma de otras dos figuras cerradas debe tener el mismo valor en números que la suma de la superficie de las partes. De lo cual se deduce que dos figuras, formadas por figuras congruentes de dos en dos, tendrán la misma superficie. Para poder determinar la medida de una superficie primero hay que elegir la unidad de superficie. La superficie de una figura es igual al número de unidades de superficie que la componen. Los elementos constitutivos también pueden ser n-ésimas partes de la unidad de superficie. Estos se caracterizan por el hecho de que n de estas partes forman la unidad de superficie. Dejaremos de lado el caso problemático en que la medida es irracional. Sabemos de sobra cómo se ha de resolver más adelante.

La mayor parte de la actividad mental que requiere este análisis es de tipo contemplativo. Se habría podido y debido llevar a cabo en la escuela básica. Puesto que no ha sido así, nos habremos de plantear si no es preferible que esto ocurra cuanto antes en el primer curso. Tendremos que esperar que el sistema de valencias -todavía insuficientemente fundado- no haya acaparado totalmente el terreno. Si esperáramos demasiado, las valencias se convertirían en certezas tan sólidas que sería muy difícil retornar a los fundamentos.

Este análisis nos puede indicar el material que habremos de presentar a los alumno para que puedan llegar al concepto de superficie, bien sea mediante el estudio individual o los comentarios en clase. Es de resaltar que los hay que opinan que esto se puede alcanzar con un esquema matematizado, cuando en realidad esta matematización sólo es posible después de un análisis conceptual.

El fundamento del concepto de fracción es la división en partes congruentes. Podemos reconocer la tercera parte de un superficie por el hecho de que hay tres partes congruentes que forman la superficie total. Si se llegara de una manera distinta a la conclusión de que tenemos una tercera parte, seguiría habiendo una subdivisión en partes congruentes más pequeñas. Así p. ej., si usamos una regla para dividir un rectángulo en tres partes iguales habremos estado utilizando pequeños rectángulos congruentes de un ancho de 1 cm ó 1 mm.

Sería por supuesto un gran avance si la escuela básica usara material que construyera los conceptos de fracción y de superficie con ayuda de divisiones congruentes. De esta manera los alumnos no se habituarían a conocimientos aparentes y los institutos no se tendrían que dedicar a pagar los platos rotos.

CAPÍTULO XVI

LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA EN LOS CURSOS SUPERIORES DEL V.H.M.O.

La mayoría de las discusiones en torno a la didáctica de la geometría dan mucha importancia a la manera como hay que empezar su estudio. Es perfectamente comprensible si nos fijamos en los objetivos que tiene la enseñanza de la geometría. Sólo se logra un buen conocimiento de las propiedades del espacio si al principio existe una buena conexión con la estructura contemplativa. El alumno sólo apreciará la cohesión lógica de un sistema científico si al principio del estudio está plenamente convencido da la utilidad de esa cohesión. De ahí que el primer curso sea determinante para el estudio posterior de la asignatura.

La propia materia del primer curso es también muy importante. Gran parte del primer objetivo puede conseguirse en este primer curso, es decir antes de que se haya producido la ordenación lógica efectiva. Lo que implica que el enfoque de la asignatura no ha de ser esencialmente distinto según se trate de alumnos de opciones no matemáticas o de los de la opción B. En todo caso no habremos de forzar el tempo con los del primer grupo aunque esta limitación tampoco perjudicará a los alumnos de la opción B.

Si analizamos con más detalle la materia, llegaremos a la conclusión de que en el segundo curso tampoco es preciso apresurarse por ceñirse a un sistema puramente lógico. En cualquier caso, no se ha de introducir una metodología deductiva. Es cierto que en el segundo, y quizá en los posteriores cursos, tendremos que cuidar mucho el modo de expresar lo percibido en lenguaje geométrico. Además, los alumnos han de familiarizarse con las leyes generales de los sistemas lógicos. Deben aprender a reconocer definiciones y distinguir teoremas de axiomas. Deben aprender a ver la diferencia entre un teorema y su contrario. Deben acostumbrarse a dar nombres diferentes a los elementos de un razonamiento, por mucho que luego resulte que son idénticos.

Esta estructuración del sistema lógico es extremadamente difícil: aparecen algunos niveles que ni siquiera alcanzan los alumnos de la opción B. Por ello, si pretendemos que sigan usando un sistema lógico con esta estructuración, habremos de aceptar que adquieran algunos conocimientos aparentes: conocimientos que no funcionan en el momento de aprenderlos y que quizá no funcionen nunca. De ahí que habría que plantearse seriamente si no sería preferible posponer aquellas estructuraciones del sistema lógico de máximo nivel hasta el momento en que empiece a construirse de forma sistemática la geometría del espacio.

Esto significaría que en el tercer y cuarto cursos nos seguiríamos ocupando de la ordenación de estructuras contemplativas. Podríamos hacerles ver la cohesión lógica de los teoremas que se vayan viendo en cada momento. En cambio tendríamos que tener el máximo cuidado con la demostración de los teoremas que pertenezcan a un nivel superior, como p. ej. "las bisectrices o medianas de un triángulo pasan por un mismo punto". Esta remodelación de la materia supondría que sólo se pospondría un número reducido de demostraciones de teoremas. El tiempo que nos ahorraríamos de esta manera, sumado con el que podríamos ganar eliminando problemas inútiles, se podría aprovechar para ordenar convenientemente los aspectos geométricos de las estructuras contemplativas que vimos en el capítulo XIV.

Los niveles de la geometría que aparecen en los cursos superiores.

Los niveles que aparecen después de los dos primeros son mucho más difíciles de percibir. No suponen en absoluto una barrera insalvable: es fácil alcanzarlos. Existe indudablemente un nivel referente a la *ordenación de la relaciones* entre las figuras, un nivel que los alumnos tienen que haber alcanzado antes de poder entender la diferencia entre un teorema y su contrario. Se trata de una comprensión puesto que lo único que podemos hacer es intentar crear las condiciones más favorables para que se produzca el salto. Se trata de un nivel puesto que los alumnos, tras alcanzarlo, hablan un lenguaje que antes no entendían. Pero esta vez el profesor no puede esperar que todos sus alumnos lleguen a ese nivel. Ni siquiera al cabo de unos meses; es más, hay alumnos que jamás lo alcanzan. Si consideramos la clase en su totalidad vemos que el proceso de aprendizaje al pasar al tercer nivel se desarrolla de manera distinta a los dos primeros: no se percibe con claridad el segundo segmento horizontal de la curva de aprendizaje, la meseta que sigue a la subida. También resulta muy difícil hablar de un cuarto nivel.

Sin embargo, si profundizamos en las posibles dificultades ocasionadas por la materia de estudio, podemos descubrir un cuarto nivel. Podríamos decir, por ejemplo, que si un alumno es capaz de solucionar conscientemente un problema siguiendo el método de alumnos de la opción VIα tal como vimos al principio del capítulo XI, es que ha alcanzado ese cuarto nivel. Eso significa que un alumno que ha alcanzado el cuarto nivel es capaz de hallar, en casos especialmente diseñados, las soluciones a problemas geométricos valiéndose de su conocimiento de una o varias soluciones surgidas por permutación de las partes de lo supuesto y de lo que hay que demostrar. En el problema a que me he referido, el alumno había descubierto la facilidad de demostrar el siguiente teorema: "Si el punto M se halla dentro del cuadrado ABCD de forma que ΔDCM es isósceles, entonces ΔABM es equilátero con ángulos en la base de 15°". Este teorema ha de considerarse como contrario al que quería demostrar. El alumno ha sabido aprovechar este conocimiento.

Wansink (comunicación oral) trató en clase el siguiente teorema con su contrario: "La recta que divide una cuerda de una circunferencia perpendicularmente por la mitad pasa por el centro de dicha circunferencia y parte por la mitad a los dos arcos en que los extremos de la cuerda dividen a la circunferencia". Uno de los contrarios dice: "La recta que conecta los centros de los arcos en que una cuerda divide a una circunferencia, pasa por el centro de la circunferencia y divide a dicha cuerda perpendicularmente por la mitad". Uno de los alumnos, tras recibir un poco de ayuda, halló la siguiente demostración del contrario: "Está demostrado el teorema principal según el cual la recta que divide a la cuerda perpendicularmente por la mitad pasa por los centros de los arcos. Sólo hay una recta que une los centros de los arcos. Por eso la recta que une los centros de los arcos es idéntica a la mediatriz de la cuerda". Esta demostración es típica del cuarto nivel. En un trabajo escrito pedido unas semanas después, éste fue el único alumno capaz de reproducirla. Esto demuestra que se trataba efectivamente de un nivel, puesto que todos los alumnos habían visto la demostración y creían entenderla. Este nivel está claramente por encima del tercero ya que sólo pueden tener razonamientos del cuarto nivel aquéllos que comprenden la diferencia entre un teorema y su contrario.

Sin embargo hemos de tener mucha cautela al referirnos al cuarto nivel. Las indicaciones son muy vagas: la clase en su conjunto no reacciona realmente ante este nivel; no se queda parada ante el obstáculo puesto que ni siquiera se aproxima a él. En la curva de aprendizaje falta la meseta que precede al salto. Un análisis del cuarto nivel sólo podría hacerse en la enseñanza individual o en aquellos grupos subdivididos selectivamente y no como en el caso actual de la enseñanza.

Es importante ver el papel que juegan estos dos niveles superiores en la construcción del sistema lógico geométrico. El tercer nivel permite distinguir las relaciones entre las figuras. En este caso es muy importante la dirección en que van las relaciones. El alumno ha de saber distinguir entre las afirmaciones: "Este cuadrilátero es un paralelogramo porque los lados opuestos son idénticos" y "los lados opuestos de este cuadrilátero son iguales porque es un paralelogramo". Así pues, el tercer nivel es necesario para entender el sistema lógico como un régimen deductivo, o sea también para distinguir teoremas, definiciones y axiomas. Podemos afirmar que un alumno no ha alcanzado el tercer nivel cuando falla en la demostración de teoremas, sobre todo de aquéllos en que se usan lugares geométricos. Esta incapacidad no se manifiesta (prácticamente) a la hora de construir o calcular.

El cuarto nivel es necesario para las demostraciones por reducción al absurdo, p. ej. para ciertas demostraciones de la teoría del paralelismo. Es necesario para la mayoría de las demostraciones que se dan para el teorema según el cual las perpendiculares sobre un mismo plano son paralelas. Es necesario para demostrar el teorema según el cual podemos hacer pasar una esfera por dos circunferencias que no se hallan en un mismo plano y que tienen dos puntos en común. Un análisis minucioso de la materia revelaría que el cuarto nivel es realmente necesario en muchas ocasiones, por lo que hay que deducir que la materia en esas ocasiones permanece completamente incomprensible para la mayoría de los alumnos.

Con razón nos podemos plantear si la enseñanza de la geometría cumple en la actualidad con su objetivo. En los cursos superiores ya no se suele prestar mucha atención al primer objetivo (aprender a conocer las propiedades del espacio). Y en lo que respecta al segundo (aprender a valorar positivamente la cohesión lógica del sistema), hemos visto que la mayoría de los alumnos no llegan a captar del todo la estructura del sistema. Si es cierto que la enseñanza tiene cierta utilidad, habrá de ser forzosamente por razones distintas de los objetivos. O tendría que demostrarse que este tipo de enseñanza sólo se enfoca hacia los mencionados objetivos tras el examen. Sin embargo sólo podríamos basar nuestra enseñanza en esa suposición si dispusiéramos de los datos suficientes.

Si nos planteáramos una modificación de la programación deberíamos determinar en primer lugar si pretendemos llevar todos los alumnos de la opción B al tercer y cuarto niveles. La alternativa es resignarse a que estos niveles son demasiado altos para muchos y centrarse sobre todo en enseñar a descubrir y entender el espacio. Un esfuerzo especial en esta dirección les haría progresar mucho más que en la actualidad.

Sería totalmente injusto afirmar que la estructuración contemplativa ha dejado de jugar un papel en la enseñanza de la geometría en los cursos superiores. Es fácil encontrar ejemplos de casos de docentes que se sienten terriblemente divididos entre su supuesta obligación de impartir la materia con el menor contacto posible con lo contemplativo y su experiencia de que lo contemplativo es de gran ayuda. Consideremos el siguiente teorema: "Si en un cuadrilátero la suma de un par de lados opuestos es igual a la suma del otro par, es posible dibujar una circunferencia dentro de ese cuadrilátero". Las demostraciones que se dan de este teorema se basan en parte en la contemplación y tienen los defectos correspondientes ya que el teorema sólo es correcto si se excluyen los cuadriláteros no convexos. Así ocurre en muchos libros de texto pero no es muy consecuente mantener esta exclusión. Todos los libros de texto admiten, sin demostración alguna, que las medianas de un triángulo se cortan entre sí. Todos los libros de texto admiten, sin demostración alguna, que una recta perpendicular sobre dos rectas de un plano que se cortan entre sí, corta dicho plano.

Todo esto no es grave a condición de que seamos conscientes de que la contemplación no se puede eliminar de la enseñanza de la geometría y que no hagamos como si la hubiéramos eliminado. Si somos conscientes del significado de lo contemplativo, no tendremos reparos en tratar los resultados del cilindro y del cono con el supuesto argumento de que la teoría de las superficies desarrollables es demasiado difícil para el V.H.M.O. (ver nota 2). Y por otro lado no habremos de apelar a estructuraciones contemplativas vaga o insuficientemente analizadas. Un ejemplo de esto último es el teorema erróneo, que aparece en varios textos, según el cual dos conos con vértices comunes se cortan entre sí siguiendo una, dos o ninguna describiente. El simple hecho de que haya *cuatro* rectas que forman ángulos iguales con los ejes de un sistema de coordenadas rectangular puede demostrar perfectamente que el teorema es incompleto.

El principio de la enseñanza en la estereometría.

Si tomamos como punto de partida de la geometría la estructuración contemplativa, es indudable que al principio se tratarán muchas figuras tridimensionales. Nos podemos plantear si aún tiene sentido distinguir entre geometría del plano y geometría del espacio. ¿Tiene sentido que en el V.H.M.O. (ver nota 2) las asignaturas de planimetría y estereometría estén tan separadas? Incluso en el examen final del gymnasium, en el que sólo se habla de "geometría", sigue habiendo una parte de planimetría y otra de estereometría. ¿Esta distinción existe sólo por la tradición o hay algún motivo adicional y más profundo?

Pues hay realmente una explicación más profunda que la tradición del V.M.H.O. para esta división. La prueba es que en la enseñanza superior sigue existiendo. Se ha analizado qué axiomas son válidos para una geometría bidimensional y cuáles para una tridimensional. Se distingue entre la geometría analítica de dos y la de tres dimensiones. Sin embargo esto no explica si hay motivos didácticos que justifiquen esta distinción en el V.H.M.O.

Un argumento didáctico para esa división podría ser que si la estereometría se da a continuación de la planimetría, se puede enfocar la asignatura como sistema lógico-deductivo. Nuestra experiencia dice, sin embargo, que este enfoque fracasa si no se ha procedido antes a ordenar el campo contemplativo. Dicho de otra manera: un enfoque lógico-deductivo de la estereometría sólo es posible después de que los alumnos se hayan familiarizado con los objetos estereométricos. De ahí que a la estereometría tendrá que precederle una breve propedeusis o bien -lo que probablemente sería mucho más racional- no se deberán separar la planimetría de la estereometría cuando se ordene el espacio contemplativo y la demostración de un sistema lógico-deductivo se habrá de limitar al de la estereometría.

Este tipo de enfoque -imposible de realizar en las programaciones actuales- tendría varias ventajas:

a. La materia de los tres primeros cursos se ajusta armoniosamente a las experiencias e intereses del niño.

b. Los temas por estudiar en esos años son tan variados que el profesor no siente prisas por pasarse cuanto antes a un nivel superior.

c. Los alumnos que al cabo de tres o cuatro años cambian sus orientaciones académicas han estudiado una materia que tiene sentido por sí misma.

d. Al aislar el tratamiento de un sistema lógico-deductivo de otros objetivos, se puede reducir la materia a lo estrictamente necesario.

Lugares geométricos.

El caso de los lugares geométricos es curioso: apenas juegan un papel en el sistema lógico y tampoco aparecen entre los aspectos de la geometría contemplativa. Sin embargo todo el mundo coincide en que vale la pena estudiarlos en el instituto.

Nos encontramos las figuras geométricas al *ordenar* la geometría contemplativa, p. ej. al transformar figuras, con movimientos en el espacio, las curvas de trayectoria y las secciones. Los alumnos realmente descubren los lugares geométricos por sí mismos, p. ej. cuando quieren construir un triángulo cuando se conocen un lado, un ángulo de ese lado y la altura sobre dicho lado. Llegan pronto a la conclusión de que el tercer vértice debe de hallarse en una recta fácil de trazar, paralela al lado conocido. Sin embargo el tratamiento de los lugares geométricos no suele tener el éxito que desearía el profesor. Lo que sobre todo no entienden los alumnos es el nombre del concepto. Con mucha frecuencia vemos las siguientes afirmaciones: "La bisectriz de un ángulo es el lugar geométrico de sus lados". Al ser elegidos unilateralmente estos ejemplos se origina una valencia respecto del concepto de distancia. Esta frase se ha de considerar en ese caso como un agravamiento de la siguiente: "La bisectriz de un ángulo se encuentra a una distancia igual de sus lados". Un ejemplo totalmente análogo es el siguiente: "La circunferencia es el lugar geométrico del centro".

Quizá sería preferible evitar al principio el término "lugar geométrico" y limitarse a expresiones como "los puntos que se encuentran a una determinada distancia de un punto determinado se hallan en una circunferencia", "los puntos que se hayan a una distancia igual de dos puntos determinados se hallan en la mediatriz del segmento entre dichos puntos".

Para evitar una vinculación demasiado rígida entre lugar geométrico y distancia, se podrían ver toda una serie de conjuntos. Podríamos preguntar p. ej.: "¿Dónde se encuentran los puntos C de los triángulos ABC sabiendo dónde está AB y siendo $\overline{AC}$ mayor que $\overline{BC}$?" "¿Dónde se encuentran los vértices C de los triángulos acutángulos ABC sabiendo dónde está AB?". Estos problemas son mucho más fáciles para ellos y además amplían el concepto.

Cálculo de segmentos.

El cálculo de segmentos ha tenido hasta hace poco una gran importancia en la geometría. Hay cada vez más profesores que se han dado cuenta de que el cálculo de todo tipos de segmentos en triángulos no tiene mucho sentido para los objetivos de la geometría. En efecto no se sabe muy bien qué utilidad puede tener que los alumnos sepan deducir fórmulas para las alturas, las medianas y las bisectrices: incluso a nivel algebraico las destrezas que se practican haciendo estas deducciones no son muy importantes. Podemos dejarles ver y comprobar que se puede calcular la superficie de un triángulo conociendo los tres lados. Aplican el teorema de Pitágoras en cada triángulo rectángulo que se forma al dibujar la altura. De esta manera el problema tiene cierto valor porque los alumnos pueden ver en una situación "concreta" cómo se elimina una incógnita y cómo tiene sentido la descomposición en factores. Pero no tiene ningún sentido tratar este problema en plan general (con los lados a, b y c) y hacerles memorizar el resultado.

El único resultado realmente importante del teorema de Pitágoras es que nos permite calcular la distancia entre dos puntos del plano o del espacio indicados por sus coordenadas. Para que el teorema de Pitágoras funcione bien es bueno que los problemas se centren en este aspecto.

Trigonometría.

El cálculo de segmentos y ángulos a veces sólo es posible con la ayuda de la trigonometría. La trigonometría es independiente de las estructuraciones contemplativas primarias y sin embargo es posible llegar a prácticamente todos los resultados de esta asignatura sin que haga falta tener una gran capacidad de abstracción. En la mayoría de los casos basta con la definición de seno y tangente y el conocimiento de que existen tablas con las valores del seno y la tangente para ángulos entre 0° y 90°. Con ello se abarca realmente todo el contenido geométrico de la trigonometría.

Esta parte de la geometría se puede tratar en un estadio muy temprano (ya en el segundo curso). Si nos limitamos a lo expuesto anteriormente, puede funcionar muy positivamente de cara a la adquisición de comprensión. Normalmente se suelen enseñar muchas fórmulas. Esto le da la sensación al alumno de que para dominar la trigonometría se necesitan muchas valencias. Y cuando les faltan esas valencias no hacen ningún esfuerzo por alcanzar resultados a pesar de que se pueden alcanzar perfectamente con los medios de que disponen.

El tratamiento del seno y la tangente como funciones no tiene nada que ver con todo esto. Eso se ve mucho más tarde y se acerca más bien al álgebra.

La geometría analítica.

La introducción de las coordenadas en geometría ya se puede efectuar en el segundo curso. El uso de esas coordenadas tiene más que ver con la geometría contemplativa que con la trigonometría. El uso de papel cuadriculado simplifica notablemente todo tipo de problemas. Si usamos una tabla de madera provista de un sistema de coordenadas con clavitos en todos los puntos de la rejilla (geoplano de Gattegno) podremos formar todo tipo de figuras tensando gomitas. De esta manera se consigue que los niños (desde los seis años) formen cuadrados, paralelogramos, etc. sin que se les exija tener destrezas de dibujante. Pero también en el instituto se puede perfectamente seguir utilizando este medio auxiliar. Puede ayudar a ver la congruencia y la semejanza al estudiar la teoría de las superficies. Incluso puede servir para descubrir el teorema de Pitágoras.

Usando esta tabla (o el papel cuadriculado) nos aproximamos sosegadamente a la base contemplativa de la geometría analítica. Se pueden presentar todo tipo de fundamentos de forma contemplativa: cómo reconocer rectas perpendiculares, cómo determinar superficies de figuras delimitadas por rectas, cómo efectuar una traslación, etc. Este método será todavía más aconsejable si pretendemos tratar la geometría analítica con el objetivo de llegar al fundamento algebraico de la geometría. Con ello se establece una relación entre el mundo contemplativo y la geometría analítica.

CAPÍTULO XVII

FUNDAMENTOS EXPERIMENTALES DEL ESTUDIO DE LA COMPRENSIÓN EN GEOMETRÍA

Puesto que la didáctica pertenece al mundo de las experiencias, se debe exigir a todo estudio de la comprensión que se base en experiencias objetivas, es decir, experiencias accesibles a cualquier investigador serio. La cuestión que hemos de plantearnos es si el estudio que reflejo en estas páginas se basa suficientemente en experiencias y sobre todo si son lo suficientemente objetivas.

Ya observé al principio de este estudio que mi objetivo era analizar el significado y el desarrollo de la comprensión en alumnos que estudian geometría en la escuela secundaria. Se trata pues de la comprensión tal como aparece en un proceso de aprendizaje normal en una situación didáctica normal del V.H.M.O. (ver nota 2). Hay que tomar el término "normal" en su acepción más amplia: no hay que pensar sólo en la enseñanza tal como está en la actualidad sino también en las mejoras que podrían incorporarse por las correcciones del profesorado.

Encontraremos las experiencias objetivas en que todo estudio ha de basarse en las situaciones didácticas normales. Esto supone una gran dificultad puesto que el profesor juega un papel activo importante en el proceso didáctico: es difícil que al mismo tiempo sea un observador imparcial. Los intentos de conseguir percepciones objetivas, p. ej. cuando pide trabajos por escrito, suelen perturbar el proceso didáctico normal. Al tener que expresarse por escrito el alumno se ve además fuertemente limitado en su capacidad de expresión. De ahí que el profesor se vea forzado a interpretar su trabajo, por lo que todas las experiencias subjetivas que el profesor tiene con el alumno en cuestión se ponen a jugar un papel determinante (ver Hönigswald, pág. 86).

Estas dificultades, que casi parecen insuperables, han hecho que muchas veces nos hayamos contentado con experimentos que no tenían la relación suficiente con lo que ocurre en un proceso didáctico normal. Me refiero por ejemplo a:

a. Pruebas de laboratorio a nivel psicológico en las que se estudian procesos de aprendizaje que juegan un papel muy secundario en el proceso didáctico valiéndose de personas pertenecientes a grupos de edad distintos al de nuestros objetivos.

b. Pruebas de laboratorio en las que se estudian procesos mentales que se desarrollan en unos pocos minutos y por tanto no explican bien la adquisición de comprensión que abarca un período más amplio.

c. Conversiones cuantitativas de los resultados de trabajos escritos con el objetivo de averiguar si la materia ha sido asimilada por los alumnos. Estas pruebas son muy útiles y muy necesarias, pero no dan buena idea de la manera en que se desarrolla el proceso de aprendizaje.

Una cuarta fuente de datos para la didáctica que no se apoya en absoluto en experimentos:

d. Un estudio del fundamento teórico de la materia para averiguar qué ordenaciones de la materia son posibles y si son lícitas según las normas lógicas. De esa manera se puede trazar para los alumnos un camino de estudio que tenga el mínimo posible de dificultades.

Todos estos medios se utilizan y es cierto que suministran datos importantes para conseguir una buena didáctica. Sin embargo son insuficientes para explicar el proceso didáctico. El fallo principal es que estos medios no nos dan datos sobre la situación de aprendizaje en la escuela, no nos dicen dónde y cómo aprende el niño. Las pruebas de laboratorio han hecho creer a algunos que la comprensión surge repentinamente, como un ¡Ajá, ya lo veo! Y es que la naturaleza de las pruebas hace imposible detectar otro tipo de comprensión. Por lo tanto, de momento nos vemos forzados a tomar nuestros datos de las percepciones que se realizan en la escuela. Estas percepciones son subjetivas y poco fiables pero nos tendremos que conformar con ellas puesto que no hay otras. No ganarán en fiabilidad por el hecho de acompañarlas de mediciones y hacer una reelaboración cuantitativa de esas mediciones. Todavía no hemos alcanzado ese tipo de refinamiento; de momento aún estamos en el estadio cualitativo (ver Van Hiele-Geldof, pág. 49).

Las principales fuentes de datos en la actualidad son, por lo tanto, los informes de los profesores sobre sus experiencias en el aula. Estos informes no son muy objetivos puesto que sólo se refieren aquellas experiencias que los profesores consideran importantes desde *su* punto de vista. La cosa es muy distinta cuando el profesor da todos los protocolos apuntados durante unas clases, es decir, cuando reproduce todo lo que han dicho él y sus alumnos durante determinado período de tiempo. Existen todavía pocos protocolos de este tipo, demasiados pocos como para poder sacar muchas conclusiones. Resultan de especial interés para este estudio los protocolos de Van Hiele-Geldof puesto que las clases descritas estaban enfocadas primordialmente hacia el desarrollo de un tipo estructurante. El informe sobre el examen posterior es muy importante puesto que se comprueban los resultados de un proceso de aprendizaje cuyas condiciones nos resultan muy familiares, por lo menos mucho más que en exámenes normales.

Este estudio no está ni siquiera parcialmente *basado* en los resultados de los protocolos de Van Hiele-Geldof. Pero sí confirma las afirmaciones hechas. Los datos de que dispongo son en parte resultado de mi propia experiencia como profesor en una situación didáctica. Distintos grupos de trabajo (grupo de matemáticas del W.V.O. (ver nota 13), grupo de trabajo de la Sra. Ehrenfest) han examinado estas experiencias a la luz de las críticas de otros y las han complementado con experiencias de otros docentes. Son de especial importancia las experiencias hechas en las escuelas experimentales, puesto que el mayor contacto individual de esas escuelas permite un seguimiento y control del proceso de aprendizaje individual mejor que en las escuelas normales. Así por ejemplo, las escuelas experimentales nos suelen dar una idea más clara de los métodos de resolución que alcanza el niño de manera natural.

El intercambio de las experiencias hechas como docente conduce a verdades universalmente aceptadas. En tanto no dispongamos de mejores datos, habremos de utilizar los que tenemos como punto de partida de la teoría. No hay ningún inconveniente con tal de que estos datos no se contradigan y con tal de que los resultados no contradigan los experimentos a nivel psicológico o pedagógico. De esta manera podemos llegar a una teoría provisional para una didáctica específica de la asignatura. Esta teoría se puede ir corrigiendo sucesivamente mediante experimentos. Pero en todo caso está claro que el punto de partida ha de ser la situación didáctica concreta.

De entre los experimentos realizados por los psicólogos que buscan una teoría sobre la comprensión, hay que destacar sobre todo aquéllos que nos muestran los estadios que existen en un proceso mental racional (Selz), aquéllos que nos informan acerca de la fenomenología de la percepción (psicología de la Gestalt) y aquéllos que nos muestran la contradicción y la colaboración entre el pensamiento intencional y el autónomo (Van Parreren). Se trata de pruebas de laboratorio en torno a los componentes del proceso mental que el docente puede reconocer fácilmente y cuyo desarrollo queda perfectamente aclarado por dichas pruebas.

Uno de los puntos de partida del presente estudio es la tesis según la cual existe una diferencia importante entre el nivel aparente de una clase y la comprensión que realmente han alcanzado los alumnos. Esta tesis acaba conduciendo a la distinción entre un tipo algorítmico y otro estructurante. La corrección de esta tesis viene apoyada por determinadas experiencias de los exámenes de acceso donde en muchos temas, dominados algorítmicamente, se echaba en falta una buena estructuración contemplativa. La tesis se corrobora por el hecho de que la materia, dominada algorítmicamente, a menudo sólo se retiene en la memoria si se repite constantemente: los exámenes sobre temas que no se han visto en mucho tiempo suelen tener resultados pésimos.

Sin embargo es muy improbable que los partidarios de inculcar algoritmos esperen que con ello se consiga simultáneamente una estructuración superior. Esto no da lugar a dudas. Cuando un maestro o profesor opta por el aprendizaje de algoritmos lo hace porque cree que sus alumnos no alcanzarán una estructuración superior o porque cree que esto se corresponde con el sentido de las matemáticas. Ya traté extensamente las consecuencias que tienen estos enfoques en el capítulo VI. Para estos enfoques no se precisa ningún fundamento experimental.

La posibilidad efectiva de impartir una didáctica dirigida al desarrollo del tipo estructurante parece desprenderse de los protocolos sobre el trabajo "baldosas" de Van Hiele-Geldof. Fijémonos cómo se ajusta la palabra "congruente" al mundo de las experiencias del niño. Los alumnos parecen tener interés por el lugar que esa palabra ocupará en su mundo de las experiencias. Además vemos cómo los comentarios en clase se van desplazando cada vez más hacia lo abstracto, sin que haya una presión perceptible por parte de la profesora. El mismo proceso se repite de manera más clara aún con el concepto de paralelismo. Se parte de una situación concreta pero muy pronto los comentarios se refieren a las relaciones del paralelismo con otros temas que se van haciendo cada vez más abstractos. Van Hiele-Geldof hace un análisis más pormenorizado de este asunto (I, pág. 160).

Por supuesto que no existe ningún medio para determinar objetivamente si una didáctica enfocada hacia el desarrollo del tipo estructurante es mejor que cualquier otra. ¿Qué normas habríamos de definir para determinar el grado de éxito si los objetivos de las distintas didácticas difieren entre sí? Además, la situación didáctica depende, aparte de los objetivos y de la correspondiente metodología, de tantísimos factores (profesor, alumnos, entorno social, entorno escolar, etc.) que cualquier comparación resulta imposible, incluso en el caso de que nos pusiéramos de acuerdo sobre los objetivos. Lo que sí es posible, al cabo de una serie de clases y habiendo tomado protocolos, es pedir un trabajo escrito para comprobar el resultado obtenido. La comparación de los resultados con los protocolos podrá, en su caso, indicar dónde se han cometido fallos de orientación por parte del profesor, cómo se pueden corregir los errores y cómo se pueden evitar en el futuro.

Las discusiones en torno a este tipo de protocolos tienen la ventaja de que ya no son vagas puesto que se refieren a situaciones concretas conocidas. Cada docente determinará individualmente hasta qué punto se pueden aplicar los métodos descritos, siempre teniendo en cuenta su propia manera de ser, con *sus* alumnos y en *su* centro. Es poco probable que existan mejores maneras de transmitir y comparar métodos didácticos.

De lo anterior también se podrá deducir lo poco que el material didáctico (p. ej. el libro de texto) puede informarnos acerca del método aplicado. La situación didáctica ya queda prefijada por el docente, los alumnos, el entorno escolar, el entorno social. Y lo mismo pasa con el método. Estos factores son los que determinan el material didáctico y su uso. Un análisis del material didáctico nos dará poca información acerca de los métodos didácticos, puesto que la mayoría del material tiene varias posibilidades de aplicación y el profesor no suele tener la oportunidad de elegir el material que mejor se adapta a su método.

Los protocolos nos suministran muchos más datos. Esto se desprende de lo siguiente: Cuando se habló de la manera de enfocar la enseñanza al principio de la geometría, quedaba alguna duda sobre si todavía existen centros que empiezan directamente de manera abstracta. Es cierto que hay algunos libros de texto que empiezan de manera abstracto-axiomática pero esto no significa que los profesores que los usan hagan lo mismo. De los pocos protocolos publicados sobre la enseñanza de la geometría hay unos de Stellwag: "Selección y métodos de selección", pág. 356. Estos protocolos describen precisamente una clase en que la se sigue el método abstracto-lógico, de cuya existencia se dudaba.

Los experimentos destinados a comprobar la existencia de transferencia han tenido en parte resultados negativos. Encontramos descripciones en Castiello (I) y en Mursell (I, pág. 95). Casi siempre se trata de un tipo de transferencia que en realidad no se tenía por qué esperar puesto que tampoco se había hecho ningún esfuerzo por producirla. Pensemos sólo en las pruebas que pretenden analizar si las destrezas técnicas de cálculo tienen alguna influencia sobre la capacidad de resolución de problemas de cálculo disfrazados (Mursell I, pág. 97). En base a estos resultados parcialmente negativos, Mursell llega a la siguiente conclusión:

> "La organización mental siempre supone un crecimiento en la capacidad de reconocer y responder a diferencias definidas y específicas, de establecer relaciones específicas, etc. El estudio de la transferencia corrobora claramente esta conclusión. El profesor siempre tiene que tener en mente un resultado didáctico definido si pretende conseguir alguna eficacia real. Debe asegurarse de que sus alumnos se dirigen hacia resultados específicos. Debe tener constantemente objetivos que sean limitados, que estén elegidos con inteligencia y que sean concretos. Gran parte de la debilidad de la enseñanza se debe a la carencia de objetivos, al hecho de que simplemente se va cubriendo terreno sin rumbo fijo".

A pesar de todo el material reunido por Mursell para demostrar la ausencia parcial de transferencia, sigue creyendo en la posibilidad de que exista y aporta medios para mejorar los resultados. También son importantes en este sentido las observaciones de Koning (I, pág. 45). Sus pruebas demostraron que los alumnos de quinto de H.B.S. (ver nota 3) casi nunca echaban mano de los conceptos de saturación e irradiación para explicar la presencia de rocío en la hierba. Concluye que el tratamiento de los vapores saturados, irradiación y situación de humedad en la clase de física no es por sí solo suficiente para poder aplicar con éxito estos conceptos a fenómenos naturales como la formación de rocío.

> "Es muy diferente estudiar estos conceptos en una situación "pura" que aplicarlos para explicar una situación compleja".

Koning tampoco se deja desanimar por los resultados. En la pág. 201 escribe:

> "Sólo si implicamos *constantemente* la vida diaria en nuestras clases, si les hacemos ver a los alumnos lo que puede aportar una actitud científico-física a sus y nuestras propias vidas, adoptarán una actitud personal distinta ante el mundo que les rodea".

Por lo que yo sé, no se han realizado todavía experimentos que demuestren la posibilidad de transferencia a que se refiere la Sra. Ehrenfest. No resultará fácil cumplir con las condiciones requeridas por un experimento de ese tipo. ¿Cómo sabremos qué material habrá de desarrollar el grupo investigado y qué otro material el grupo de control? ¿En qué consistirá el material de prueba? El experimento tendrá credibilidad siempre que todos los profesores de matemáticas se pongan mínimamente de acuerdo sobre estas cuestiones. Caso de conseguirse esta unanimidad, existirán pocas dudas acerca del resultado del experimento.

El experimento de Sand (I) nos enseña que a veces el significado de un experimento reside más en la manera como está montado que en su resultado. El objetivo de su experimento consistía en ver si era posible conseguir a través de la enseñanza (conversaciones didácticas) que alumnos flojos de unos 11 años supieran continuar series simples de números si conocían los 4, 5 ó 6 primeros términos. Las series eran las siguientes: *a.* 6-13-20; *b.* 2-6-18-54; *c.* 7-10-15-22; *d.* 7-7-13-13-19; *e.* 7-2-8-9-4. Como vemos casi no se puede hablar de transferencia: los alumnos, entrenados para conocer y percibir ordenaciones de números, han de aprender a reconocer una ordenación relativamente nueva. Es lo mismo que decir que los alumnos han de alcanzar una comprensión muy limitada: en una estructura en la que, a la vista de la descripción, se van añadiendo muchísimos elementos, tienen que reconocer algunos nuevos aunque muy poco divergentes. Nadie se extrañará de que el experimento, que duró dos semanas, tuviera buenísimos resultados: en el último test hubo un 90% de respuestas correctas.

Mucho más importante que el resultado es la pregunta de si alguna vez se ha llegado a poner en duda la educabilidad de precisamente *este* tipo de prestaciones intelectuales. Este es el tipo de peligro que se cierne sobre los experimentos que se pudieran hacer sobre la transferencia: si los experimentos se realizan sin una previa discusión pública acerca de su finalidad existe el peligro de que, según la opinión de algunos, acaben demostrando cosas distintas a la transferencia. Y si finalmente la discusión sobre la finalidad del experimento acaba bien, puede ocurrir que ya no se sienta ninguna interés por el resultado puesto que todo el mundo tiene la suficiente experiencia para saber cuál será.

La percepción de niveles en el pensamiento sólo es posible si el que percibe participa en un proceso didáctico que brinda al tipo estructurante la oportunidad de emplearse a fondo. La experiencia de Wansink (pág. 175) demuestra que en ese tipo de situación se ven claramente los niveles. Yo mismo obtuve en tercer curso de H.B.S. (ver nota 3) la confirmación de la existencia de uno de esos niveles. Primero puse el problema descrito en la página 89. Hubo un alumno que con un poco de ayuda y ánimo dio con la demostración correspondiente. Esta demostración se comentó extensamente en clase. Al cabo de un tiempo puse el problema que Wansink utilizó en su experimento. Sólo hubo un alumno que consiguió la solución. Era el mismo que había resuelto el problema anterior.

Pero por mucho que este tipo de experimentos den muchas indicaciones acerca de la posible existencia de un determinado nivel, sólo tendremos certeza sobre la índole y la cantidad de niveles cuando dispongamos de protocolos de clases sobre distintos temas que se hayan impartido de maneras muy variadas. Sólo entonces podremos estar seguros de si la repentina subida en la curva de aprendizaje es inherente al pensamiento geométrico en general o si se debe sólo a la típica metodología propia.

Todo esto demuestra claramente que los datos sobre la manera en que se forma la comprensión en los alumnos casi sólo pueden proceder de las experiencias de los profesores. Estos datos sólo podrán considerarse mínimamente objetivos si se elaboran a partir de protocolos. La conclusión es que se necesita todavía mucho tiempo y esfuerzo antes de que podamos responder satisfactoriamente a las cuestiones sobre la comprensión. Pero no hay que temer que el tema no valga la pena: se trata, al fin y al cabo, de la utilidad de una enseñanza determinada.

Sería muy importante si pudiéramos hacer el seguimiento de un alumno durante un tiempo prolongado en base a los protocolos. Parece ser que en la práctica es muy difícil conseguirlo incluso en aquellos centros con un enfoque más individual. En ese tipo de centros las distintas conversaciones acerca de la materia ocurren en momentos muy inesperados, por lo que es prácticamente imposible recogerlas minuciosamente. Además ocurre a lo mejor que con determinado alumno hay tan pocas conversaciones individuales que las reseñas de esas conversaciones no tienen la más mínima cohesión. Pero incluso en el caso de que no se descubriera el modo en que determinado alumno alcanza la comprensión habría todavía muchos otros datos de interés en esas reseñas. A la larga quizá obtendríamos datos sobre la cuestión de si los alumnos tienen preferencias acusadas por alguna estructura de pensamiento propia. De la misma manera podríamos ir recogiendo material revelador sobre la cuestión de si la adquisición dificultosa de estructuras de pensamiento suele ir ligada a una carencia *definitiva* de comprensión. Un análisis de este tipo tendría una influencia importante sobre futuras prognosis.

De momento no será posible este tipo de método. La recopilación y reelaboración del material requiere tanto tiempo y esfuerzo y ha de prolongarse a lo largo de tantos años que no parece probable que un solo profesor con un entorno normal pueda con ello. Así pues, serán de momento las experiencias (casi siempre reproducidas con poca objetividad) de los profesores nuestra principal fuente de datos para la didáctica.

CAPÍTULO XVIII

LUGAR QUE OCUPA LA COMPRENSIÓN EN EL PENSAMIENTO RACIONAL

Al principio del primer capítulo anuncié que el presente estudio se ocuparía del papel que juega la comprensión en la enseñanza de las matemáticas en la escuela secundaria. Un análisis provisional del concepto global de comprensión reveló que sólo podemos hablar de comprensión cuando un sujeto de prueba sabe actuar en una situación diferente de la situación en que adquirió los conocimientos, cuando es capaz de actuar adecuadamente y cuando utiliza los medios empleados de forma consciente. Estas condiciones son muy vagas y dejan mucho espacio de maniobra. En el capítulo segundo me referí extensamente a la dificultad de determinar si una situación es "nueva". De alguna manera esto se puede decir de cualquier situación. Como mínimo resulta igual de difícil juzgar si una acción es o no adecuada. A veces tenemos que admitir que una acción que no conduce al objetivo perseguido es perfectamente adecuada porque el sujeto no había podido prever el resultado negativo en base a los datos de que disponía. Y muchas veces tendremos que hacer conjeturas acerca de la intención del sujeto.

En el curso de este estudio, estos tres aspectos se han ido relegando de alguna manera y hemos ido traduciendo el concepto de actuar con comprensión por "actuar en base a una estructura adquirida". Y es que encontrábamos estos tres conceptos en las actuaciones en base a estructuras adquiridas al tiempo que esta expresión nos sugiere que la teoría de la apercepción será de gran utilidad para explicar otros procesos mentales. Con ello se da un gran paso en el estudio de la comprensión hasta el punto que nos podríamos preguntar por qué en el primer y segundo capítulos no hemos basado directamente nuestra definición de comprensión en el concepto de estructura. Esto nos habría evitado tener que trabajar con un concepto de comprensión que parecía ir cambiando constantemente de contenido.

La respuesta a esa pregunta la da el mismo estudio: de la misma manera que pensamos que es bueno empezar el estudio de los objetos geométricos por un análisis de los conceptos globales tal como aparecen en la percepción, pensamos que es bueno empezar el estudio de un objeto perteneciente a las ciencias del espíritu, como es la comprensión, por un análisis del concepto global tal como aparece en la práctica. Los avances que supuestamente se conseguirían empezando directamente con un concepto más definido no dejan de ser aparentes. Nos veríamos forzados a demostrar a posteriori que el concepto "comprensión" definido de esa manera coincide efectivamente con lo que aparece en la escuela secundaria, al tiempo que sería muy difícil hacer juicios objetivos una vez hecha la elección. Ya hemos indicado con anterioridad que la elección de la definición suele determinar en gran parte el resultado del análisis.

Prácticamente todo el mundo coincidirá en que no es descabellado considerar que las leyes de la teoría de la apercepción son aplicables al pensamiento racional. Muchos psicólogos Bergson, Delacroix (II, pág. 235), Hönigswald (pág. 139), Guillaume (pág. 182), Meyerson (pág. 589), han razonado de manera clara que toda percepción supone un pensamiento y que las percepciones de adultos suelen tener un alto nivel de pensamiento. Por ello, si admitimos que las leyes de la apercepción también son válidas para el pensamiento con comprensión, esto sólo equivale a suponer que las leyes que ya son válidas para determinada forma de pensar también se pueden aplicar a un terreno del pensamiento más amplio.

Actuar en base a una estructura adquirida no equivale totalmente a actuar de manera adecuada en una situación nueva. Lo segundo se podría considerar más o menos como consecuencia de lo primero. La actuación en base a una estructura adquirida nos sitúa en la mente del sujeto. La adecuación de actuar en una nueva situación se deja más bien a juicio del conductor de la prueba. También esta diferencia hace preferible descartar como punto de partida una definición de comprensión fundada en acciones basadas en una estructura adquirida. Muchas veces será difícil averiguar si una persona ha actuado o no en base a determinada estructura adquirida. Por otro lado sí que constataremos comprensión cuando un sujeto haya actuado en base a una estructura adquirida y esta acción no haya conducido al objetivo deseado, siempre que este fracaso no se pueda deducir con anterioridad de los datos disponibles. En este caso existe comprensión en el componente determinado por la estructura. Este razonamiento parece menos forzado que el primero, según el cual una acción no conducente al objetivo había de llamarse adecuada.

Es posible encontrar en la percepción casos de este tipo. Alguien puede deducir, en base al patrón de un suelo de parqué, el aspecto que tiene ese suelo en lugares que se encuentran fuera de su campo visual. Si ese mismo suelo, debido a algún desperfecto, tiene alguna alteración en esos lugares, no podremos deducir del contraste entre la expectación y la realidad que el sujeto carece de comprensión.

No es propósito del presente estudio ver cómo se podría explicar la formación de estructuras. Pero sí es importante observar que para la formación de las estructuras se precisan dos actos de pensamiento esencialmente distintos: la identificación de los elementos constitutivos y su ordenación (ver Delacroix II, pág. 240 y 241). Selz los expresa de la siguiente manera en "Los principios constitutivos del mundo fenomenológico" (III, pág. 12):

> "De la misma manera que sólo existen dos clases fundamentales de fenómenos perceptivos, cualidades y modos de combinación fenomenológicos, existen asimismo sólo *dos clases básicas de modos de combinar las cualidades hasta globalidades fenomenológicas*, la *subida de grado* y la *repetición".*

La "subida de grado" se corresponde con la ordenación y la "repetición" con la identificación, puesto que ésta última es condición necesaria y suficiente para que haya una repetición.

Es importante distinguir entre una identificación global y una identificación que sólo es posible analizando el objeto. Cuando se les ha enseñado a niños (de unos 4 años) qué son robles y qué son hayas, serán capaces de designar robles y hayas de entre una gran diversidad de árboles aunque los árboles sean muy pequeños y estén muy poco desarrollados. Sin embargo, incluso la mayoría de adultos que saben distinguir robles y hayas de otros árboles tendrán que ponerse a pensar en las características de estos árboles. La identificación de una planta en base al análisis de sus características (con la ayuda de una flor) es un trabajo bastante laborioso y, una vez se ha conseguido la identificación, todo reconocimiento posterior se efectuará mediante una identificación global. En virtud de esta distinción tendremos que distinguir también entre estructuras globales y estructuras formadas después de un análisis previo. Sólo las últimas conducen a una comprensión matemática. La existencia de estructuras globales demuestra asimismo la aparición de la comprensión no matemática (ver Delacroix I, pág. 103 y 112).

El análisis de un objeto supone que de ese objeto se van sacando sucesivamente los aspectos conceptuales que se van observando. Mediante la abstracción, es decir eliminando muchos aspectos conceptuales del objeto de manera que se crea un fuerte empobrecimiento conceptual, es posible hacer nuevas identificaciones, pudiéndose formar nuevas estructuras. Se trata de "retroceder para tomar impulso" ya que la nueva estructuración vuelve a producir un enriquecimiento conceptual.

Podemos decir que las matemáticas se ocupan de las estructuras "en sí" después de desvincularlas de los objetos. Sin embargo, por norma resulta imposible librar a las matemáticas de manchas ajenas puesto que las estructuras que ahora se han convertido en *objeto* del pensamiento deben a su vez ser refundidas en una estructura superior. Este proceso es interminable: puesto que el matemático desea cada vez más comprensión, seguirá eligiendo estructuras como sus objetos y, tras analizarlas e identificarlas, las refundirá en una estructura superior. Por otro lado, es difícil indicar dónde empezaron las matemáticas: el proceso de análisis y subsiguiente estructuración ya se ha efectuado a un nivel bastante alto antes de que el matemático reconozca sus objetos.

Sea lo que sea lo que queramos entender por matemáticas, su enseñanza tendrá que ocuparse del análisis de los objetos y la búsqueda de estructuras derivadas de ese análisis. Esto es en el *propio* interés de las matemáticas ya que hacen un uso constante de este método y la mejor manera de demostrar la marcha de las cosas es a la luz de objetos concretos conocidos. Pero también es en el interés de las posibilidades de aplicación de las matemáticas, porque sólo después de un análisis previo y una abstracción *a partir de* los objetos es posible retornar desde el campo estructurado *hacia* los objetos. Y finalmente y sobre todo, en el interés del valor formativo de las matemáticas: la transmisión de buenos hábitos de pensamiento. Si en matemáticas, aparte de las estructuras mentales, nos ocupamos además del análisis de los objetos y las formas de las estructuras en base a este análisis, nos estaremos ocupando de aquello que constituye la esencia del pensamiento racional ordenado. Si consideramos las matemáticas en este sentido, no resulta tan exagerada la afirmación de la Sra. Ehrenfest según la cual "las matemáticas son el resultado del pensamiento más acertado". Se reduce pues al pensamiento racional, del que se han ido eliminando sistemáticamente las estructuraciones globales.

La formación de valencias en el pensamiento es como el complemento de la estructuración. La mayoría de las estructuras sólo pueden surgir después de que se haya formado un número suficiente de valencias. Así pues, el paralelogramo puede ocupar una posición central en gran número de estructuras puesto que, por un lado, apela a ciertas propiedades y, por otro, recuerda un número de medios por los que podemos reconocer un paralelogramo. Las valencias indican, de esta manera, las conexiones de una palabra con determinadas estructuras; también conectan un concepto complejo con una sola palabra que como tal puede representar a dicho concepto en una nueva estructura. La existencia de valencias explica cómo es posible averiguar los conocimientos de un sujeto sin que éste tenga que tener comprensión. El sujeto puede contestar en base a las valencias existentes sin que tenga que usar alguna estructura. Este tipo de pruebas son imprescindibles en la enseñanza puesto que para la adquisición de todo conocimiento se necesita un mínimo determinado de valencias.

La formación de valencias se produce de un modo totalmente distinto a la formación de estructuras. Incluso se necesita una predisposición personal totalmente diferente. Esto lo vemos en la distinción que hace De Groot (I) de las fases del pensamiento. La manera más clara de entenderlo es como lo hace Van Parreren (III), es decir, entendiéndolo como una fase receptiva en la que se forman las valencias y una fase de estructuración activa en la que se forman las estructuras. Uno de los mayores problemas de las matemáticas es cómo crear en los alumnos la predisposición idónea para la situación correspondiente. Una actitud de estructuración activa durante el período destinado a la formación de valencias puede entorpecerla considerablemente (ver Van Parreren, I). Una actitud receptiva durante el período destinado a la formación de estructuras producirá conocimientos aparentes.

Por regla general, la formación de valencias se desarrolla con mayor fluidez que la formación de estructuras. Cuando un alumno tiene la actitud receptiva correcta, el profesor puede transmitirle directamente las valencias. El caso de la formación de estructuras no es tan sencillo. Cuando un alumno tiene la actitud de estructuración activa correcta, llegará sin duda, bajo la dirección del profesor, a la formación de patrones mentales. Sin embargo habría que preguntarse si estos patrones incluirán el patrón que pretende el profesor. Encontramos esta dificultad en la teoría de la apercepción, concretamente con las figuras ambivalentes. En la revista FOTO de febrero de 1950 encontramos cuatro ilustraciones de un tabla de pastelero, es decir, una tabla con agujeros para la fabricación de muñecos de pasta. A pesar de que el fotógrafo aseguraba que se trataba de una tabla con agujeros, todo el mundo veía en las ilustraciones tablas con un muñeco de Santa Klaus por encima. Finalmente conseguimos ver las ilustraciones como tablas vaciadas practicando primero con figuras ambivalentes más sencillas hasta que fuimos capaces de verlas en una u otra estructura. En esta dirección tendremos que buscar los medios para que los alumnos adquieran comprensión en situaciones mentales más abstractas. Si la estructuración no funciona en alguna situación determinada, tendremos que intentar conseguir su formación en un contexto más sencillo.

Van Hiele-Geldof (pág. 64) describe de la siguiente manera el funcionamiento del pensamiento estructurante:

"Las operaciones del pensamiento hacen:

1. que la estructura percibida se estructure de manera más sutil,

2. que la estructura percibida se vea como una estructura parcial de otra,

3. que la estructura percibida se amplie,

4. que se pueda concluir que existe un isomorfismo de la estructura percibida con la estructura conocida".

Estos puntos encierran las posibilidades del pensamiento productivo. Responden a la pregunta de cómo una persona puede llegar a nuevas ideas y nuevas comprensiones. La posibilidad recogida en el tercer punto es la más sencilla: Se hallan nuevas relaciones en base a una estructura ya conocida. En este caso es evidente la relatividad del concepto "nuevo", puesto que las relaciones halladas ya se encontraban incluidas con anterioridad en el principio ordenador de la estructura en cuestión. Sin embargo la explicitación de este tipo de relaciones puede suponer un gran avance en el desarrollo del problema. Algo más complicada resulta la posibilidad de llegar a nuevas relaciones, referida en el punto cuarto. Las matemáticas usan este método muy conscientemente. Las relaciones halladas no se suelen llamar nuevas sino que se suelen identificar con las relaciones de las que proceden. Esto es una consecuencia lógica de considerar las estructuras "en sí". Este método es muy productivo en un contexto no matemático puesto que las relaciones obtenidas se entenderán como nuevas.

El método indicado se puede usar de tres maneras esencialmente distintas:

a. El método matemático de llegar a un isomorfismo es demostrando, por análisis de una estructura que se ha de formar, que los principios de ordenación constituyentes son idénticos a los de la estructura conocida.

b. En física se llega al isomorfismo dando una estructura global del fenómeno que se ha de estudiar que permita ser identificada globalmente con una estructura conocida. El isomorfismo se vuelve perfecto si se consiguen hallar en el contexto físico los representantes de los principios de ordenación constituyentes de la estructura conocida.

c. Puede ser que un isomorfismo no llegue más lejos que en lo global. En tal caso estamos ante una metáfora.

En los tres casos la constatación de un isomorfismo puede dar resultados prácticos al poder hacer uso en la nueva estructuración de la estructura lingüística de la estructura dada y que está completamente explorada. En el caso *a* podemos, sin restricción alguna, transvasar todas las relaciones halladas de la estructura conocida al nuevo campo. Este tipo de transmisión también se puede hacer en el caso *b* aunque -para asegurase de que son válidos los principios de ordenación- se haría bien en comprobar, mediante tests, si se mantiene el isomorfismo en las ampliaciones de estructuras. En el caso *c* no se permite ninguna transmisión de una estructura a otra, excepto en el caso de alguna hipótesis que se ha de verificar a la mayor brevedad.

Las dos primeras operaciones sólo se pueden aplicar después de que se hayan analizado los principios ordenadores de una estructura determinada. Por ampliación se puede conseguir una estructuración más sutil, por reducción se puede formar una estructura englobadora. Estas dos operaciones son capaces de cambiar tanto el aspecto de una estructura que resulta difícil negar que nos hallamos frente a un pensamiento productivo, aunque hemos de admitir que las nuevas relaciones ya se hallaban de manera potencial en la estructura dada.

Ahora que hemos analizado el modo en que funciona el pensamiento estructurante, se ha clarificado la diferencia entre una estructuración global y aquélla que se forma tras un análisis. La primera forma de estructuración sólo admite una operación: la ampliación de estructuración. (No paso a considerar el isomorfismo global ya que no puede suministrar nuevas relaciones). La segunda forma, en cambio, admite tres nuevos tipos de ampliación que incluso suministran el material para el establecimiento de relaciones con nuevas estructuras. La operación central de estas ampliaciones es la identificación por medio de análisis.

La diferencia entre la enseñanza enfocada hacia el desarrollo del tipo estructurante y aquélla enfocada hacia el desarrollo del tipo algorítmico consiste precisamente en el hecho de poner el análisis como punto central (ver Duncker, pág. 24). Si el profesor no entrena a sus alumnos en el análisis de objetos, si siempre lo hace él mismo (o si deja de hacerlo del todo), está formando alumnos que sólo tienen a su disposición estructuras globales, estructuras que sólo se pueden ampliar pero que los alumnos por sí solos no saben relacionar con otras.

Así pues, junto a las valencias y las estructuras habremos de tener en cuenta los análisis. Estos tres aspectos tienen una función distinta en el pensamiento racional. Si volvemos a la teoría de Selz (I y II) encontraremos los tres. Su estudio principal trata sobre todo del análisis y de las formas en que puede aparecer. Encontramos en ese estudio una elaboración muy extensa de estas formas de análisis. También es difícil sostener que Selz no haya visto las valencias aunque haya subestimado su importancia para la realización de largos procesos mentales. Sabía muy bien que las estructuras juegan un papel muy importante en el pensamiento racional. Esto lo demuestran sus publicaciones III, IV y V. Sin embargo sus estudios no indican con claridad cómo son las distintas funciones de las valencias, las estructuras y los análisis y cómo colaboran entre sí. Puesto que su trabajo principal lo escribió como reacción contra la teoría de la asociación, que esencialmente sólo conoce valencias, casi no se refirió al significado que éstas tienen. La consecuencia es que la función de las valencias la asumieron en gran parte los análisis de manera que han adquirido un significado fuertemente asociativo, lo cual con toda seguridad no era intención de Selz. Esta carácter asociativo todavía se refuerza más por el hecho de que en su teoría no se menciona el importante papel de las estructuras que desde el punto de visto fenomenológico aparecen de manera espontánea en el pensamiento. El que esto no haya ocurrido es probablemente porque Selz sólo ha comprendido el importante papel de las estructuras más tarde: las publicaciones que he mencionado datan todas de 1930 ó después.

Tiene poco sentido adentrarnos aquí en la cuestión de si el carácter reproductivo que adquiere el pensamiento racional en Selz fue intencionado. Es mucho más importante que este carácter reproductivo se encuentra en los métodos didácticos que se basaron en la teoría de Selz. Uno de ellos es el método de Sand, que enseña a los alumnos a completar series. Mediante un constante análisis previo se forma en los niños una estructura global de los principios ordenadores de las series. El análisis en sí casi no mejora; en todo caso los experimentos no lo demuestran. Pero probablemente Sand tenía unos alumnos para los cuales el análisis les resultaba demasiado difícil. Cuando en tales casos se trata de destrezas que para el niño son necesidades vitales, es lícito y casi recomendable que se apliquen estos métodos descritos. Sin embargo para alumnos normales este tipo de método sólo es apropiado en casos rarísimos.

Puesto que Selz partía de problemas de índole muy específica, no clarificó el importante papel que juega la estructuración procedente del material presentado (ver Van Parreren, I y II). Esto es muy llamativo si nos fijamos en el primer problema que planteó Boermeester (pág. 29). En la mayoría de los alumnos a quien presenté el problema se produjo una estructuración espontánea que se extendió tanto que los alumnos, de hecho, vieron la respuesta enseguida. Puesto que seguían la construcción paso a paso, vieron que, basándose en la simetría, debían formarse constantemente triángulos congruentes. Obtuvieron los conectores para la demostración complementando los complejos del esquema. La solución se consiguió de esta manera y esto se ve en un examen en que les puse un problema similar. Prácticamente todos los alumnos hallaron la respuesta y sólo en algunos faltaba algún conector. Hay que decir que los alumnos llevaban estudiando casi dos años de geometría de V.H.M.O. (ver nota 2) por lo que estaban suficientemente familiarizados con las posibilidades de conexión y con la relación entre figuras.

En la didáctica se trata pues de fomentar las estructuraciones espontáneas. Los problemas pueden servir para dirigir el pensamiento. Pero hay que tener muy en cuenta que el objetivo no es la resolución de problemas sino la obtención de nuevas estructuras, estructuras que se derivan espontáneamente de los problemas y otras que se obtienen por estructuraciones continuadas. Por lo tanto los problemas indicados para ello no serán en absoluto aquéllos para los que el alumno dispone inmediatamente de todos los datos. Indiqué en el capítulo X cómo han de ser esos problemas. En todo caso la didáctica habrá de buscar medios para clarificar al alumno que los progresos en matemáticas no vienen determinados por la resolución de problemas sino por la estructuras que se van formando.

Puede servir de ejemplo el método del investigador científico: cuando éste, en su búsqueda de alguna solución, llega a una nueva estructura, aparcará temporalmente la solución del problema. Intentará aumentar todo lo que pueda la utilidad de su hallazgo aplicando las operaciones de estructuración en la estructura hallada. De esta manera la búsqueda de una solución habrá conducido a resultados a pesar de no haberse alcanzado el objetivo propuesto.

Basar el concepto de comprensión en estructuras implica que no podemos hablar de una comprensión en general sino que se trata cada vez de una comprensión en algo muy específico. Esto concuerda perfectamente con lo que dio un primer análisis del concepto global. Pero una expresión como comprensión matemática se refiere también a un concepto muy complejo. Podríamos decir que alguien tiene comprensión matemática si dispone de muchas estructuras que son importantes para las matemáticas. Pero al mismo tiempo se está diciendo que dispone de todo un complejo de comprensiones muy especiales. Si las vamos analizando, descubrimos pronto que muchas de las estructuras relacionadas con las comprensiones también aparecen en otras asignaturas muy distintas, o en todo caso son isomorfas a las estructuras que aparecen en otras asignaturas. En las matemáticas ya encontramos algo parecido: vimos que ciertas componentes como quebrados, superficie, congruencia y multiplicación se basan en estructuras que en gran parte coinciden. Para la didáctica esto quiere decir que habremos de buscar el material que resulte más idóneo para la formación de estructuras, que se preste lo mejor posible a ser reestructurado en los complejos mencionados. Además del hecho de que encontramos estructuras comunes en asignaturas diferentes, éstas también tienen en común que las estructuras se basan en las mismas operaciones estructurantes. Así pues, podemos admitir que la inteligencia queda en parte determinada por la destreza para estructurar, una destreza que se basa en gran parte de el arte de analizar. Esta idea nos conduce hacia el factor G de Spearman.

Aunque la destreza para estructurar está en parte determinada por las aptitudes, puede ser y *debe* ser desarrollada. La capacidad de analizar se basa a su vez en un complejo de estructuras, por lo que un conocimiento de las leyes puede acelerar el análisis y con ello también la estructuración. Incluso en este punto el educador tiene una tarea importante.

Podemos entender perfectamente esta tarea si consideramos la relación entre el primer y segundo nivel en geometría. El primer nivel supone que el alumno que lo ha alcanzado es capaz de aplicar de forma operativa las propiedades conocidas de una figura conocida. El segundo nivel se alcanza cuando el alumno es capaz de utilizar de manera operativa relaciones conocidas entre figuras conocidas. Para alcanzar el primer nivel es necesario que el alumno entienda lo que significa analizar estructuras geométricas visuales globales. Las estructuras globales se convierten en estructuras analizadas y las relaciones globales se transforman en relaciones matemáticas. Para alcanzar el segundo nivel es necesario que a su vez se estructure el conjunto de principios ordenadores de las estructuras analizadas del primer nivel. Aquello que pertenece al *análisis* de estructuras del primer nivel se convierte ahora, a su vez, en *elemento* de una estructura del segundo nivel, adquiriendo así una función totalmente distinta (ver Meyerson, pág. 574 y 582). No nos ha de extrañar que este tipo de transición, que requiere un desplazamiento radical de la atención del alumno, vaya unido a muchas dificultades.

Todo la anterior habrá clarificado el concepto de nivel. Si consideramos por ejemplo el tercer nivel, que se alcanza cuando el alumno conoce los principios ordenadores de las relaciones entre las figuras y sabe operar con ellos, vemos que entre el tercer y el segundo nivel existe la misma relación que entre el segundo y el primero.

Parece ser que el pensamiento productivo tiene aún una quinta manera de operar: el paso a un nivel superior. Esta operación consiste en la estructuración de los principios ordenadores de un complejo conocido de estructuras. Esta operación discurre tan lentamente que no se puede encontrar en la resolución de problemas en el laboratorio. Sin embargo su efecto útil es tan grande que no podemos en ningún caso pasarla por alto al describir el pensamiento productivo.

El análisis cada vez más minucioso de las dificultades que tienen los alumnos en la enseñanza de la geometría nos indicará con una precisión cada vez mayor qué estructura falta. Estos análisis serán de gran ayuda para el profesor de cara a la resolución de esas dificultades. Esto sin embargo no significa que la didáctica deba consistir en aportar una estructura tras otra con una minuciosidad exasperante. Aparte de la imposibilidad práctica de tal intento -todo razonamiento implica un sinfín de estructuras que el pensador sustituye en gran parte por valencias- sería igualmente incorrecto por principio. Debido a la multiplicidad de las estructuras no se percibiría su interrelación. La mejor manera de cerciorarse de la presencia de estructuras fundamentales es eligiendo material que las haga funcionar. La mejor manera de hacer surgir las estructuras que se han de basar en aquéllas es ofreciendo material con un fuerte funcionamiento estructurante. Al controlar el proceso de aprendizaje tendremos que distinguir entre el control de valencias, de los análisis y de las estructuras. Pero también nos tendremos que imponer limitaciones ya que los alumnos ya no reconocen como tales a las unidades que se hallan demasiado separadas de su contexto.

Es importante plantearse si toda esta teoría de la comprensión vale también para las comprensiones que aparecen en otras asignaturas. En lo que se refiere a las operaciones del pensamiento estructurante, ya hemos dicho implícitamente que, a nuestro juicio, no haya diferencias básicas. Las diferencias no hay que buscarlas en las operaciones sino en el valor que se les da. En el Círculo de Estudios para la Didáctica General entre otros, Mossel observó que al estudiar un idioma es de importancia primaria la adquisición de valencias y que las estructuras indicadas por la gramática son secundarias. Pienso además que en muchas ciencias las estructuras habrán de seguir siendo globales por principio puesto que su transformación en una estructura analizada supondría desnaturalizarlas. Por supuesto que será posible analizar las estructuras globales pero en tal caso la nueva estructura resultante será globalmente isomorfa con la original. Pienso p. ej. en la formación de nuevas palabras en un idioma. Es cierto que esta formación remite a una estructura pero ésta no está determinada a priori. En este aspecto las matemáticas se diferencian clarísimamente de otras ciencias como las lenguas o la historia.

Podemos decir que el estudio de las matemáticas consiste en la adquisición de comprensiones. La adquisición de comprensiones equivale a la adquisición de estructuras y las matemáticas precisamente se ocupan de las estructuras analizadas desvinculadas de los objetos. En muchas otras ciencias la formación de comprensión se encuentra, como mucho, entre los objetivos intermedios o provisionales de la educación de un alumno (Mossel). En lo que respecta a las asignaturas del V.H.M.O. (ver nota 2), el objetivo real suele consistir en la adquisición de ciertos conocimientos o destrezas.

Hay por lo tanto una diferencia entre el valor que las distintas asignaturas dan a la comprensión. Para conocer bien estas diferencias es necesario que exista una mejor conciencia de que la que hay ahora de los objetivos de esas asignaturas. Será muy importante el tipo de centro en que se imparten dichas asignaturas. Es evidente que, p. ej., la enseñanza de las matemáticas en las escuelas técnicas elementales estará principalmente enfocada hacia la adquisición de estructuras sencillas que permitan a los alumnos realizar determinadas acciones técnicas. La enseñanza de una asignatura determinada no puede estar mediatizada por cuestiones de prestigio, una asignatura no se puede considerar importante por requerir tal número de conocimientos o tal profundidad de comprensión, sino por el significado especial que tiene en el tipo especial de centro.

Nos podríamos plantear si es posible aplicar a otras asignaturas el método de reconocimiento global para la comprensión que vimos al principio: "actuar intencionada y adecuadamente en una nueva situación". Tiene sentido plantearse esta pregunta puesto que, aunque ahora prefiramos utilizar el término estructura, no estamos seguros de cómo se reconoce esta estructura en otras asignaturas. Mossel opinaba que podemos usar perfectamente la definición global cuando se trata de estructuras gramaticales, pero que el método de reconocimiento falla cuando se quiere demostrar la comprensión en las intenciones de un escritor. En efecto, con ese tipo de estructuras globales resulta difícil (o quizá imposible) averiguar si una interpretación es adecuada o no. Es prácticamente imposible encontrar métodos de reconocimiento para una comprensión de este tipo a causa de las grandes dificultades que existen de conseguir un análisis de los principios ordenadores de estas estructuras.

Podremos concluir que existe una comprensión de un tema histórico si logramos hallar datos en una dirección determinada y en base a una estructura presente. Esta interpretación no es muy distinta de la situación global en matemáticas: actuar intencionada y adecuadamente en una nueva situación.

El estudio encaminado a conocer la comprensión en geometría parece haber dado unos frutos que también sirven para comprender la comprensión en otros terrenos. La única diferencia parece ser que el dominio de la comprensión tiene en estas otras asignaturas mucha menor importancia. Es evidente que la geometría es la más idónea para descubrir la equivalencia entre comprensión y pensamiento estructurante. La mejor manera de conocer el pensamiento estructurante es a través de lo contemplativo y ¿qué otra asignatura incluye más la contemplación que la geometría?

Terminaré con un pequeño esbozo de la ideas desarrolladas en el presente estudio expresándolas en la terminología que he usado en este capítulo. Hacerlo así tiene dos ventajas: en primer lugar supone una justificación del camino seguido, y en segundo lugar se puede ver cómo la teoría desarrollada se aplica en una situación concreta.

En el primer capítulo se intenta llegar a una estructura global sobre la comprensión. Esta es una estructura que se forma cuando hemos recogido un número suficiente de datos acerca del modo en que la comprensión, en su concepción usual, aparece en la situación que pretendemos analizar. Esta situación es la enseñanza de la geometría en la escuela secundaria.

En el segundo capítulo se analizan los principios ordenadores de la estructura global. Llegamos a tres principios ordenadores (provisionales) con los que montamos una estructura analizada (provisional). Con esta estructura ya podemos operar.

En el tercer capítulo situamos el lugar que ocupa la comprensión en el pensamiento racional. En este estadio hay dos teorías que resultan muy útiles: una es la teoría de Van Parreren, que resalta la importancia del otro componente del pensamiento racional, es decir, las valencias, y la otra es la teoría de la Gestalt, que parte de la hipótesis de que la estructura del pensamiento con comprensión es isomorfa con la de la apercepción. En lo que respecta a la comprensión geométrica no hay duda de que este isomorfismo está presente: la primera estructura global de la geometría coincide con la de la apercepción. De momento adoptamos esta hipótesis y la comprobaremos en la práctica.

En el cuarto capítulo se analizan las posibilidades de aplicación de las teorías desarrolladas. Es decir que averiguamos si con las nuevas estructuras se puede operar y si las estructuras que se van formando son isomorfas con las estructuras globales que hemos obtenido en la práctica de la enseñanza.

En el quinto capítulo se analiza la formación de la comprensión. Resulta que el lenguaje juega un papel importante en la formación de valencias. Estas valencias crean elementos que pueden formar una nueva estructura.

En el sexto capítulo constatamos que los alumnos a veces no tienen comprensión de aquellos temas matemáticos que parecen dominar. Para expresarlo en la terminología del capítulo XVIII: parten de la estructura analizada de su profesor, se forman a partir de ahí una estructura global que poco o nada tiene que ver con objetos reales y por ello son incapaces de hacer servir su estructura global en situaciones concretas. En ese capítulo se desarrollan tres métodos para solucionar estas dificultades. Sin embargo el que valore la esencia del pensamiento productivo, tal como está desarrollado en el capítulo XVIII, sólo considerará pedagógicamente justificado el tercero.

En el séptimo capítulo estudiamos la influencia que tiene la comprensión sobre los hábitos mentales y de conducta del niño. Nos encontramos enseguida con el concepto de transferencia, entendiéndolo en el sentido amplio que se usa en círculos pedagógicos. Así pues, por transferencia entendemos la transmisión de hábitos mentales y de comportamiento tanto dentro del terreno de las matemáticas como fuera.

Puesto que el problema es muy complicado, el capítulo octavo se dedica a la posibilidad de aplicar las matemáticas en otras asignaturas y el noveno a su valor formativo. Pero en los tres casos hemos de considerar como condición principal para esta transmisión el hecho de que el alumno llegue a la estructura analizada a partir de la estructura global, obtenida por lo empírico. El alumno que se basa exclusivamente en la estructura analizada del profesor será por principio incapaz de aplicar las matemáticas en un terreno distinto. De ahí la utilidad de hablar del tipo algorítmico y del tipo estructurante. Ambos son productos de la enseñanza y han de considerarse como casos extremos con todas las graduaciones intermedias posibles. El profesor de matemáticas que intenta materializar en sus clases el curso normal del pensamiento productivo busca la formación del tipo estructurante. El profesor de matemáticas que pretende transmitir sus conocimientos eliminando la evolución del pensamiento que él mismo ha experimentado busca la formación del tipo algorítmico.

En el capítulo décimo se ve claramente lo limitado del alcance de la teoría desarrollada. En el proceso de aprendizaje el aspecto emocional juega un papel muy importante. Al limitarse el estudio a la comprensión no se tiene en cuenta el significado de las emociones en un proceso de aprendizaje. Sin embargo el profesor tendrá que tener muy en cuenta la influencia de lo emocional al elegir su material didáctico.

En los capítulos XII a XVI se estudia el significado de la comprensión en la práctica de la enseñanza. Las estructuras desarrolladas en los capítulos anteriores y las estructuras lingüísticas correspondientes posibilitan una presentación más clara de las situaciones y permiten desarrollar las soluciones por la vía teórica. Es importante el concepto de nivel que se observa en la práctica de la enseñanza de la geometría. Tiene el carácter de una comprensión pero las dificultades que aparecen en una comprensión normal son aquí mucho más pronunciadas. Es como si el alumno, tras alcanzar un nivel, se pusiera a pensar de manera totalmente distinta.

En el capítulo diecisiete se argumenta que para llegar a una teoría satisfactoria de la comprensión no nos podemos limitar a experimentos de laboratorio. La fuente primordial y principal han de ser las experiencias prácticas de la enseñanza. Pero si queremos darles un valor científico, habremos de buscar los medios para que los datos resultantes sean objetivos. Uno de esos medios lo constituyen los extensos protocolos de las clases.

Los primeros diecisiete capítulos han suministrado el material suficiente para tener una estructura clara del concepto de comprensión. Se han establecido tantas relaciones con otras estructuras que hemos posibilitado el análisis de los principios ordenadores de esta estructura. Los resultados más importantes de este análisis son el significado de la identificación global y la distinción entre tres aspectos del pensamiento racional: las estructuras, los análisis y las valencias. Muchas cosas que antes resultaban vagas quedan clarificadas por este análisis y también se establecen nuevas relaciones. Este análisis nos eleva a un nivel superior en el estudio de la comprensión. Pero este paso a un nivel superior sólo ha sido posible porque en los diecisiete primeros capítulos hemos ido adquiriendo el suficiente número de estructuras.

BIBLIOGRAFÍA

BARLETT. Remembering. Cambridge. 1932.
R.K. Bent y H.K. Kronenberg. Principles of Secondary Education. N.Y. 1949.
J.J.W. BERGHUYS. Grondslagen van de aanschouwelijke. Groningen 1952.
E.W. BETH. I. De psychologische argumenten en richtlijnen voor de vernieuwing van het onderwijs in de wiskunde. Eucl. XVI, 1.
¾ II. Réflexions sur l'organisation et la méthode de l'enseignement mathématique, en: L'enseignement des mathématiques, Neuchâtel-Paris 1955.
H.C. BIELE y H. WIEBENGA. Beschouwingen naar aanleiding van de ondergang van een Montessori Lyceum. Vernieuwing n° 131, 1956.
C. BOERMEESTER. I. Over meetkunde-onderwijs en psychologie. Groningen 1955.
¾ II. Grepen uit de Psychologie van het denken in verband met het Wiskunde-Onderwijs. Purmerend 1956.
W.J. BOS. Moeilijkheden in de meetkunde. Progressie en regressie. Eucl. XXVIII, 1.
W.J. BOS y P.E. LEPOETER. Wegwijzer in de Meetkunde. 3 dln met toelichting. Amsterdam 1956.
L.N.H. BUNT. I. Moeilijkheden van leerlingen bij het beginnend onderwijs in de meetkunde. Eucl. XXII, 2 y 3.
¾ II. Statistiek voor het V.H.M.O. Groningen 1956.
W.H. BURTON. The Guidance of Learning Activities. New York 1944.
E. CASTELNUOVO. Intuitive Geometrie. Lehrer Rundbrief VII, 11.
J. CASTIELLO. I. Geistesformung. Berlin-Bonn 1934.
¾ II. A Human Psychology of Education. London 1937.
D. VAN DANTZIG. I. Het wiskundige model in de ervaringswetenschappen. Eucl. XXIX, 1.
¾ II. The Function of Mathematics in Modern Society and its Consequences for the Teaching of Mathematics. Groningen 1956.
H. DELACROIX. I. Les opérations intellectuelles, en: Nouveau Traité de Psychologie par G. Dumas, Tomo V. Paris 1936.
¾ II. La Psychologie de la raison, en idem.
¾ III. L'invention et le génie, en idem, Tomo VI. Paris 1939.
K. DUNCKER. Zur Psychologie des produktiven Denkens. Berlin 1935.
T. EHRENFEST-AFANASSJEWA. Uebungensammlung zu einer geometrischen Propaedeuse. 's-Gravenhage 1931.
T. EHRENFEST-AFANASSJEWA y H. FREUDENTHAL. Kan het wiskundeonderwijs tot de opvoeding van het denkvermogen bijdragen? Purmerend 1951.
W.T. VAN EST. Enkele facetten van de wiskundige heuristiek. Groningen 1956.
K. FLADT. Elementargeometrie. Leipzig-Berlin 11928.
H. FREUDENTHAL. Het mechanica-vraagstuk, en: Nieuwe wegen bij het onderwijs in de wiskunde en de natuurwetenschappen. Purmerend 1953.
L. VAN GELDER. Ontsporing en correctie. Groningen 1953.
J.C.H. GERRETSEN. De schoolmeetkunde van didactisch en wetenschappelijk standpunt. Publ. Math. Centr. octubre 1955.
A.D. DE GROOT. I. Het denken van de schaker. Amsterdam 1946.
¾ II. De psychologie van het denken en het meetkunde-onderwijs in Het aanvankelijk meetkunde-onderwijs. Purmerend 1955.
P. GUILLAUME. La psychologie de la Forme. Paris 1937.
P.M. VAN HIELE. I. De niveau's in het denken, welke van belang zijn bij het onderwijs in de meetkunde in de eerste klasse van het V.H.M.O. Paed. Stud. XXXII.
¾ II. De mathematicus als wetenschappelijk onderzoeker en als leraar. Paed. Stud. XXXIII.
¾ III. Ervaringen opgedaan bij het toelatingsexamen rekenen. Vernieuwing 118, 1954.
D. VAN HIELE-GELDOF. I. De didaktiek van de meetkunde in de eerste klas van het V.H.M.O.

¾ II. Pakkend materiaal ter inleiding van meetkundige grondegrippen, en: Het aavankelijk meetkunde-onderwijs. Purmerend 1955.
E.R. HILGARD. Theories of Learning. New York-London 1948.
R. HÖNIGSWALD. Die Grundlagen der Denkpsychologie. Leipzig-Berlin 1925.
G. HUMPHREY. Thinking. London-New York 1951.
C.H. JUDD. Psychology of Secondary Education. Ginn-Boston 1927.
B. KERN. Wirkungsformen der Übung. Münster 1930.
H.L. KINGSLEY. The Nature and Conditions of Learning. New York 1947.
W. KÖHLER. I. Psychologische Probleme. Berlin 1933.
¾ II. Gestaltpsychology. New York 1947.
PH. KOHNSTAMM. Keur uit het didactisch werk. Groningen 1952.
PH. KOHNSTAMM, J. LINSCHOTEN, M.J. LANGEVELD et al. Inleiding in de psychologie. Groningen 1955.
J. KONING. I. Enige problemen uit de didactiek der natuurwetenschappen, in het bijzonder van de scheikunde. Dordrecht 1948.
¾ II. Problematiek van de experimenteerschool. Paed. Stud. XXXIII.
D.J. KRUYTBOSCH. Avontuurlijk Wiskunde Onderwijs. Rotterdam 1936.
M.J. LANGEVELD. I. Inleiding tot de studie der paedagogische psychologie van de middelbare-schoolleeftijd. Groningen 1954.
¾ II. Verkenning en verdieping. Purmerend 1950.
¾ III. Ontwikkelingspsychologie in Inleiding in the Psychologie door Ph. Kohnstamm, J. Linschoten, M.J. Langeveld et al. Groningen 1955.
¾ IV. De Verborgen Plaats in het leven van het kind, en: Persoon en Wereld. Utrecht 1953.
¾ V. Studien zur Anthropologie des Kindes. Tübingen 1956.
¾ VI. Beknopte theorische paedagogiek. Groningen 1955.
J.A. MCGEOCH. The Psychology of Human Learning. New York 1942.
G. MANNOURY. I. Handboek der Analytische Signifika I. Bussum 1947.
¾ II. Idem. II. Bussum 1948.
I. MEYERSON. Les Images, en: Nouveau Traité de Psychologie par G. Dumas. Paris 1932.
J. DE MIRANDA. I. Verkening van de "Terra Incognita" tussen practijk en theorie in Middelbaar (Scheikunde-) Onderwijs. Groningen 1955.
¾ II. Een poging tot ontwikkekling van het taaldenken in beginnend wiskunde-onderwijs. Mededelingenblad van de Wisk. Werkgr. van de W.V.O. enero 1956.
H. MOOY. Over de didactiek van de meetkunde benevens benaderingsconstructies ter verdeling van een hoek in gelijke delen. Amsterdam 1948.
H.C. MORRISON. The Practice of Teaching in the Secondary School. Chicago 1942.
J. MURSELL. I. The Psychology of Secondary-School Teaching. New York 1939.
¾ II. Developmental Teaching. New York 1949.
L. OBERER. Untersuchungen über die Entwicklung intellektueller Funktionen im Schulalter. Leipzig 1930.
C.F. VAN PARREREN. I. Intentie en autonomie in het leerproces. Amsterdam 1951.
¾ II. De stratiformiteit van het denken I. Ned Ts. v. d. Ps. VII.
¾ III. Idem II. Ned. Ts. v. d. Ps. VIII.
¾ IV. A Viewpoint in Theory and Experimentation on Human Learning and Thinking. Acta Psych. X, n° 4.
PETERMANN y HAGGE. Gewachsene Raumlehre. Freiburg 1935.
J. PIAGET y A. SZEMINSKA. I. La genèse du nombre chez l'enfant. Neuchâtel-Paris 1941.
J. PIAGET. II. Les structures mathématiques et les structures opératoires de l'intelligence, en: L'enseignement des mathématiques par J. Piaget, E.W. Beth et al. Neuchâtel-Paris 1955.
F.W. PRINS. Een experimenteel-didactische bijdrage tot de vorming van leerprestaties volgens denkpsychologische methode. Groningen 1951.
F.W. PRINS y L. VAN GELDER. De psychologie van het denken en leren. Ter perse.

L. ROESSNER. Einsichtiges und nichteinsichtiges lernen. Lehrer. Rundbrief X, 5 y 6.
G. SAND. Über die Erziehbarkeit von Intelligenzleistungen bei schwachbegabten Kindern. Archiv für die gesamte Ps. Tomo 76, Parte 3/4 1930.
O. SELZ. I. Über die Gesetze des geordneten Denkverlaufs I. Stuttgart 1913.
¾ II. Zur Psychologie des produktiven Denkens und des Irrtums. Bonn 1922.
¾ III. Die Aufbauprinzipien der phenomenalen Welt. Acta Psych. V, 4.
¾ IV. Von der Systematik der Raumphänomene zur Gestalttheorie. Arch für die ges. Psych. Tomo 77, Parte 3/4.
A. SPAIER. La Pensée Concrète. Paris 1927.
H.W.F. STELLWAG. I. Selectie en selectiemethoden. Groningen 1955.
¾ II. De waarde der klassieke vorming. Groningen 1949.
¾ III. Begane wegen en onbetreden paden. Groningen 1954.
K. STRUNZ. Pädagogische Psychologie des mathematischen Denkens. Heidelberg 1953.
A.H. SYSWERDA. De ruimtevoorstelling bij het kind volgens J. Piaget en B. Inhelder. Groningen 1955.
A. TARSKI. Inleiding tot de logica. Ned. bew. door E.W. Beth. Amsterdam 1953.
H. TURKSTRA. Het veelomstreden vraagstuk van het wiskunde-onderwijs op de middelbare school. Zutphen 1938.
E.A.A. VERMEER. Spel en spelpaedagogische problemen. Utrecht 1955.
M. WAGENSCHEIN. Weniger ist mehr. Hessische Beiträge zur Schulreform II. Enero 1950 - Parte 21.
A. WILLWOLL. I. Über das Verhältnis von Anschauung und Denken im Begriffserlebnis. Festschrift Bühler, Junio 1929.
¾ II. Begriffsbildung. Leipzig 1926.
P. WIJDENES. Over het onderwijs in rekenen in de eerste klas van de H.B.S. Eucl. XXVI, n° 1.
K. ZIETZ. Kind und physische Welt. München 1955.

El autor de este trabajo nació el 4 de mayo de 1909 en Amsterdam. En 1927 aprobó los exámenes finales h.b.s.-B. Desde 1927 hasta 1933 estudió en la Universidad de Amsterdam, donde en 1933 aprobó el doscotrado en Matemáticas y Ciencias Naturales. Sus profesores fueron Prof. Dr. L.E.J. brouwer, Prof. Dr. G. Mannoury, Prof. Dr. Hk. de Vries y Prof. Dr. R. Weitzenböck.

Desde 1939 hasta 1951 trabajó como profesor de Matemáticas y Ciencias Naturales en el Departamento Montessori del Liceo Kennemer, el cual se se convirtió en una escuela autosuficiente: La Facultad de P. Thijsse Montessori-Lyceum. Desde 1951 fue profesor en El Nuevo Liceo de Bilthoven.

Su función era la orientación individual en la escuela y era necesario introducirse profundamente en la didáctica de las Matemáticas. Buscaba conexiones con algunos didactas, debiendo ser mencionados en especial: El Grupo de Matemáticas de W.V.O., el Grupo de Ciencias Físicas y Naturales del W.V.O. (especialmente antes de 1945), el grupo que se reunía en la casa de la Sra. T. Ehrenfest-Afanassjewa y el grupo del Instituto Pedagógico de la Rijksuniversiteit en Utrecht.

Gracias a una asignación muy flexible de obligaciones, fue capaz de escribir su trabajo en 1955. Se siente muy agradecido al Prof. Dr. M.J. Langeveld, en el cual encontró las instrucciones necesarias para su progreso futuro.

El contactocon su promotor, Prof. Dr. H. Freudenthal, data de la Universidad Gemeentelijke de Amsterdamy fue en el Grupo de Matemáticas del W.V.O., del que el Prof. Freudenthal es director. Le está muy agradecido por todas las instrucciones que llevaron a un mejor resultado.

La publicación de su trabajo ha sido posible gracias a una comunicación en el periodo de edición con J.M. Meulenhoff, J. Muusses, P. Noordhoff N.V., N.V. Nijgh y Van Ditmar y N.V. Spruyt, Van Mantgem y De Does.

RESUMEN

EL PROBLEMA DE LA COMPRENSIÓN, EN CONEXIÓN CON LA COMPRENSIÓN DE LOS ESCOLARES EN LA ASIGNATURA DE GEOMETRÍA [25]

En este estudio hemos intentado examinar el significado y las funciones de la comprensión durante un proceso de aprendizaje. En vista de la extensión del tema, hemos tenido que limitar algo el objetivo de nuestro estudio. Por este motivo nos hemos limitado al estudio de la comprensión matemática en general y de la comprensión geométrica en particular.

Un profesor encuentra la primera evidencia de la comprensión de sus alumnos cuando, como resultado de un proceso de aprendizaje, éstos reaccionan de forma adecuada ante situaciones que no se habían incluido en ese proceso. Esta inferencia, sin embargo, sólo es admisible si el alumno ha ejecutado la acción con intención deliberada, es decir si podemos asumir sin riesgo que en ella no ha tomado parte el azar.

La anterior definición de comprensión se corresponde bien con la de la teoría de la Gestalt: "Actuar como resultado de la comprensión significa: actuar con la firmeza de un logro estructural". Esta definición conecta observación y pensamiento y, aunque inicialmente podemos interpretarla en un sentido puramente figurado, veremos más adelante, cuando hagamos un análisis más detallado del concepto de pensamiento, que oculta también un significado bastante más profundo.

Un análisis del pensamiento racional revelará tres momentos importantes en él:

1. La formación de estructuras;

2. la formación de valencias (como, por ejemplo, al aprender "de memoria");

3. análisis (ver la investigación de Selz).

Las formas de pensamiento mencionadas más arriba son fundamentalmente diferentes y requieren un ajuste completamente diferente de la personalidad. Análisis es una acción que requiere un ajuste "activo", como ocurre bajo la continua presión de un "intento" del individuo. Por el contrario, la formación de valencias pide un ajuste "receptivo" -es un proceso autónomo. Finalmente, la formación estructural pide la habilidad de hacer rápidos cambios mentales de un ajuste receptivo a uno activo y viceversa: receptivo en su aquiescencia a la absorción de las estructuras "espontáneas" que surgen del material; activo en su concentración en el análisis y la modificación de estas estructuras, una vez que se han formado.

Podemos clasificar los tipos estructurales de la siguiente manera:

1. Expansión estructural.

2. Refinamiento estructural.

3. Construcción de superestructuras.

4. Transición a estructuras isomorfas.

[25] El original está en inglés (N. del T.).

Cada forma estructural que aparece a continuación pide una comprensión "superior" que la de la precedente.

La creación de una estructura pide dos acciones de pensamiento básicamente distintas: La identificación de sus componentes y su clasificación.

Podemos distinguir dos tipos de identificación: identificación no diferenciada e identificación posterior al análisis del objeto. La primera lleva a una *estructura no diferenciada,* la segunda a una *estructura* basada en el *análisis.*

El análisis de un objeto nos permite abstraer y eliminar cierto número de sus momentos conceptuales. El *empobrecimiento conceptual* resultante llevará a nuevas formas de identificación y, por lo tanto, a nuevas estructuras.

Naturalmente, en realidad el estudio de la geometría tiene que ver principalmente con el examen de estructuras después de que se las ha abstraído del objeto. En consecuencia, las estructuras no diferenciadas no pueden llamarse realmente matemáticas y lo mismo se puede decir del tipo de comprensión que producen.

El estudio de los principios de clasificación de estructuras interrelacionadas llevará antes o después a la construcción de los propios principios de clasificación. Al principio estas estructuras serán no diferenciadas, pero es probable que pierdan su forma original cuando se las analice. El resultado será una nueva estructura "superior", que englobará los principios de clasificación de las originales.

Este es un proceso de pensamiento completamente nuevo: Lo llamamos "transición a un nivel superior de pensamiento". Esta transición sólo se puede efectuar si hemos acumulado suficientes símbolos que nos lleven a este nuevo nivel (es decir, después de que se haya condensado suficiente cantidad de conceptos en los símbolos que usaremos después para guiarnos en nuestro estudio).

En matemáticas, y en particular en geometría, es fácil seguir esta tendencia. La presentación de material (estudio) concreto evoca estructuras visuales no diferenciadas. Los niños se familiarizan con estas estructuras bastante pronto en su vida, mucho antes de que alcancen el nivel de la enseñanza secundaria.

Es importante definir los aspectos geométricos que surgen cuando estudiamos un fundamento concreto. Estos son:

a. Percepción y reconocimiento de figuras geométricas.

b. La división de plano y espacio.

c. El uso y la colocación de figuras congruentes.

d. Figuras semejantes.

e. Acumulación de figuras.

f. Transformación de figuras.

g. Simetría con respecto a un plano.

h. Simetría con respecto a una recta.

i. Simetría con respecto a un punto.

j. Superficie y contenido.

k. Movimientos espaciales: traslación, rotación, movimiento helicoidal.

l. Curvas.

m. El hecho de que los espejos no necesariamente producen imágenes congruentes.

n. La proyección plana de figuras espaciales.

o. La intersección de figuras.

Todos estos aspectos son significativos en la práctica geométrica. Por lo tanto es importante darles la consideración adecuada cuando organizamos nuestro programa.

Se podría interpretar la enseñanza de la geometría como la realización de un objetivo doble:

1. El estudio de la geometría da a los estudiantes un ángulo concreto de aproximación a, y de entendimiento de, las características del espacio y por tanto les muestra cómo conseguir un cierto dominio sobre el espacio.

2. Los estudiantes no encontrarán en ningún otro lugar mejores oportunidades para: a) crear un sistema científico coherente y lógico y b) desarrollar su capacidad para la adquisición de conocimiento, *no* mediante experiencia práctica sino mediante la aplicación del pensamiento puro.

Si, en su clase de geometría, el profesor enfatiza suficientemente los quince aspectos mencionados más arriba, sin duda logrará el primer objetivo.

Sin embargo, la consecución del segundo objetivo depende en gran medida de la cantidad de atención prestada a los diversos niveles de pensamiento geométrico.

Un alumno alcanza el *primer nivel de pensamiento geométrico* cuando puede manipular las características conocidas de una figura que le es familiar. Por ejemplo, si es capaz de asociar el nombre "triángulo isósceles" a un triángulo concreto, sabiendo que tiene dos lados iguales, y de obtener la conclusión subsiguiente de que los dos ángulos correspondientes son iguales.

Tan pronto como aprende a manipular las interrelaciones de las características de las figuras geométricas, el estudiante habrá alcanzado el *segundo nivel de pensamiento,* es decir si, con la herramienta de los teoremas generales de congruencia, puede deducir la igualdad de ángulos o de segmentos de figuras concretas.

Habrá alcanzado el *tercer nivel de pensamiento* cuando empiece a manipular las características intrínsecas de las relaciones. Por ejemplo, si puede distinguir entre una proposición y su recíproca.

En el supuesto de que el proceso de enseñanza dure lo suficiente, los símbolos usados en ese proceso perderán progresivamente su significado original hasta que finalmente su única función sea la de servir de conexiones en una red de relaciones. Generalmente esta red será coherente de una forma significativa, aunque las propias relaciones hayan sido determinadas principalmente por medio de valencias, formadas durante el proceso de aprendizaje.

Esta sucesión de eventos es precisamente lo que necesitamos en geometría, como la red de relaciones es, realmente, el objetivo al que nos dirigimos en nuestro programa. Sin embargo, como profesores, debemos recordar siempre que esta red de relaciones debería aparecer *durante* el proceso de aprendizaje y *a partir de* situaciones concretas. Sólo entonces podemos esperar el desarrollo de una estructura reversible, es decir una estructura en la que los niños puedan encontrar su camino de vuelta de relaciones abstractas a situaciones concretas. Esto es lo que necesitamos si nuestro objetivo es una aplicación productiva del conocimiento geométrico.

Desgraciadamente, la enseñanza de la geometría sigue con frecuencia otras vías: demasiado a menudo el profesor intenta infundir un conocimiento directo de la red de relaciones sin haber pasado por la etapa intermedia de las situaciones concretas. De momento, esta forma de tratar al sujeto puede tener bastante éxito y es cierto que el conocimiento factual sobre la red de relaciones se adquiere a menudo en menos tiempo.Sin embargo, tiene la desventaja de que se ignora durante mucho tiempo el importante tema de las subestructuras básicas; la conexión analítica con las estructuras concretas (visuales) estará ausente, pues el alumno habrá creado toda su red de relaciones mediante un proceso imitativo incitado por la exposición estructural del profesor. Como las estructuras resultantes tienen poca conexión mutua, no podemos esperar demasiada transferencia, ni en el campo de la propia geometría ni respecto a otras esferas de actividad.

De momento está claro que el profesor de geometría se enfrenta a una doble tarea:

a. debe ayudar a sus alumnos a transformar las estructuras, producidas en su campo visual de observación, en estructuras geométricas;

b. debe enseñar a los niños el uso de los algoritmos en varias partes de las matemáticas.

Entender los algoritmos depende de un tipo especial de comprensión, que llamaremos *comprensión algorítmica.*

Además de ésta, encontramos una *comprensión más general,* basada en formas estructurales que pueden desarrollarse en algoritmos.

Y finalmente están esos niveles de pensamiento que permiten la comprensión en *principios de pensamiento completamente nuevos.*

El profesor no encontrará fácil asegurar un desarrollo adecuado de estos dos últimos tipos de comprensión dentro de los límites de la enseñanza del aula. Por una parte, los exámenes y métodos de tests usuales no ayudan en este sentido: Estos tipos de comprensión no se pueden medir adecuadamente mediante tests escritos. Si los problemas del test cubren un campo limitado de conocimientos, bastarán unas herramientas algorítmicas para resolverlos. Es un trabajo bastante simple enseñar a un niño un número de estructuras manipulativas que le permitan reducir un problema de alto nivel a un nivel inferior de pensamiento.

Podríamos evitar esta dificultad incluyendo todo el rango de temas disponibles en nuestros tests escritos. Como los alumnos difícilmente habrán podido memorizar todos los algoritmos, serán incapaces de reducir los problemas a un nivel inferior. Pero incluso entonces es dudoso que puedan resolverlos, pues aunque algunos estudiantes posean sin ninguna duda el entendimiento de las estructuras necesario para desarrollar algoritmos, la cantidad media de tiempo disponible para un test escrito raramente cubrirá el proceso de pensamiento involucrado en el test.

El resultado es que tanto exámenes como tests escritos tienden a empujar a los alumnos hacia comprensión algorítmica en vez de guiarlos hacia las mucho más valiosas formas superiores de pensamiento.

Esto no quiere decir que sea imposible percibir y comprobar estas dos formas superiores de comprensión. Si la relación profesor-alumno se basa en la confianza, entonces las reacciones del alumno mostrarán al profesor cómo, y en qué grado, ha absorbido y digerido la asignatura. Una vez que sabemos qué nivel ha alcanzado el alumno, podemos aprender, mediante un cuidadoso análisis del proceso de aprendizaje, cómo propiciar un posterior aumento de la comprensión.

Es muy importante saber cómo experimenta el propio niño la comprensión. La adquisición de la comprensión en las muchas esferas de la materia que tienen que ver con el rango de los comportamientos y las aptitudes de un ser humano es una de las necesidades básicas de la vida. Más aún, nuestra propia necesidad interna nos impulsa a ello: la conciencia de la comprensión adquirida es una experiencia interna memorable y nos da un sentimiento de poder y de satisfacción. Si, de curso en curso, no vemos signos del desarrollo de la comprensión, podemos asumir con seguridad que el niño no tiene contacto con la asignatura. Puede haber muchas razones para tal aproximación negativa. Enumeraremos sólo tres: Puede ser que estemos presentando la asignatura en unidades separadas, demasiado pequeñas, que no tienen suficiente cohesión evidente entre ellas; puede ser que estemos operando en un nivel de pensamiento que está más allá del entendimiento del alumno y, en tercer y último lugar, puede que la propia asignatura no tenga ningún lugar en el mundo propio del niño. Sin embargo, si nos acordamos constantemente de basar nuestra presentación de la asignatura en el firme fundamento del material visual, entonces habrá poco peligro de que el niño pierda contacto con ella.

TESIS

I

La cuestión de cómo se forman las valencias y las estructuras y de cómo se puede influenciar esta formación es de gran importancia para la didáctica general.

II

Para poder determinar con exactitud las relaciones entre los conceptos constitutivos de la didáctica general es bueno tener en cuenta tres tipos de procesos de aprendizaje:

1°. procesos dirigidos en los que se aprende lo que se pretendía;

2°. procesos dirigidos en los que (también) se aprende lo que no se pretendía;

3°. procesos no dirigidos (incidentales).

III

El desarrollo "estereotipo" del hombre se suele considerar demasiadas veces como un fenómeno biológico y demasiadas pocas veces como un fenómeno social.

IV

El pensamiento productivo no se origina primordialmente en el planteamiento de algún problema. La forma más frecuente del pensamiento productivo procede de la exploración.

V

Una reflexión sobre el sentido y la función del concepto de "experimento didáctico" es muy importante para la renovación de la enseñanza.

VI

En la mayoría de las ciencias es bueno dar las definiciones y los teoremas en más de una formulación para crear las máximas oportunidades de que el correlato psíquico del oyente coincida con el del redactor.

VII

Los tests para medir los progresos en geometría sólo serán válidos para comparar los resultados de la enseñanza si existe un acuerdo sobre el significado de concepto de "progreso". Los resultados de la enseñanza dependen, entre otras cosas, de las cualidades pedagógicas del profesor, de la inteligencia de los alumnos, del entorno de procedencia de los alumnos, de la metodología seguida hasta el momento y de la didáctica que está en la base de dicha metodología.

VIII

Para aprender exactamente a pensar (el objetivo general reconocido de la enseñanza de la geometría en el V.H.M.O. [ver nota 2]) es deseable que al principio de la enseñanza de la geometría se enseñe a los alumnos a percibir el espacio en el sentido geométrico.

IX

La conexión armoniosa entre la asignatura de "cálculo" de la Enseñanza Elemental y la asignatura de "álgebra" del V.H.M.O. sólo se podrá conseguir si

1°. se obtiene la suficiente claridad sobre la estructura didáctica de ambas asignaturas, 2°. los docentes de ambos centros la conocen suficientemente,

3°. se conoce suficientemente la relación entre ambas asignaturas en el sentido didáctico.

X

Además de las matemáticas, hay una serie de asignaturas en el V.H.M.O. que se basan en la asignatura de cálculo de la Enseñanza Elemental. Esta base es directa sin intervención de las matemáticas.

XI

El establecimiento preceptivo de un diploma final de un centro de V.H.M.O. para un objetivo que no necesita tanto suele conducir a una devaluación del valor de la enseñanza.

XII

Es bueno que temas que se encuentran en el terreno fronterizo de dos asignaturas (como la electrólisis en el terreno fronterizo de la física y la química) sean impartidos en sus totalidad como mínimo por alguno de los profesores correspondientes.

XIII

Distintos componentes del álgebra -como gráficas, dependencia de magnitudes, el cálculo de números aproximados- podrían y habrían de desarrollarse en su totalidad o parcialmente a partir de las ciencias. En tal caso el profesor ha de darse cuenta de que está contribuyendo de manera especial al desarrollo del álgebra.

XIV

No tiene sentido tratar implícita ni explícitamente la teoría de las dimensiones en la enseñanza de las matemáticas si en las clases de ciencias no se reserva tiempo para profundizar en sus aspectos esenciales.

XV

Los aparatos diseñados especialmente para la física no han de mostrarse antes de que se haya obtenido la suficiente orientación en el tema en cuestión.

XVI

La enseñanza de la astronomía en la Enseñanza Media suele empezar con una imagen del mundo geocéntrica, a partir de la cual se va desarrollando de manera deductiva la imagen del mundo heliocéntrica (el método histórico). Sin embargo la mayoría de los alumnos están (verbalmente) más familiarizados con la imagen heliocéntrica que (por percepción propia) con la geocéntrica. Es bueno que la didáctica lo tenga en cuenta.

XVII

Es bueno distinguir en la enseñanza de la física en V.H.M.O. cuándo tenemos *a.* el resultado de un experimento, *b.* una hipótesis por generalización, *c.* una deducción lógica.

P.M. VAN HIELE, 4 DE JULIO DE 1957