

UNA CLASIFICACIÓN DE ACTUACIONES DE ALUMNOS DE 2º DE
SECUNDARIA RESOLVIENDO PROBLEMAS, BASADA EN UN ANÁLISIS DE
LA COMPETENCIA EN RESOLUCIÓN ALGEBRAICA DE PROBLEMAS

David Arnau y Luis Puig

Departamento de Didáctica de las Matemáticas
Universidad de Valencia

Arnau, D. y Puig, L. Una clasificación de actuaciones de alumnos de 2º de secundaria resolviendo problemas, basada en un análisis de la competencia en resolución algebraica de problemas. Por aparecer en *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, XIX Seminário de Investigaçãõ em Educaçãõ Matemática, XVIII Encontro de Investigaçãõ em Educaçãõ Matemática*. Badajoz: SEIEM.

UNA CLASIFICACIÓN DE ACTUACIONES DE ALUMNOS DE 2º DE SECUNDARIA RESOLVIENDO PROBLEMAS, BASADA EN UN ANÁLISIS DE LA COMPETENCIA EN RESOLUCIÓN ALGEBRAICA DE PROBLEMAS.¹

David Arnau y Luis Puig
Universitat de València. España.

Resumen

Presentamos un esquema de clasificación de las actuaciones de los resolutores cuando resuelven problemas verbales aritmético-algebraicos. Este esquema de clasificación se organiza considerando los elementos del modelo de competencia en la resolución algebraica de problemas. Nuestra intención es describir el estilo de las actuaciones de los alumnos, ya sean correctas o incorrectas, y su relación con el método cartesiano. Por último, mostraremos ejemplos de cómo hemos aplicado el esquema de clasificación a las actuaciones de un grupo de estudiantes de segundo de secundaria cuando resuelven problemas.

Abstract

We present a classification scheme of pupils' performances when solving arithmetic-algebraic word problems. This classification scheme is organised by taking into account the elements of a competence model on algebraic problem solving. We intend to describe the style of pupils' performances, either correct or incorrect, and their relationship with the Cartesian method. Finally, we show some examples of how we have applied the classification scheme to the problem solving performances of a group of students from the 2nd year of Spanish secondary education (13-14 years old).

Introducción.

Estamos llevando a cabo una investigación caracterizada porque pretende integrar la enseñanza del método de la hoja de cálculo (MHC) dentro de un proceso que conduzca a la competencia en el método cartesiano (MC). Nuestro trabajo se distingue de los realizados anteriormente (Dettori, Garuti, y Lemut, 2001; Rojano y Sutherland, 1993) en el mismo campo porque los estudiantes son instruidos sobre cómo resolver problemas en el entorno de la hoja de cálculo y no nos limitamos a observar sus producciones espontáneas. En la fase experimental se enseñó a 24 estudiantes de 2º de E.S.O. a resolver problemas verbales aritmético-algebraicos en el entorno de la hoja de cálculo. Estos estudiantes acababan de ser instruidos en la resolución de problemas de manera algebraica y, en general, no la dominaban aún. Para determinar la competencia de los estudiantes, previa a la enseñanza del MHC, se administró un cuestionario compuesto por problemas cuya lectura analítica más probable era aritmética y otro con problemas cuya lectura analítica más probable era algebraica. Tras la enseñanza del MHC se observó, mediante un estudio de casos, las actuaciones de los estudiantes agrupados por parejas cuando resolvían problemas usando la hoja de cálculo. Por último se administró un cuestionario, integrado por problemas cuya lectura analítica más probable era algebraica, con la intención de volver a determinar la competencia de los estudiantes al resolver problemas con lápiz y papel.

En esta comunicación nos centraremos en el análisis de los cuestionarios que se administraron con la intención de medir la competencia de los estudiantes antes y después de la enseñanza. El esquema de descripción que hemos elaborado parte de que consideramos el aprendizaje como producción de sentido por parte del que aprende al relacionar nuevas experiencias (o mensajes, o textos) con su experiencia pasada (o su campo semántico personal). La enseñanza lo que ha de procurar es, por un lado, que esa producción de sentido sea posible, y, por otro, que el sentido que produce el que aprende se corresponda con el significado social e históricamente establecido. De acuerdo con esto, hace falta identificar no sólo los errores de los aprendices, sino lo que

saben y lo que hacen. Así, nuestro esquema de clasificación se organiza considerando los elementos del modelo de competencia en la resolución algebraica de problemas con la intención de detallar el estilo de las actuaciones de los alumnos, ya sean correctas o incorrectas. Para la descripción del modelo competencia partiremos de una versión de los cuatro primeros pasos del MC (Puig, 2003) donde se indica lo que un resolutor ideal lleva a cabo cuando resuelve algebraicamente un problema de enunciado verbal:

Primero una lectura analítica del enunciado del problema que lo reduce a una lista de cantidades y de relaciones entre cantidades.

El segundo paso consiste en la elección de una cantidad que se va a representar con una letra (o de unas cuantas cantidades que se van a representar con letras distintas).

El tercer paso consiste en representar otras cantidades mediante expresiones algebraicas que describen la relación (aritmética) que esas cantidades tienen con otras que ya han sido previamente representadas por una letra o una expresión algebraica.

El cuarto paso consiste en el establecimiento de una ecuación (o tantas como letras distintas se haya decidido introducir en el segundo paso), lo que se hace igualando dos expresiones, de las que se han escrito en el tercer paso, que representen la misma cantidad (pp. 99-100).

Debido a la extensión que tendría presentar la totalidad del esquema de clasificación, nos limitaremos a la descripción de los elementos que hacen referencia a la competencia en el primer paso del MC. Más concretamente, estableceremos los criterios que nos permitirán clasificar y codificar las relaciones entre cantidades a las que se reduce un problema tras la lectura analítica.

El esquema de clasificación y la codificación de las variables.

La lectura analítica que realiza un sujeto real reduce el problema a una lista de cantidades y de relaciones entre cantidades que pueden ser correctas (necesarias e innecesarias) e incorrectas. Para poder clasificar y codificar la lectura del resolutor la compararemos con otra lectura llevada a cabo por un sujeto ideal. Como éste podría realizar más de una (en principio todas las posibles) lectura de un mismo problema, es necesario establecer un criterio que nos permita fijar previamente respecto a qué lectura se comparará. Con esta intención vamos a definir qué entendemos por relación necesaria y por lectura analítica mínima asociada a la actuación del resolutor. Llamamos relación necesaria a cualquier relación correcta que si se eliminara de la solución nos impediría llegar al resultado. Definimos lectura mínima asociada a la actuación del resolutor como aquella lectura correcta que integra a todas las relaciones necesarias que utiliza el resolutor y que utiliza el mínimo número de relaciones posible. La lectura analítica mínima asociada a la actuación del resolutor² la podríamos interpretar como aquella que realiza un sujeto competente a partir de lo que hay de correcto en la actuación del usuario real. Esta lectura será la que comparemos con la lectura del problema que lleve a cabo el resolutor y sólo pueden coincidir cuando éste haga una lectura correcta. Cuando el resolutor no utilice ninguna relación necesaria, se considerará lectura mínima asociada a la actuación a aquella, de entre las lecturas

mínimas disponibles, en la que podamos encajar la mayor cantidad de fragmentos de relaciones incorrectas dentro de relaciones correctas. Cuando lo anterior tampoco sea posible, consideraremos aquélla que incluya al mayor número de cantidades necesarias de las que el resolutor pone en juego.

Una vez hemos precisado la lectura respecto a la que vamos a comparar la que ha llevado a cabo el resolutor, pasamos a establecer las variables que nos permitirán codificar las relaciones empleadas. El listado de variables que ofrecemos a continuación se basa en el utilizado por Cerdán (2008).

- Número de relaciones necesarias (RelNec). Es el número de relaciones que tiene la lectura mínima asociada a la actuación del resolutor.
- Número de relaciones correctas necesarias (RelCoNec). Es el número de relaciones utilizadas por el resolutor que podemos integrar en la lectura mínima asociada a la actuación.
- Número de relaciones correctas innecesarias (RelCoInn). Es el número de relaciones correctas utilizadas por el resolutor que no podemos integrar en el grafo mínimo asociado a la actuación.
- Número de relaciones incorrectas con error en el tipo de relación (RelInR). Es el número de relaciones incorrectas que conectan cantidades que están relacionadas en la lectura mínima asociada; pero lo están por un tipo de relación distinto al empleado por el resolutor.
- Número de relaciones incorrectas con error en el orden de las cantidades. (RelInO). Es el número de relaciones incorrectas que conectan cantidades que están relacionadas en la lectura mínima asociada por el mismo tipo de relación; pero lo están en un orden distinto al empleado por el resolutor.
- Número de relaciones entre cantidades no relacionadas (NoRel). Es el número de relaciones que conectan cantidades que no están relacionadas en la lectura mínima asociada la actuación ni en ninguna otra lectura analítica correcta posible.

Aplicaremos el esquema de clasificación sobre las producciones de tres estudiantes al resolver el problema “Las naranjas”. Ofrecemos a continuación el enunciado del mismo y la descripción de algunas lecturas analíticas que constituirán el catálogo de posibles lecturas mínimas asociadas (ver Tabla 1).

Antonio ha comprado 15 docenas de naranjas en dos sacos; pero en uno de ellos hay 30 naranjas más que en el otro. ¿Cuántas naranjas corresponden a cada saco?

Tabla 1. Catálogo de posibles lecturas mínimas asociadas.

	Análisis de cantidades.	Análisis de relaciones.	Grafo asociado a la lectura.
Lectura A.	Número de naranjas compradas = $N = 180$. Número de naranjas en el saco que más tiene = Sg . Número de naranjas en el saco que menos tiene = Sp . Número de naranjas que hay de más en un saco = $Mgp = 30$.	$N = Sg + Sp$ $Sg = Mgp + Sp$	

Lectura B1.	<p>Número de naranjas compradas = $N = 180$. Número de naranjas en el saco que más tiene = Sg. Número de naranjas en el saco que menos tiene = Sp. Número de naranjas que hay de más en un saco = $Mgp = 30$. Número de sacos = $S = 2$. Número de naranjas compradas si eliminamos el exceso = Nqe.</p>	$N = Sg + Sp$ $N = Nqe + Mgp$ $Nqe = Sp \cdot S$	
Lectura B2.	<p>Las mismas cantidades que en B1.</p>	$Sg = Sp + Mgp$ $N = Nqe + Mgp$ $Nqe = Sp \cdot S$	
Lectura C.	<p>Número de naranjas compradas = $N = 180$. Número de naranjas en el saco que más tiene = Sg. Número de naranjas en el saco que menos tiene = Sp. Número de naranjas que hay de más en un saco = $Mgp = 30$. Número de sacos = $S = 2$. Número de naranjas compradas si añadimos el defecto = Nad.</p>	$N = Sg + Sp$ $Nad = Mgp + N$ $Nad = Sg \cdot S$	
Lectura D1.	<p>Número de naranjas compradas = $N = 180$. Número de naranjas en el saco que más tiene = Sg. Número de naranjas en el saco que menos tiene = Sp. Número de naranjas que hay de más en un saco = $Mgp = 30$. Número de sacos = $S = 2$. La mitad del número de naranjas de más que hay en un saco = Em. La mitad del número de naranjas compradas = Nm.</p>	$N = Nm \cdot S$ $Mgp = Em \cdot S$ $Sg = Nm + Em$ $Nm = Sp + Em$	
Lectura D2.	<p>Las mismas cantidades que en D1.</p>	$N = Nm \cdot S$ $Mgp = Em \cdot S$ $Sg = Nm + Em$ $N = Sg + Sp$	

Lectura D3.	Las mismas cantidades que en D1.	$N = Nm \cdot S$ $Mgp = Em \cdot S$ $Nm = Sp + Em$ $Sg = Mgp + Sp$	
-------------	----------------------------------	--	--

Candelaria resuelve el problema “Las naranjas” correctamente (ver Figura 1). Partiendo de que la letra x representa a la cantidad Sp , la expresión “ $x + 30$ ” responderá a la relación $Sg = Sp + Mgp$ y la ecuación “ $180 = x + (x + 30)$ ” a la relación $N = Sg + Sp$. Concluimos que la lectura mínima asociada a la actuación del resolutor es la lectura A, que en este caso coincide con el grafo de la actuación del resolutor y, en consecuencia, codificamos $RelNec = 2$ y $RelCoNec = 2$.

180 Naranjas en 2 sacos

$$180 = x + (x + 30)$$

$$x = \frac{150}{2} \quad x = 75$$

$$-30 + 180 = x + x \quad 150 = 2x$$

En el primer saco corresponden 75 naranjas y en el segundo 105.

Figura 1. La solución de Candelaria.

Gonzalo resuelve el problema de manera incorrecta (ver Figura 2). En “180 naranjas \div 2 = 90” utiliza la relación $N = S \cdot Nm$. La suma de 90 más 30 y la resta de 30 a 90 podemos asociarlas a las relaciones $Sg = Nm + Em$ y $Nm = Sp + Em$, pues en “R: Un saco con 120 naranjas y un saco con 60 naranjas” aclara que los resultados obtenidos son, respectivamente, Sg y Sp . Esto supone que asigna de manera incorrecta el valor de la cantidad Mgp a la cantidad Em . Por lo tanto, como las tres relaciones son correctas³ y aparecen en la lectura D1, concluimos que la lectura mínima asociada a la actuación es la D1 y codificamos $RelNec = 4$ y $RelCoNec = 3$.

$15 \cdot 12 = 180 \text{ naranjas} \div 2 = 90$

1º Saco	2º Saco
90	90
+ 30	- 30
120	60

R: Un saco con 120 naranjas y un saco con 60 naranjas.

Figura 2. La solución de Gonzalo.

Francisco también resuelve el problema de manera incorrecta (ver Figura 3). Obtiene 90 de dividir 180 entre 2 y escribe “90 – naranjas en 1 saco”. Por lo tanto (y aunque la operación es la misma que realiza en primer lugar el estudiante anterior) nos informa de que el valor 90 se asigna a la cantidad Sp y que la relación que emplea es $N = S \cdot Sp$ (NoRel). A continuación, suma 90 más 30 y obtiene 120 lo que supone emplear la relación correcta $Sg = Sp + Mgp$. Esta relación aparece en los grafos A, B2 y D3; pero $N = S \cdot Sp$ comparte tipo de relación, orden y dos de los tres elementos con las relaciones $Nqe = S \cdot Sp$ y $N = Nm \cdot S$ de las lecturas B2 y D3, con lo que queda descartada la lectura A como posible lectura mínima asociada. Para decidir cuál de las dos lecturas atribuir utilizamos un nuevo criterio: la coincidencia del número de cantidades conocidas y desconocidas. Como el estudiante al dividir 180 entre 2 supone una relación formada por dos cantidades conocidas y una desconocida, concluimos que la relación que mejor se acopla a la actuación es $N = Nm \cdot S$, pues está integrada por dos cantidades conocidas (S y N), mientras que $Nqe = S \cdot Sp$ sólo lo está por una (S). Por lo tanto, consideramos la lectura D3 como la lectura mínima asociada a la actuación del resolutor y codificamos $RelNec = 4$, $RelCoNec = 1$ y $NoRel = 1$.

① $15 \times 12 = 180$

② $180 \div 2 = 90$ cada saco
 90 – naranjas en 1 saco

③ $90 + 30 = 120$
 120 – naranjas en el 2º saco

Figura 3. La solución de Francisco.

Referencias bibliográficas

- Cerdán, F. (2008). Las igualdades incorrectas producidas en el proceso de traducción algebraico. Un catálogo de errores. En R. Luengo; B. Gómez; M. Camacho; L.J. Murillo (Eds) *Investigación en Educación Matemática. Actas del XII Simposio de la SEIEM*, pp. 257-272. Badajoz: Universidad de Extremadura.
- Dettori, G., Garuti, R., & Lemut, E. (2001). From arithmetic to algebraic thinking by using a spreadsheet. En R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell y R. Lins (Eds), *Perspectives on School Algebra*, pp. 191-207. Dordrecht / Boston / London: Kluwer Academic Publishers.
- Puig, L. (2003). Historia de las ideas algebraicas: componentes y preguntas de investigación desde el punto de vista de la matemática educativa. En E. Castro, P. Flores, T. Ortega, L. Rico y A. Vallecillos (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Actas del VII Simposio de la SEIEM*, pp. 97-108. Granada: Universidad de Granada.
- Rojano, T., and Sutherland, R. (1993). A Spreadsheet Approach to Solving Algebra Problems, *Journal of Mathematical Behavior*, 12, 353-383.

¹ Esta investigación se ha realizado con una ayuda de la Dirección General de Investigación del Ministerio de Educación y Ciencia de España, ref. SEJ2005-06697/EDUC.

² Con el fin de establecer un referente respecto al que comparar las relaciones correctas innecesarias y relaciones incorrectas que utiliza el resolutor, también definimos la lectura (no mínima) asociada a la actuación del resolutor y la lectura ampliada asociada a la actuación, respectivamente. La primera se obtendría de la unión de la lectura mínima asociada a la actuación y de las relaciones correctas innecesarias usadas por el resolutor. La lectura ampliada asociada a la actuación del resolutor incluiría la lectura asociada a la solución y las relaciones incorrectas empleadas por el resolutor.

³ Las relaciones son correctas porque suponemos incorrecta una asignación de valor a una cantidad. Hemos indicado que el esquema de clasificación de las actuaciones también describiría la lista de cantidades que considera el resolutor tras la lectura analítica de un problema; pero por motivos de espacio no entraremos en detalles sobre este aspecto. La codificación conjunta de las relaciones y las cantidades dará una descripción completa de la actuación en lo que refiere al primer paso del MC.