

TENDENCIAS ACTUALES DE INVESTIGACIÓN EN GEOMETRÍA Y VISUALIZACIÓN

Angel Gutiérrez

Dpto. de Didáctica de la Matemática. Universidad de Valencia.

1. Introducción.

Mi propósito en este texto es reflexionar sobre la investigación actual en didáctica de la geometría, resumiendo algunas de las líneas que están recibiendo atención internacional. La mejor manera (tal vez la única) de saber cuáles son las líneas de investigación más trabajadas es revisar los artículos y libros con resultados de investigaciones en didáctica de la geometría publicados en los últimos años. Hay numerosas fuentes de información entre bases de datos y revistas especializadas. De las primeras, ERIC, UMI y ZDM son las más destacables. En cuanto a las segundas, no puedo incluir aquí la larga lista formada tanto por revistas centradas en áreas específicas (informática, probabilidad y estadística, etc.) como por revistas de ámbito general, por lo que sólo mencionaré las más importantes en el ámbito internacional y en el del mundo hispano: Educación Matemática, Educational Studies in Mathematics, Enseñanza de las Ciencias, Journal for Research in Mathematics Education, Recherches en Didactique des Mathématiques.

Dadas las limitaciones de espacio de este texto, no voy a hacer un recorrido detallado por tantas fuentes de información disponibles, ni siquiera por las pocas que he mencionado antes. Me centraré en una sola publicación, las actas de los congresos del Grupo Internacional PME (Psychology of Mathematics Education), que, por sus características, son una excelente referencia de ámbito general ya que a estos congresos asisten investigadores de los cinco continentes y, por tanto, sus actas reflejan una amplia variedad de paradigmas, metodologías y problemas de estudio. También describiré mis propios trabajos recientes, la mayoría realizados en colaboración con miembros de mi departamento o estudiantes de doctorado.

Para organizar esta revisión, puedo dividir las publicaciones según los contenidos geométricos considerados en ellas. Así, tenemos dos grandes bloques de estudios, los dedicados a conceptos de geometría espacial y los dedicados a conceptos de geometría plana, bloque mayoritario. Casi todas las publicaciones del primer grupo abordan el análisis de temas relacionados con los poliedros y sus elementos, mientras que en las del segundo grupo

se puede identificar una variedad mayor de contenidos, que incluye polígonos y sus elementos, proporcionalidad geométrica, isometrías, medida de longitudes y superficies, etc.

La clasificación anterior proporciona una visión local, desde los contenidos matemáticos, de los objetivos de los investigadores, pero esconde otros objetivos tan importantes como los anteriores, de tipo psicológico, pedagógico, socio-cultural, etc. Por lo tanto, debe completarse con otra clasificación que muestre los temas transversales, como análisis de los procesos de razonamiento, estrategias de demostración, uso de entornos informáticos, y otros. La tabla siguiente resume estas organizaciones, y las marcas en las casillas se refieren a los temas que aparecen en las referencias que he consultado. La tabla permite tener una idea global de la investigación que se está realizando en didáctica de la geometría; en este texto me referiré sólo a algunos de esos temas.

	GEOMETRÍA PLANA					GEOMETRÍA ESPACIAL		
	Polígonos	Proporcionalidad	Angulos, rectas, etc.	Longitud, área	Isometrías	Poliedros	Rotaciones 3D	Representac. planas
Procesos de razonamiento	X		X	X		X	X	X
Procesos de demostración	X	X	X					
Visualización espacial	X				X	X	X	X
Entornos informáticos	X		X	X	X	X	X	X
Desarrollo curricular	X	X	X	X		X		
Resolución de problemas	X		X		X			

En las siguientes secciones de este texto, describiré algunas investigaciones desarrolladas en el contexto de líneas de investigación relevantes en la actualidad y que, además, ofrecen buenas perspectivas de trabajo en el futuro.

2. Procesos de Razonamiento Matemático.

Casi todas las investigaciones de corte psicológico están interesadas en observar los procesos de razonamiento matemático, si bien en bastantes de ellas el énfasis principal explícito está puesto en otros aspectos. En la actualidad hay dos marcos teóricos dominantes en este campo, formados por la teoría de Piaget y el constructivismo, y la teoría de Van Hiele, siendo la segunda la más interesante cuando se trabaja en geometría. Tras el auge de la teoría de Piaget en los 70, se ha derivado actualmente a utilizar en la investigación en didáctica de las matemáticas el marco del constructivismo, quedando en un segundo plano otras componentes como las etapas de desarrollo o las fases de adquisición de conceptos. Por otra parte, tras trabajar en la década de los 80 de manera preferente en explorar la estructura y

características centrales de los niveles de Van Hiele, en la actualidad la teoría de Van Hiele está asumida y se utiliza casi siempre como marco de referencia, más que como objeto de estudio, para organizar unidades de enseñanza y para evaluar el progreso de los estudiantes, igual que sucede con el constructivismo.

Un problema al que se enfrentan los investigadores que utilizan el marco del modelo de Van Hiele es la escasez de herramientas fiables y validadas para determinar los niveles de razonamiento de los estudiantes. Por este motivo, existe una línea de investigación en la que se trabaja en validar tests existentes (Lawrie y Pegg 1997) o en desarrollar nuevos tests adecuados a necesidades particulares (Whitman y otros 1993; Huerta 1996). Mi interés por este tema empezó hace varios años (Gutiérrez, Jaime y Fortuny 1991) y continúa con Gutiérrez (1994) y Gutiérrez y Jaime (1995), trabajo en el que consideramos que cada nivel de Van Hiele está formado por varios procesos de razonamiento diferentes (identificación de ejemplos de conceptos geométricos, comprensión y verbalización de definiciones, demostración de propiedades, y clasificación de familias). Basándonos en esta visión de los niveles, hemos planteado un modelo para la elaboración de tests de respuesta libre que garantice la evaluación adecuada de las diferentes componentes de cada nivel.

Los Van Hiele realizaron sus experimentaciones en el contexto de la enseñanza de los polígonos y, como consecuencia, éste es el campo en el que se han centrado la mayoría de las investigaciones posteriores. Esta limitación a los polígonos ha dado origen a otra línea de investigación importante, relacionada con la anterior, en la que se intenta particularizar la caracterización de los niveles de Van Hiele a áreas específicas de la geometría. Así, al comienzo de los 90 surgieron varios trabajos en los que se caracterizó el campo de las isometrías planas; un resultado de este trabajo es Jaime y Gutiérrez (1996). Actualmente se trabaja en la geometría espacial, tratando de caracterizar los niveles de razonamiento en el aprendizaje de los poliedros. En particular, Saads y Davis (1997) han elaborado un test para medir el nivel de Van Hiele y la adquisición de determinadas habilidades de visualización por grupos de futuros profesores. Por su parte, Guillén (1996, 1997), trabajando también con futuros profesores, desarrolló su investigación en el contexto de varios cursos dedicados a la geometría espacial, lo cual le permitió realizar observaciones exhaustivas, resultado de las cuales son listados muy detallados de descriptores de los niveles 1 a 3 en el campo de los poliedros.

Algunos investigadores han ampliado el marco teórico de sus trabajos incluyendo teorías diferentes pero compatibles. Así, Nakahara (1995) ha integrado los niveles de Van Hiele con el concepto de “camino cognitivo usual” de adquisición de conceptos matemáticos (Vinner y Hershkowitz 1980). Por su parte, Matsuo (1993) ha relacionado el nivel de razonamiento de los estudiantes con la consistencia entre la definición de un concepto, la imagen de ese concepto, y la elección de ejemplos del mismo (Vinner 1991) exhibidas por los

estudiantes. Otras investigaciones que vienen realizándose en los últimos años tienen como objetivo estudiar las relaciones y correspondencias entre la teoría de Van Hiele y la Taxonomía SOLO (Biggs y Collis 1982). Esta línea es prometedora ya que, aunque la taxonomía SOLO es de origen piagetiano, parece que hay un grado de relación elevado entre los resultados de evaluaciones basadas en ambos modelos (Huerta 1996; Pegg, Gutiérrez y Huerta 1998).

He dejado para el final la mención de un tema de investigación que siempre está de actualidad, como es el diseño curricular. El Modelo de Van Hiele, además de describir el progreso de la capacidad de razonamiento matemático de los estudiantes, aporta pautas para la organización del currículum de matemáticas, en particular de geometría, de los diferentes niveles educativos. Por lo tanto, se trata de un marco teórico muy idóneo para la investigación de desarrollo curricular en geometría. Este tipo de utilización no es nuevo, pues el currículum de matemáticas soviético de los años 60, el currículum holandés de los 80 y los “estándares curriculares” del NCTM se basan en el modelo de Van Hiele. Ejemplos recientes de currículos desarrollados por proyectos de investigación los tenemos en Corberán y otros (1994), donde elaboramos una propuesta para la enseñanza de los polígonos en ESO, Nasser, Sant’Anna y Sant’Anna (1996), donde se presenta una investigación de este tipo realizada en Brasil para el mismo nivel educativo, Jaime y Gutiérrez (1996), que presenta un conjunto de unidades para la enseñanza de las isometrías válidas para cursos desde primaria a la universidad, organizadas de acuerdo con los niveles 1 a 4 de Van Hiele, o Guillén (1996, 1997), que ha elaborado unidades para la enseñanza de los poliedros.

3. Procesos de Demostración.

Uno de los caballos de batalla de la didáctica de las matemáticas es la comprensión y aprendizaje de los conceptos y métodos relacionados con la demostración matemática. Existen diversos enfoques del problema, todos en vigor y utilizados en las investigaciones actuales. Uno es el modelo de Van Hiele, que nos permite diferenciar entre demostraciones basadas en verificación de ejemplos (nivel 2), informales (nivel 3) y formales (nivel 4). Otro enfoque lo proporciona Bell (1976), que clasifica las demostraciones de los estudiantes en diversas categorías, agrupadas en empíricas (basadas en la verificación de ejemplos) y deductivas (basadas en argumentos lógicos que tratan de conectar los datos con las conclusiones). Por su parte, Balacheff (1988) propone otra clasificación de las demostraciones de los estudiantes en cuatro tipos: Empirismo naïf (verificación de algunos ejemplos), experiencia crucial (verificación de un ejemplo que permita descartar alguna conclusión alternativa), ejemplo genérico (argumentación basada en un ejemplo al que se da carácter de representante general de la clase) y experiencia mental (demostración abstracta). Finalmente, De Villiers (1991) nos proporciona un punto de vista diferente al investigar los motivos que inducen a los estudiantes a aceptar un enunciado como cierto, los principales de los cuales

están estrechamente relacionados con la aceptación de la autoridad del profesor o el libro de texto.

Entre las investigaciones más recientes encontramos un línea seguida por diversos autores italianos (Mariotti y otros 1997) cuyo marco teórico común está integrado por la clasificación de Balacheff, la concepción vigotskiana de la importancia de la actividad social en el aula, y el trabajo en un micromundo en el que los estudiantes exploren y discutan sobre la veracidad matemática de los descubrimientos o resultados obtenidos. Entre los micromundos que han utilizado se encuentran las máquinas matemáticas (en las que se estudian sus propiedades internas), la sombra de objetos al sol (teorema de Tales) o la representación en perspectiva del espacio 3-dimensional. Me parecen especialmente interesantes y prometedores los trabajos de Mariotti, que se sitúa en un micromundo de construcciones geométricas en Cabri. En este contexto, los estudiantes se sienten cómodos usando el arrastre con el ratón y lo aceptan como forma de demostración de la corrección de sus construcciones o afirmaciones, por lo que resulta difícil hacerles comprender que un conjunto de ejemplos, por numeroso que sea, no es suficiente para asegurar dicha veracidad. La solución está en dejar de poner el énfasis en demostrar que una construcción es correcta y ponerlo en explicar por qué es correcta y en comparar las diferentes formas de construcción de la misma figura surgidas en el aula.

En esta línea de trabajo, hace algunos años iniciamos una investigación con estudiantes de secundaria tendente a detectar sus ideas intuitivas de demostración y a analizar los cambios que se producen en las mismas cuando los estudiantes trabajan, como parte de su docencia ordinaria, en la resolución de problemas geométricos con Cabri (Marrades 1996). En la actualidad seguimos profundizando en este tema, tratando de combinar diversos elementos de los marcos y metodologías mencionados en los párrafos precedentes.

4. Visualización.

Desde hace mucho tiempo se reconoce la estrecha relación entre visualización (también denominada visión espacial o imaginación espacial) y geometría espacial. Más recientemente, se ha ampliado el campo de estudio al análisis de la importancia de la visualización en otras áreas de las matemáticas, pero se sigue investigando sobre su influencia en los procesos de aprendizaje y comprensión de los conceptos geométricos, sobre todo de los relativos a la geometría espacial.

En una línea de investigación que se viene desarrollando desde hace varios años (Gutiérrez y Jaime 1993), nos hemos preocupado por los requisitos psicológicos necesarios para manipular imágenes mentales de poliedros durante la realización de rotaciones y la comparación de posiciones de un mismo sólido en diferentes contextos (mental, ordenador,

real). La observación de los procedimientos de trabajo empleados por los estudiantes nos ha permitido identificar cómo realizan los procesos de visualización y utilizan diferentes habilidades específicas. Dentro de esta misma línea, en Gutiérrez (1996) se hace un análisis de la visualización espacial en el contexto de las matemáticas, y de la geometría espacial en particular, y se presenta un marco teórico para organizar este campo de actividad desde la didáctica, en el cual se integran diversas componentes que, con anterioridad, habían sido analizadas o utilizadas por los investigadores de manera independiente.

Por su parte, Gorgorió (1998) se ha interesado por analizar las estrategias usadas por los estudiantes al resolver tareas de comparación de posiciones de sólidos y relacionar esas estrategias con las características de cada tarea. Los resultados indican que existe una dependencia de la estrategia usada (estructuración, procesamiento o aproximación) respecto de las características de contexto y formulación de la tarea planteada.

También Saads y Davis (1997) han investigado la adquisición de habilidades de visualización y la posible correlación entre el nivel de razonamiento de Van Hiele y la adquisición de estas habilidades. Entre las conclusiones del estudio destaca la evidencia de independencia entre los niveles de razonamiento y la adquisición de las diferentes habilidades de visualización consideradas.

Son numerosos los estudios en los que se han analizado componentes específicas de la visualización en el contexto de la geometría espacial. Hazama y Akai (1993) presentan los resultados de un estudio realizado con estudiantes japoneses para identificar etapas de evolución de la habilidad de dibujo en perspectiva. Sus resultados confirman los obtenidos anteriormente en los clásicos artículos Mitchelmore (1976, 1980) y en las numerosas réplicas que ha habido desde su publicación. Por su parte, Kopelman (1994) analiza las respuestas de un amplio rango de sujetos (estudiantes de varios cursos y profesores universitarios de diversas especialidades) a ejercicios de geometría espacial y visualización, y evalúa cómo influye la forma de presentación de los mismos (representaciones planas o tri-dimensionales) en los métodos de trabajo y resultados de los sujetos.

En éste como en otros temas de trabajo de la didáctica de las matemáticas, con frecuencia se ha observado si hay diferencias entre hombres y mujeres en la comprensión de determinados conceptos o la capacidad de uso de habilidades de visualización. Los resultados muestran un amplio acuerdo en que la capacidad de visualización está más desarrollada en los hombres que en las mujeres, y que hay capacidades similares en razonamiento lógico. En particular, Gorgorió (1996), como parte de un estudio más amplio, analizó las diferencias entre chicos y chicas de 12 a 16 años al resolver actividades de geometría espacial que requieren la utilización de estrategias y habilidades de rotación mental de objetos. Sus resultados indican que no hay diferencia significativa en las destrezas de uso de tales

habilidades en dicho contexto, aunque sí se observa diferencia cualitativa entre las estrategias de procesamiento y estructuración empleadas por chicos y chicas durante la resolución de dichas tareas (Gorgorió 1998).

Una línea de investigación a la que se debería prestar atención en el futuro es el desarrollo curricular y diseño de unidades de enseñanza de la geometría espacial. Un trabajo en esta dirección es el de Potari y Triadafillidis (1997), que presentan una unidad de enseñanza de geometría espacial en primaria en la que, mediante la presentación de diferentes tipos de actividades, se potencia la utilización y desarrollo de distintas formas de expresión y de argumentación. Otro trabajo en la misma línea es el de Guillén (1996, 1997), ya comentado en relación con los niveles de Van Hiele.

Finalmente, mencionaré que, aunque casi todos los estudios sobre la importancia de la visualización en el aprendizaje de la geometría se refieren a geometría espacial, también hay algunos investigadores que se han interesado por analizar su influencia en el aprendizaje de conceptos de geometría plana. Por ejemplo, en Orton (1997) se analizan los modelos de reconocimiento de figuras planas, mediante la manipulación mental de las mismas, usados por estudiantes de primaria y secundaria. Para ello les presenta diversas cuestiones en las que deben comparar figuras planas congruentes o semejantes colocadas en diversas posiciones.

5. Referencias.

- Balacheff, N. (1988): *Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de collège* (tesis doctoral). (Université J. Fourier - Grenoble: Grenoble, Francia).
- Bell, A.W. (1976): A study of pupil's proof-explanations in mathematical situations, *Educational Studies in Mathematics* 7(1), 23-40.
- Biggs, J.B.; Collis, K.F. (1982): *Evaluating the quality of learning. The SOLO taxonomy (Structure of the Observed Learning Outcome)*. (Academic Press: Londres, G.B.).
- Corberán, R. y otros (1994): *Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la Geometría en Enseñanza Secundaria basada en el Modelo de Razonamiento de Van Hiele* (colección "Investigación" nº 95). (C.I.D.E., M.E.C.: Madrid, España).
- De Villiers, M. (1991): Pupils' needs for conviction and explanation within the context of geometry, *Pythagoras* 26, 18-27.
- Gorgorió, N. (1996): Choosing a visual strategy: The influence of gender on the solution process of rotation problems, en L. Puig; A. Gutiérrez (eds.), *Proceedings of the 20th P.M.E. Conference* (Valencia, España) 3, 3-19.
- Gorgorió, N. (1998): Exploring the Functionality of Visual and Non-visual Strategies in Solving Rotation Problems, *Educational Studies in Mathematics* 35, 207-231.
- Guillén, G. (1996): Identification of Van Hiele levels of reasoning in three-dimensional geometry, en L. Puig; A. Gutiérrez (eds.), *Proceedings of the 20th P.M.E. Conference*

- (Valencia, España) 3, 3-43.
- Guillén, G. (1997): *El modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos. Observación de procesos de aprendizaje* (tesis doctoral). (Universitat de València: Valencia, España).
- Gutiérrez, A. (1994): A model of test design to assess the Van Hiele levels, en J.P. Ponte; J.F. Matos (eds.), *Proceedings of the 18th P.M.E. Conference* (Lisboa, Portugal) 3, 41-48.
- Gutiérrez, A. (1996): Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework, en L. Puig; A. Gutiérrez (eds.), *Proceedings of the 20th P.M.E. Conference* (Valencia, España) 1, 3-19.
- Gutiérrez, A.; Jaime, A. (1993): An analysis of the students' use of mental images when making or imagining movements of polyhedra, en I. Hirabayashi et al. (eds.), *Proceedings of the 17th P.M.E. Conference* (Tsukuba, Japón) 2, 153-160.
- Gutiérrez, A.; Jaime, A. (1995): Towards the design of a standard test for the assessment of the student's reasoning in geometry, en L. Meira; D. Carraher (eds.), *Proceedings of the 19th P.M.E. Conference* (Recife, Brasil) 3, 11-18.
- Gutiérrez, A.; Jaime, A.; Fortuny, J.M. (1991): An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the Van Hiele levels, *Journal for Research in Mathematics Education* 22(3), 237-251.
- Hazama, S.; Akai, T. (1993): Pupil's development of graphical representations of 3-dimensional figures: On technical difficulties, conflicts or dilemmas, and controls in drawing process, en I. Hirabayashi et al. (eds.), *Proceedings of the 17th P.M.E. Conference* (Tsukuba, Japón) 2, 161-168.
- Huerta, M.P. (1996): Assessment in geometry from two points of view: Levels of reasoning and SOLO levels, en L. Puig; A. Gutiérrez (eds.), *Proceedings of the 20th P.M.E. Conference* (Valencia, España) 1, 178.
- Jaime, A.; Gutiérrez, A. (1996): *El grupo de las isometrías del plano* (colección "Educación Matemática en Secundaria" nº 13). (Síntesis: Madrid, España).
- Kopelman, E. (1994): Visualization and reasoning about lines in space: school and beyond, en J.P. Ponte; J.F. Matos (eds.), *Proceedings of the 18th P.M.E. Conference* (Lisboa, Portugal) 3, 97-103.
- Lawrie, C.; Pegg, J. (1997): Some issues in using Mayberry's test to identify van Hiele levels, en E. Pehkonen (ed.), *Proceedings of the 21th P.M.E. Conference* (Lahti, Finlandia) 3, 184-191.
- Mariotti, M.A. y otros (1997): Approaching geometry theorems in contexts: from history and epistemology to cognition, en E. Pehkonen (ed.), *Proceedings of the 21th P.M.E. Conference* (Lahti, Finlandia) 1, 180-195.
- Marrades, R. (1996): *Anàlisi i evaluació de processos de prova en l'entorn informàtic Cabri-Géomètre* (tesina de doctorado). (Universitat de València: Valencia, España).
- Matsuo, N. (1993): Students' understanding of geometrical figures in transition from van

- Hiele level 1 to 2, en I. Hirabayashi et al. (eds.), *Proceedings of the 17th P.M.E. Conference* (Tsukuba, Japón) 2, 113-120.
- Mitchelmore, M.C. (1976): Cross-cultural research on concepts of space and geometry, en J.L. Martin; D.A. Bradbard (eds.), *Space and geometry* (ERIC: EE.UU.), 143-184.
- Mitchelmore, M.C. (1980): Prediction of developmental stages in the representation of regular space figures, *Journal for Research in Mathematics Education* 11(2), 83-93.
- Nakahara, T. (1995): Children's construction process of the concepts of basic quadrilaterals in Japan, en L. Meira; D. Carraher (eds.), *Proceedings of the 19th P.M.E. Conference* (Recife, Brasil) 3, 27-34.
- Nasser, L.; Sant'Anna, N.; Sant'Anna, A.P. (1996): Students assessment of an alternative approach to geometry, en L. Puig; A. Gutiérrez (eds.), *Proceedings of the 20th P.M.E. Conference* (Valencia, España) 4, 4-59.
- Orton, J. (1997): Pupils' perception of pattern in relation to shape, en E. Pehkonen (ed.), *Proceedings of the 21th P.M.E. Conference* (Lahti, Finlandia) 3, 304-311.
- Pegg, J.; Gutiérrez, A.; Huerta, P. (1998): Assessing reasoning abilities in geometry, en V. Villani; C. Mammana (eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century* (Kluwer: Dordrecht), 275-295.
- Potari, D.; Triadafilidis, T.A. (1997): Studying children's argumentation by incorporating different representational media, en E. Pehkonen (ed.), *Proceedings of the 21th P.M.E. Conference* (Lahti, Finlandia) 4, 230-237.
- Saads, S.; Davis, G. (1997): Spatial Abilities, van Hiele levels & language use in three dimensional geometry, en E. Pehkonen (ed.), *Proceedings of the 21th P.M.E. Conference* (Lahti, Finlandia) 4, 104-111.
- Vinner, S. (1991): The role of definitions in the teaching and learning of mathematics, en D. Tall (ed.), *Advanced mathematical thinking* (Kluwer: Dordrecht, Holanda), 65-81.
- Vinner, S.; Hershkowitz, R. (1980): Concept images and common cognitive paths in the development of some simple geometrical concepts, en R. Karplus (ed.), *Proceedings of the 4th P.M.E. Conference* (Berkeley, EE.UU.), 177-184.
- Whitman, N.C. y otros (1993): The attained geometry curriculum in Japan and Hawaii relative to the van Hiele level theory, en I. Hirabayashi et al. (eds.), *Proceedings of the 17th P.M.E. Conference* (Tsukuba, Japón) 2, 129-136.