Los cubrimientos de M.C. Escher como material didáctico en la enseñanza de las isometrías

Angel Gutiérrez
Dpto. de Didáctica de la Matemática. Universidad de Valencia.

Introducción.

De entre las múltiples facetas interesantes de la obra gráfica de M.C. Escher, quiero destacar la componente didáctica. En este texto me voy a, centrándome en las posibilidades que brindan los cubrimientos del plano de Escher para su utilización en la enseñanza de la Geometría. Mi objetivo es realizar algunas propuestas para mostrar cómo se pueden organizar actividades basadas en el uso de los cubrimientos de Escher para estudiar algunos temas de Geometría Plana. Haré propuestas con diferentes niveles de complejidad, que serán aptas para estudiantes de distintos cursos y para diversos grados de profundidad en el estudio del tema. Por otra parte, habrá algunas actividades cuyo material serán los cubrimientos del plano dibujados por Escher, mientras que otras utilizarán otros materiales que, aunque no sean propiamente de Escher, están directamente relacionados con sus trabajos e inspirados en ellos.

La utilización de la obra gráfica de Escher en Matemáticas se puede mirar desde dos perspectivas: Una, que podemos llamar gráfica o manipulativa, se resume en la construcción de sus cubrimientos o de otros análogos. La otra es la perspectiva formal, en la cual se hace un énfasis mayor en la estructura algebraica subyacente en esos cubrimientos. Las propuestas que presentaré pueden servir en uno u otro sentido, dependiendo de dónde se quiera hacer énfasis en las clases: Se puede hacer un trabajo práctico, mecánico, que es muy importante en las primeras etapas del aprendizaje de las isometrías, porque este aprendizaje hay que iniciarlo jugando con materiales, moviéndolos, mirando con espejos, dándole la vuelta a las figuras, etc. Después, en una etapa posterior, se puede volver sobre ese mismo tipo de actividades pero desde una perspectiva más formal, haciendo un análisis matemático de cómo están construidos los cubrimientos, qué elementos hay que utilizar, qué movimientos intervienen, etc.

Organización didáctica de la enseñanza.

En primer lugar, conviene hacer unas reflexiones de tipo didáctico sobre las distintas fases de utilización de los mosaicos de Escher para estudiar las isometrías del plano. Si un profesor va a organizar actividades para sus alumnos basadas en estos mosaicos, debe plantearse las cosas con cuidado y pararse a pensar un momento en las particularidades de cada mosaico, pues no todos ofrecen el mismo grado de facilidad. Generalmente, el trabajo sobre los mosaicos empieza presentando a los estudiantes algunos cubrimientos regulares de Escher y haciendo una descripción gráfica de su estructura (figuras empleadas, posiciones, colores, etc.). Una vez superada la fase inicial de toma de contacto con los mosaicos, que suele ser rápida pero no por ello menos importante, se puede pasar a un trabajo más sistemático, observando los cubrimientos desde el punto de vista matemático y preguntándose qué motivo mínimo tienen, qué isometrías, cuáles habría que usar para reconstruirlos, etc.; el proceso de estudio debe ir primero a encontrar el motivo mínimo del mosaico, después sus isometrías y en tercer lugar cuáles son los sistemas generadores del mosaico. El recorrido por la obra de Escher termina proponiendo a los estudiantes que construyan sus propios mosaicos, diseñando el motivo mínimo, definiendo las isometrías y realizando el cubrimiento de una hoja de papel.

No en todos los mosaicos es igual de evidente cuál es el motivo mínimo (por motivo mínimo no me refiero a la celda poligonal del mosaico matemático, sino a la figura mínima de la obra de arte). Hay algunos casos en los que el motivo mínimo es una única figura entera; en la lámina 1 es muy fácil para un niño de cualquier edad, darse cuenta de que hay un pájaro que se repite muchas veces. En otros casos, el motivo mínimo son dos figuras (lámina 2) o más. Conviene evitar algunos mosaicos en los que las dificultades no vienen de las isometrías sino del reconocimiento del motivo mínimo que hay que manejar; el más típico de éstos casos es el cubrimiento de las estrellas de mar, las caracolas y las conchas. Por otra parte, para alcanzar los objetivos de tipo matemático de estas actividades, es conveniente presentar pronto la idea de que el motivo mínimo no tiene por qué ser una figura completa, sino que

Lámina 1.

Lámina 2.

puede ser media figura (lámina 3) o varias medias figuras (lámina 4).

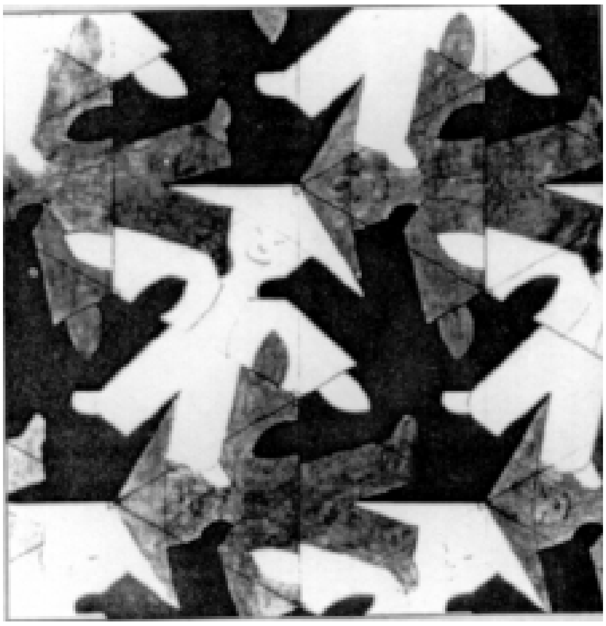


Lámina 3.

Lámina 4.

Al pedir a los estudiantes que busquen las isometrías de un mosaico, nos encontraremos con la dificultad implícita que tiene cada isometría, que se traslada a este contexto. Hay diversos estudios sobre las dificultades de aprendizaje de las tres isometrías básicas (Grenier 1988; Gutiérrez y Jaime, 1987; Hart, 1981; Küchemann, 1980). La conclusión global es que las traslaciones son las más fáciles de reconocer y las simetrías en deslizamiento las más difíciles; en cuanto a las simetrías y los giros, su grado de dificultad es mayor o menor dependiendo de factores como el ángulo de giro y la posición del centro o del eje.

Otras dificultades de los alumnos tienen su origen en la forma como el profesor les ha presentado los conceptos de las isometrías. Si a un estudiante le enseñamos que “la traslación de vector $\vec{a}$ es una aplicación del plano en sí mismo que a cada punto p le hace corresponder el punto p' tal que $\overrightarrow{pp'} = \vec{a}$ ” o que “el giro de centro C y ángulo α es una aplicación …” y luego le proponemos que analice un cubrimiento de Escher, lo más probable es que no sepa ver traslaciones ni giros. La introducción de las isometrías debe hacerse desde un punto de vista práctico; por ejemplo, se puede presentar la traslación como un movimiento en línea recta que deja las figuras con la misma orientación en la que están antes de moverse. Así, después de haber hecho algunas traslaciones, cualquier estudiante podrá reconocerlas en la lámina 5 porque verá infinidad de figuras que están en la misma posición, aunque no sepa definir formalmente las traslaciones, y también reconocerá las traslaciones de la lámina 1, aunque no todas las figuras están en la misma posición.

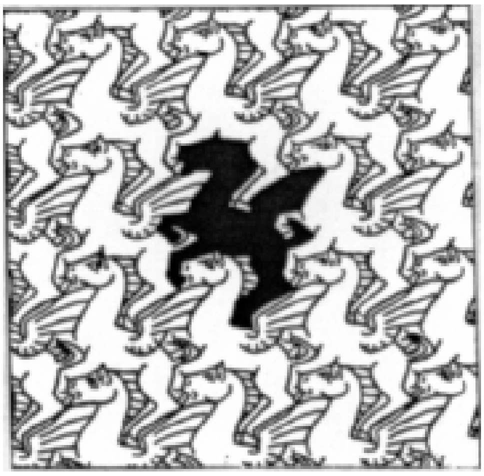


Lámina 5.

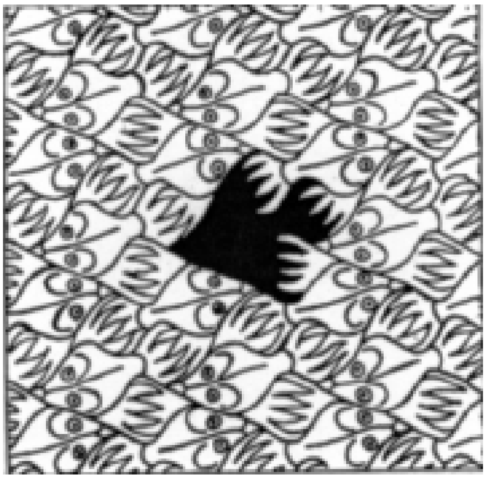


Lámina 6.

La idea de giro es, en cierta forma, contraria a la de traslación: Un giro implica cambio de orientación. El giro de 180° tiene una caracterización fácil, de la que hasta los niños pequeños se dan cuenta, pues les “da la vuelta” a las figuras. En la lámina 6 tenemos los peces blancos que miran a la izquierda y los peces negros miran a la derecha a causa del giro de 180° que hay en el mosaico. Las láminas 1 y 6 son muy parecidas: Una serie de peces mirando a la izquierda y una serie de peces mirando a la derecha, una serie de pájaros mirando hacia la izquierda y una serie de pájaros mirando hacia la derecha. La estructura visual de los dos mosaicos es la misma, una línea hacia un lado otra línea hacia el otro; sin embargo, su estructura matemática es muy diferente, pues en el mosaico de la lámina 6 hay giros de 180°, pero en el de la lámina 1 hay simetrías en deslizamiento. Estas son pequeñas bromas que nos gasta Escher.

En los mosaicos aparecen también los giros de 60°, 90° y 120°, que dan una idea de movimiento mayor que los giros de 180°: Las cuatro lagartijas de la lámina 7 parecen estar dando vueltas alrededor del punto en que se juntan sus patas, como si estuvieran en una noria. Esta visión intuitiva es importante para dar paso al concepto matemático, pues el dar vueltas lleva implícita las ideas de circunferencia, de centro de giro y de equidistancia.

Las simetrías se reconocen en los mosaicos por la presencia de figuras divididas en dos mitades iguales (lámina 8). Así pues, siempre van a ser los elementos ópticos los que se utilicen para reconocer las isometrías y para construir sus primeras concepciones, a partir de las cuales se podrán derivar más adelante las definiciones y propiedades matemáticas. Por lo tanto, es importante hacer énfasis en esos elementos ópticos típicos de cada isometría, pues una introducción gráfica intuitiva a las isometrías podrá llevar después, con muy poco trabajo, a la idea matemática; sin embargo, la introducción de las isometrías a partir de sus definiciones matemáticas no tiene por qué llevar a la idea gráfica.

Lámina 7.

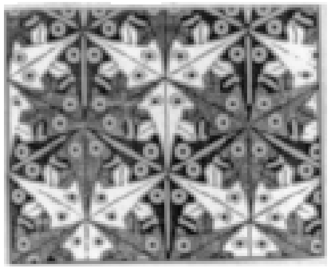


Lámina 8.

Los mosaicos cuya estructura es más difícil de reconocer son, sin lugar a duda, aquéllos con simetrías en deslizamiento (lámina 9). Desde un punto de vista didáctico, es razonable trabajar con ellas sólo cuando los estudiantes tienen un buen dominio de las otras isometrías y se quiere completar el estudio con el aspecto algebraico. Si estamos trabajando en una primera fase, por ejemplo en el Ciclo Superior de EGB, en la cual se están introduciendo las isometrías elementales, conviene ignorar las simetrías en deslizamiento.

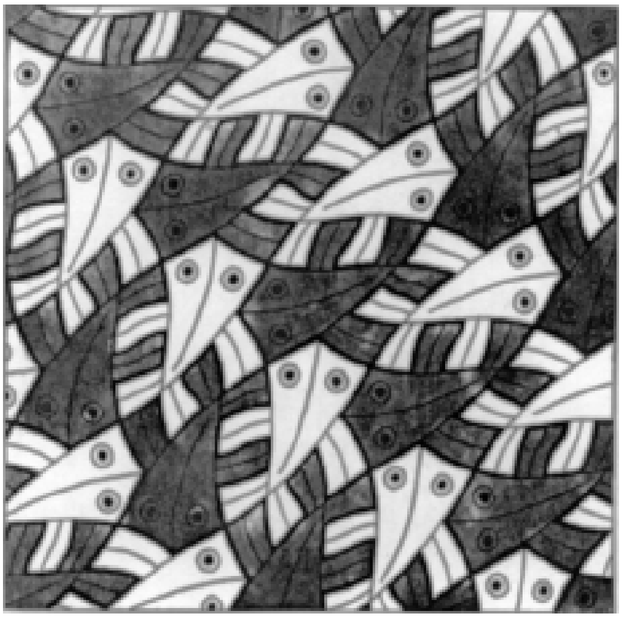


Lámina 9.

Profundización en el estudio de los mosaicos.

Los párrafos anteriores han sido un recorrido didáctico por la fase de reconocimiento de las isometrías: A la vista de un determinado mosaico, se buscan sus movimientos. Una posible continuación del proceso es estudiando los sistemas generadores. Los mosaicos de traslaciones son los más adecuados para iniciar este trabajo y para introducir el concepto de sistema generador. Para saber qué traslaciones hay en la lámina 10, podemos dibujar las que van desde un caballo hasta los otros. Al haber un solo tipo de movimiento (la traslación, que es el más fácil), quitamos dificultades añadidas (visuales y matemáticas) y podemos centrarnos en el problema de encontrar los generadores. Si le pedimos a nuestros alumnos que dibujen todas las traslaciones que vean en este mosaico, lo pueden llenar de flechas, pero ellos mismos pondrán de relieve que algunas se derivan de otras (son el doble, el triple, etc.). Así, surgen de forma natural las preguntas clave: ¿Cuántas traslaciones hacen falta para construir el mosaico? ¿Cuáles son? A partir de aquí el planteamiento del problema se convierte ya en un trabajo matemático: Hay traslaciones que son el resultado de productos de otras, por lo que se pueden ir descartando. Haciendo pruebas, pueden darse cuenta de que siempre basta con dos traslaciones y de que no sirven dos cualesquiera, pues si seleccionan las traslaciones A y B no se cubre todo el mosaico, pero con las traslaciones A y C sí se cubre.

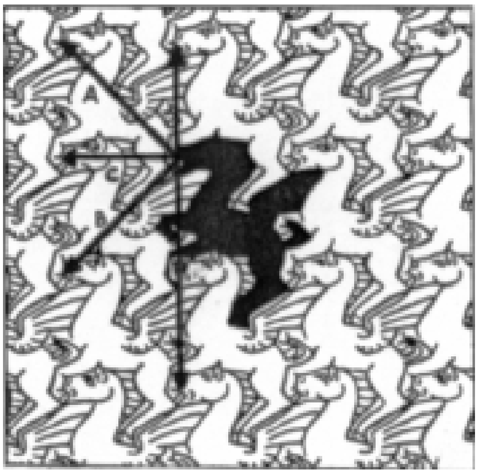


Lámina 10.

Lámina 11.

Otros mosaicos que también son útiles para introducir el concepto de sistema generador son los formados por giros de 180°, como el de la lámina 11. Si nos fijamos en una lagartija, vemos que tiene seis giros de 180°, de los cuales hay que elegir dos. No todos sirven, sino que hay que elegirlos con cuidado (en realidad el problema surge porque cuando seleccionamos una lagartija completa estamos manejando dos celdas de la malla).

La técnica de creación de baldosas.

Otro posible camino para seguir trabajando después de la fase de reconocimiento de las isometrías es el de la construcción por los estudiantes de sus propios mosaicos del tipo de Escher: Diseñar el motivo mínimo, seleccionar los movimientos del mosaico y construirlo. La forma de plantear estas actividades será diferente, en cuanto a vocabulario y a rigor matemático, según que los estudiantes hayan aprendido a manejar los sistemas generadores o no.

Los estudiantes se dan cuenta de que es menos bonito un cubrimiento en el que las celdas sean simples polígonos que otro en el cual las celdas se han deformado y pronto muestran su interés por saber cómo hay que hacerlas. Desde el punto de vista didáctico, no es provechoso ofrecerles directamente la respuesta, sino que es preferible plantearles preguntas que les marquen el camino de la solución y consigan que los propios alumnos la descubran: Si queremos hacer una traslación (figura 1-a), ¿dónde tiene que encajar el lado deformado? Con un par de hojas transparentes en las que está dibujada la celda, puestas una encima de la otra, es fácil hacer la traslación y descubrir el resultado (figura 1-b). El descubrimiento de la deformación de los giros de 60°, 90° ó 120° es igual de sencillo (figura 2). En cuanto a la simetría, la posición fija de los puntos del eje de simetría hace que no se pueda deformar ese lado de las celdas.

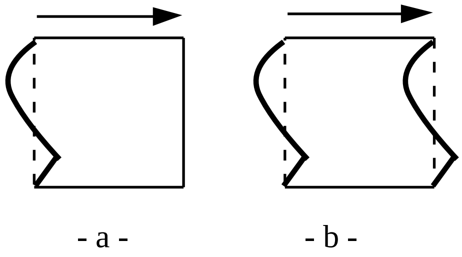


Figura 1. Deformación por traslación.

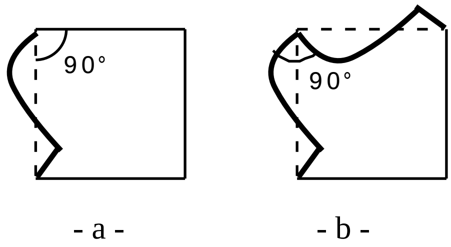


Figura 2. Deformación por giro de 90°.

Si se utiliza un giro de 180°, hay dos casos: Cuando el centro de giro está en un vértice de la celda, el movimiento no deja ningún lado de la celda sobre otro de sus lados, por lo que este giro no impone ninguna restricción en la deformación. Por el contrario, cuando el centro de giro está en el punto medio de una lado (figura 3-a), al girar 180°, la mitad de ese lado va a parar sobre la otra mitad (figura 3-b).

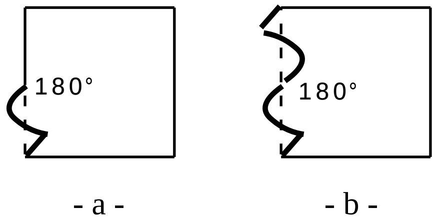
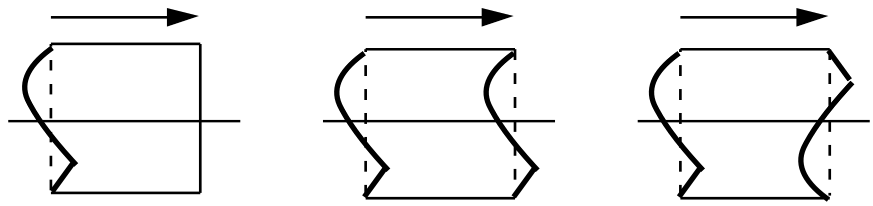


Figura 3. Deformación por giro de 180°.

Por último, veamos el movimiento más complicado: la simetría en deslizamiento. La forma de trabajo que lleva a descubrir la solución sigue siendo la misma, solo que ahora hay que realizar dos movimientos consecutivos, traslación seguida de simetría o simetría seguida de traslación, antes de llegar a la posición final. En la figura 4 hemos optado por la primera posibilidad: La figura 4-b muestra el resultado de trasladar la arista deformada y en la figura 4-c se tiene el resultado final después de hacer la simetría de la arista de la derecha (si se hace esta manipulación con dos hojas de papel transparente, siempre hay que mover la misma hoja, primero para trasladarla y después para hacer la simetría).



- a - - b - - c -

Figura 4. Deformación por simetría en deslizamiento.

Hasta aquí, la técnica; ahora ya sólo queda ponerla en práctica y empezar a utilizar la imaginación para obtener unos resultados más o menos bonitos. Mi experiencia como profesor me ha enseñado que, aunque este trabajo se puede hacer sin recurrir a los cubrimientos de Escher como introducción al tema, los estudiantes se motivan mucho más cuando se utilizan y, además, los mosaicos que producen ellos son de mucha más calidad artística cuando han visto antes los de Escher.

Actividades sobre cubrimientos para la enseñanza de las isometrías.

En la segunda parte de este texto voy a presentar otras actividades que se pueden hacer en torno a las isometrías del plano y a la construcción de cubrimientos regulares y algunos materiales didácticos que se pueden utilizar para dichas actividades.

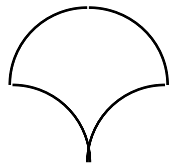
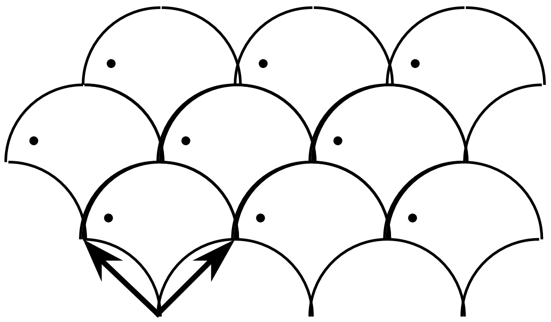
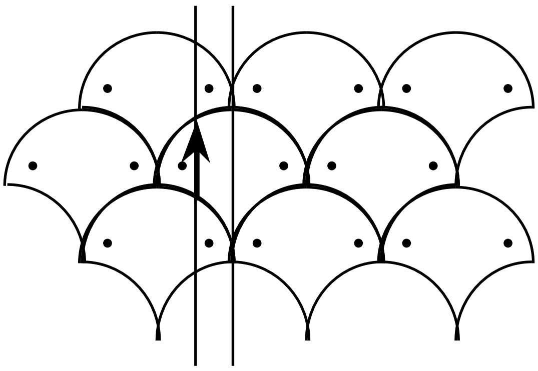


Figura 5

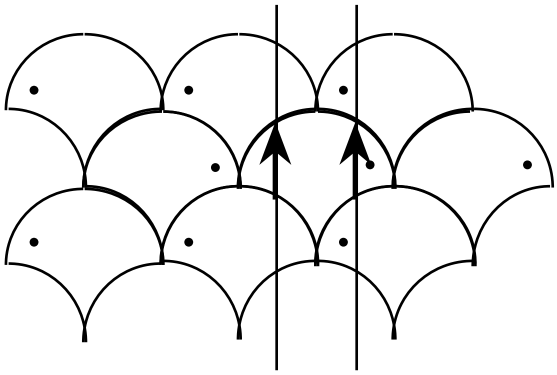
La figura 5 muestra la silueta de una pieza de plástico que se usa para hacer cubrimientos; es un tipo de material fácil de encontrar en las tiendas especializadas y que, en este caso concreto, está formado por un conjunto de baldosas iguales unas negras y otras amarillas. Es muy fácil construir un mosaico con estas piezas, pero puede plantearse otra pregunta más interesante: Aquí tenemos estas baldosas; ¿cuáles de los 17 tipos de mosaicos se pueden construir con ellas? El problema tiene distintos grados de dificultad según que se tenga en cuenta el cambio de colores o no y tiene diferentes soluciones según que se usen las piezas como están (lisas) o con algún motivo decorativo dentro que rompa la simetría. En la lámina 12 hay algunos ejemplos: Colocando en la misma posición piezas con un motivo no simétrico tenemos (lámina 12-a) un mosaico del tipo p1, que es el más sencillo sin simetrías. El tipo cm se obtiene con la misma disposición de las piezas pero sin romper su simetría (lámina 12-b), por lo que el motivo mínimo será media pieza. La tercera disposición (lámina 12-c) corresponde al tipo pg, generado por las dos simetrías en deslizamiento marcadas.



- a -



- b -

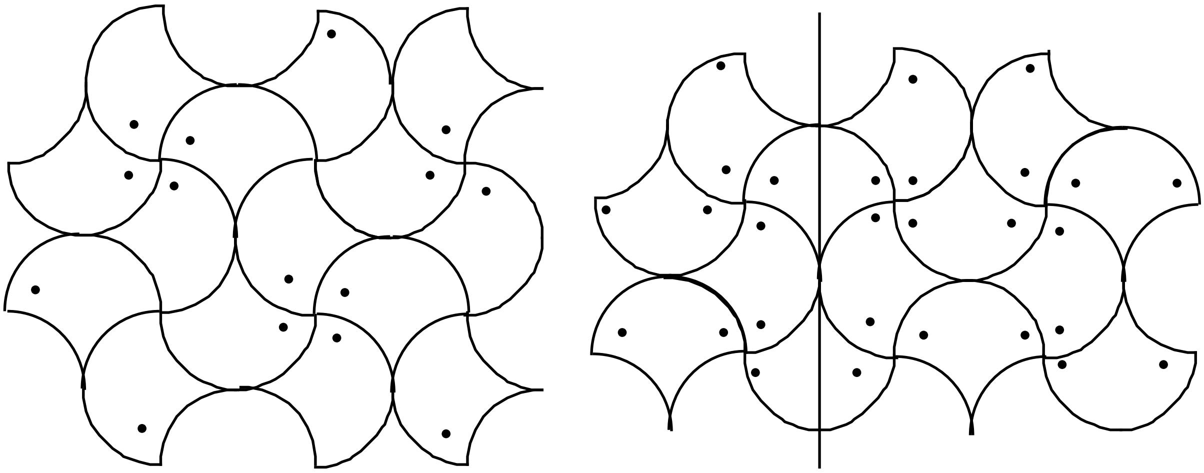


- c -

Lámina 12.

Otra posibilidad es colocar las figuras del cubrimiento en varias posiciones diferentes, en este caso girándolas 90°. La lámina 13 muestra un mosaico del tipo p4 (lámina 13-a) obtenido al romper la simetría de las figuras y otro del tipo p4g, usando el motivo simétrico (lámina 13-b).

Esta clase de material se hace con piezas de diversas formas, cada una de las cuales tiene sus peculiaridades y, por lo tanto, da lugar a diferentes soluciones. En la figura 6 se ven varias siluetas de baldosas. Una de ellas es muy parecida a la que he estado utilizando antes, pero un poco más alargada; esto hace que estas baldosas no admitan giros de 90° y sólo encajen en una posición, es decir que no son equivalentes a las anteriores. Otra de las piezas de la figura 6 admite giros de 120°, por lo que es completamente diferente de las demás. También hay una pieza con dos ejes de simetría, que admite varias posibilidades según que le pongamos un motivo interior que mantenga los dos, sólo uno o ninguno de los ejes. Las dos baldosas restantes de la figura 6 tienen una estructura sencilla, aunque los diseñadores muestran una constante preferencia por las figuras simétricas, pues es casi imposible encontrar, en esta clase de materiales, piezas no simétricas.



- a - - b -

Lámina 13.

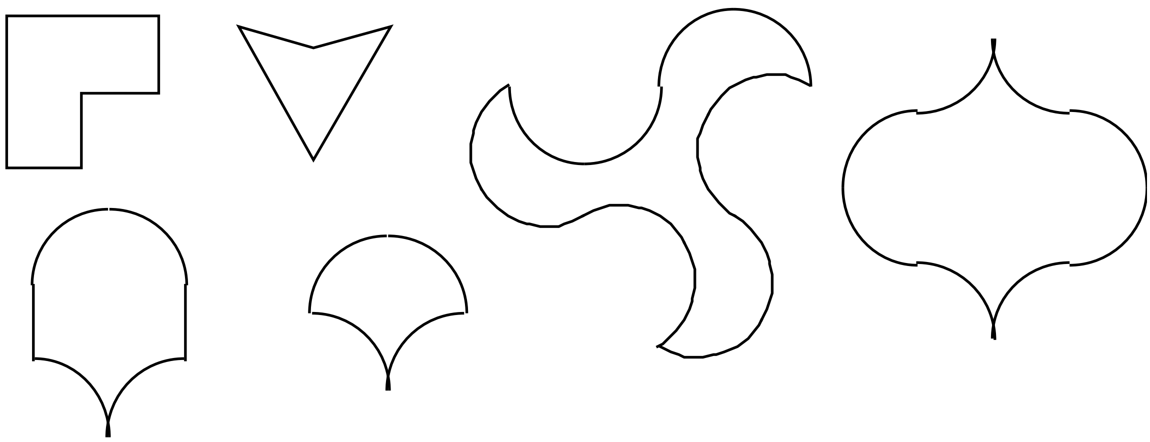
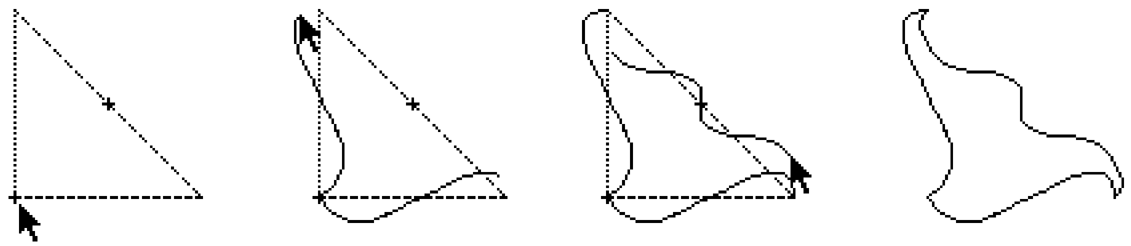


Figura 6.

Software educativo para creación y estudio de cubrimientos.

Y por último voy a presentar algunas actividades con ordenador, cosa que actualmente es casi obligada cuando se habla de enseñanza de las matemáticas. Hay cierto número de programas que sirven para construir cubrimientos planos; parte de ellos son programas de uso general, como los de tipo Paint y otros son programa de diseño (CAD). En realidad, cualquier programa gráfico que permita hacer simetrías y giros de cualquier número de grados es útil. Por otra parte, hay software específico para hacer geometría; voy a describir dos ejemplos de dos tipos diferentes de programas creados de forma específica para construir cubrimientos planos.

Uno de ellos es un programa mío para construir mosaicos, escrito en lenguaje Logo en el Macintosh SE, cuya forma de trabajo es la siguiente: En primer lugar, el ordenador pide elegir un tipo de mosaico. Después presenta en la pantalla las celdas poligonales posibles y pide elegir una. Una vez seleccionada una celda, el ordenador marca los movimientos del sistema generador y permite modificar libremente, con el ratón, ciertas aristas de la celda mientras, de forma simultánea, va produciendo la modificación correspondiente en la arista asociada. Finalmente, el ordenador construye el mosaico completo en la pantalla. La figura 7 muestra las fases de este proceso: Se elige el mosaico p4 (giros de 90° y 180°) con una celda triangular (a), se modifican un cateto (b) y la mitad de la hipotenusa (c); una vez que se ha terminado de dibujar la celda (d), aparece en la pantalla el mosaico completo (figura 8). Una habilidad que, de momento, no tiene este programa es la posibilidad de dibujar dentro de la celda.



- a - - b - - c - - d -

Figura 7. Proceso de diseño de un mosaico del tipo p4.

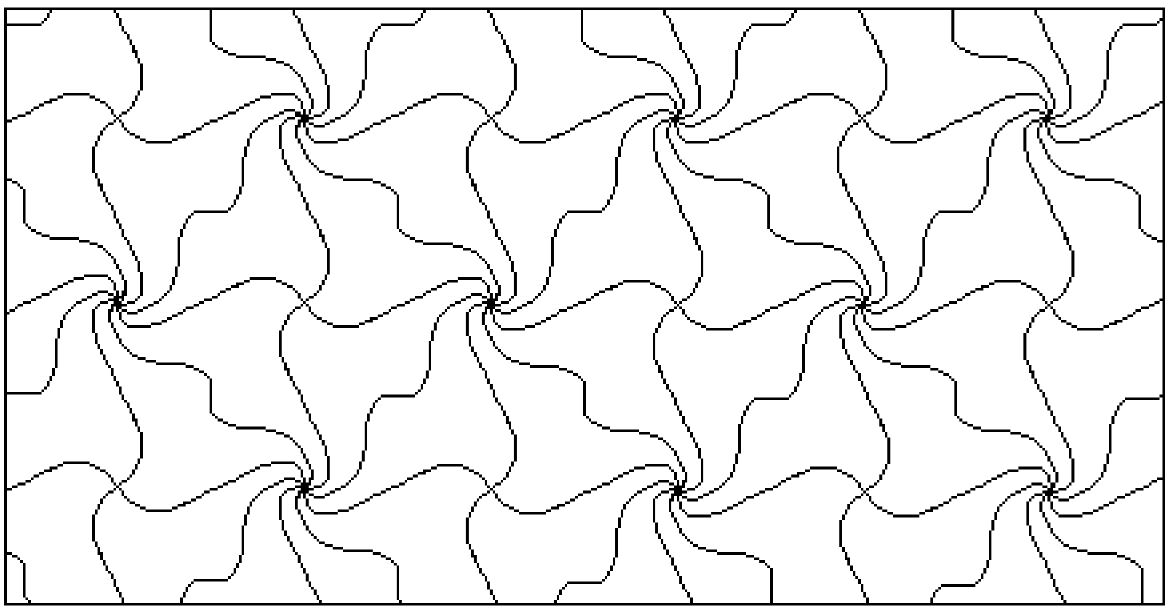


Figura 8. El mosaico completo.

El segundo ejemplo que presento es el programa EucSymm (Lubin, 1987), en el cual se hace énfasis es el aspecto algebraico de los cubrimientos. Tiene tres menús, para los rosetones, los frisos y los mosaicos. En los dos primeros se ofrecen los diferentes sistemas generadores de los 2 rosetones y los 7 frisos, para elegir uno de ellos (figura 9; “sift” es la traslación, “rotate” es el giro de 180°, “flip” y “reverse” son las simetrías de ejes horizontal y vertical respectivamente y “sifthflip” es la simetría en deslizamiento). En el tercer menú, para los mosaicos, aparecen las diferentes isometrías y celdas, de manera que tenemos que elegir qué isometrías y qué celda queremos combinar (figura 10); el ordenador no nos deja desamparados, pues cuando se elige un movimiento, desactiva aquellas posibilidades que son incompatibles con nuestra selección, de forma que no permite elegir sistemas generadores imposibles.

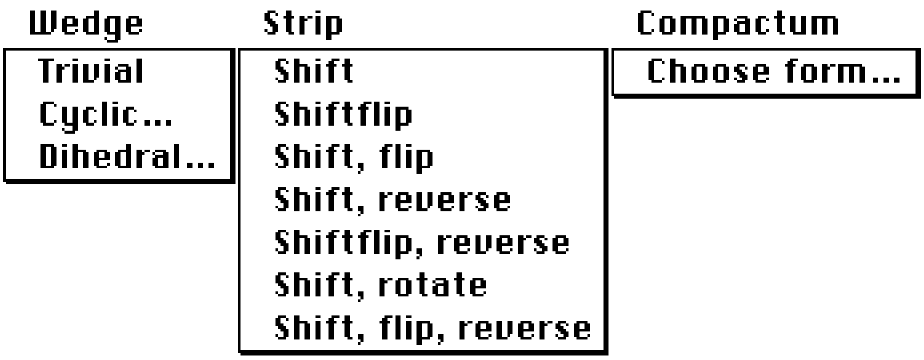


Figura 9. Menús del programa EucSymm.

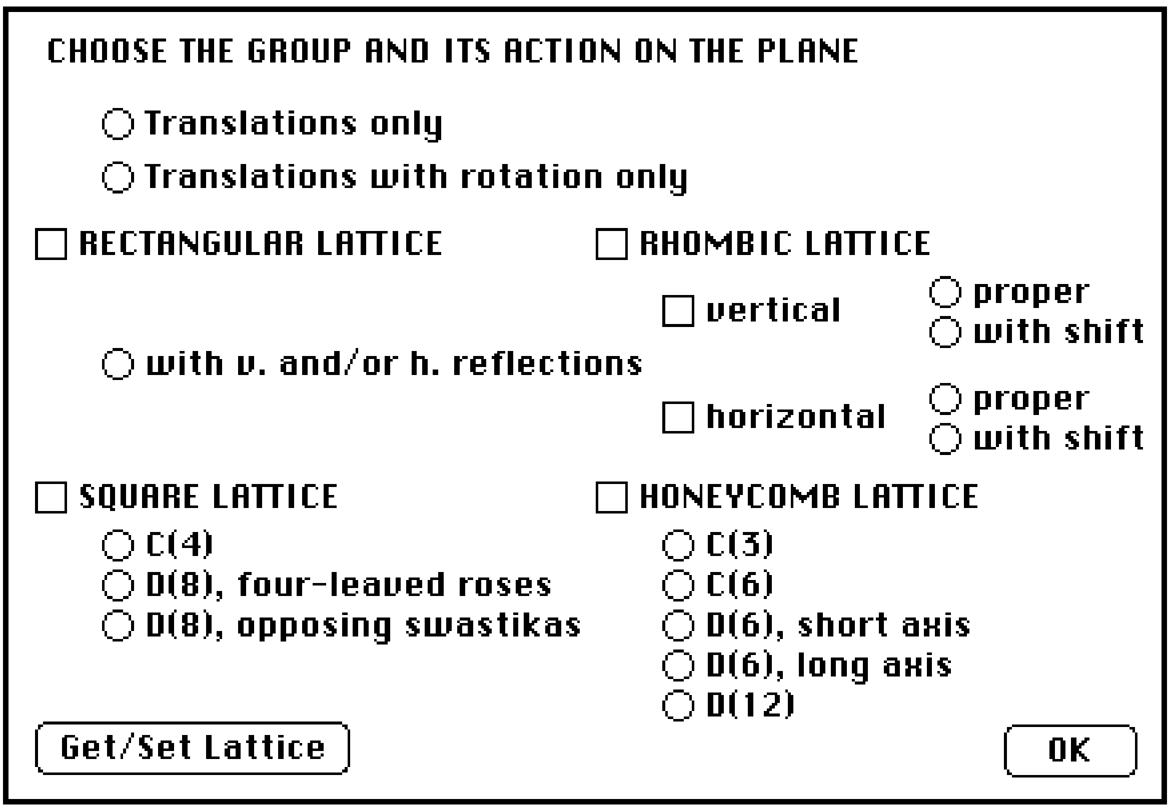


Figura 10. Menú del programa EucSymm para los mosaicos.

Cuando se ha elegido un tipo de cubrimiento, aparece la pantalla en blanco y con el ratón se puede dibujar; la pantalla no muestra sólo la línea que se está dibujando, sino tantas como celdas haya; por ejemplo, en el grupo diédrico de orden 5, se dibujan de forma simultánea las diez celdas (lámina 14).

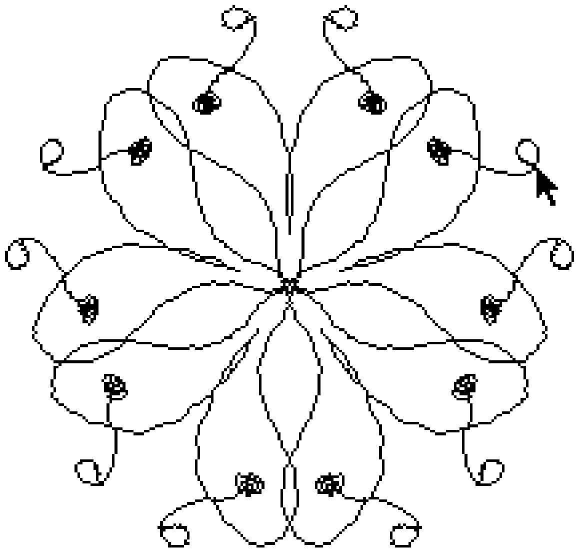


Lámina 14. Un rosetón del grupo diédrico de orden 5.

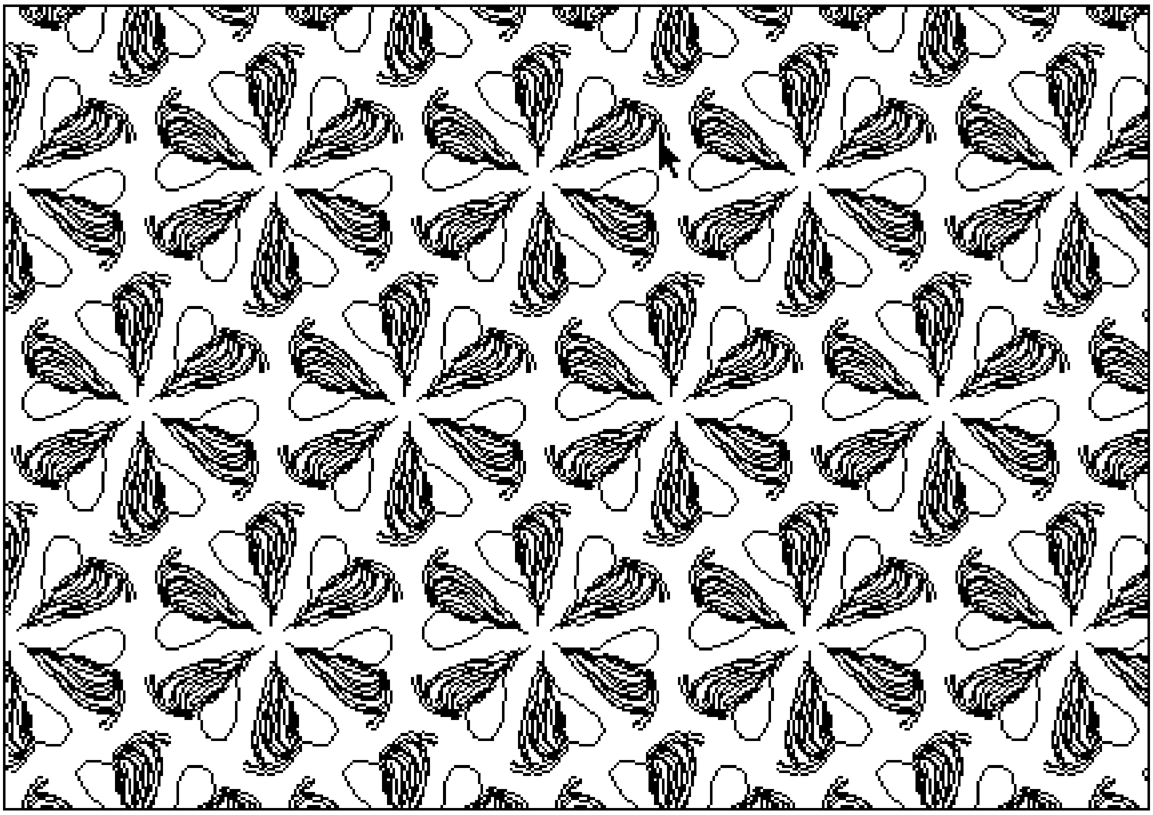


Lámina 15. Un mosaico del grupo p6.

Con los frisos y mosaicos ocurre lo mismo, pues el ordenador, después de haber elegido un modelo concreto, construye todas las celdas que quepan en la pantalla simultáneamente (lámina 15).

El ordenador que he utilizado con estos programas tiene pantalla en blanco y negro, pero hay otros con pantalla en color en cuyos programas se pueden manejar también los colores, por lo que no solamente se pueden construir los diecisiete mosaicos planos monocolores, sino también los mosaicos multicolores.

Referencias

Grenier, D. (1988): *Construction et étude du fonctionnement d'un processus d'enseignement sur la symétrie orthogonale en 6^{e}*. (Univ. J. Fourier Grenoble I: Grenoble, Francia).

Gutiérrez, A.; Jaime, A. (1987): Estudio sobre la adquisición del concepto de simetría, en *Actas del II Congreso Internacional sobre Investigación en la Didáctica de las Ciencias y de las Matemáticas*, pp. 365-366.

Hart, K. (1981): *Children's understanding of mathematics: 11-16.* (John Murray: Londres).

Küchemann, D. (1980): Children's difficulties with single reflections and rotations, *Mathematics in School* vol. 9.2, pp. 12-13.

Lubin, J. (1987): *EucSymm* (software).