EL TEXTO “ACERCA DEL CARÁCTER ARITMÉTICO O ALGEBRAICO DE LOS PROBLEMAS VERBALES”, VEINTITRÉS AÑOS DESPUÉS

Luis Puig
Departamento de Didáctica de las Matemáticas
Universitat de València Estudi General

Puig, Luis (2014). El texto “Acerca del carácter aritmético o algebraico de los problemas verbales”, veintitrés años después. En B. Gómez y L. Puig (Eds.) (2014). *Resolver problemas. Estudios en memoria de Fernando Cerdán* (pp. 35-47). Valencia: Universitat de València. ISBN 978-84-370-6863-3.

2

El texto "Acerca del carácter aritmético o algebraico de los problemas verbales", veintitrés años después

Luis Puig

2.0 INTRODUCCIÓN

El texto "Acerca del carácter aritmético o algebraico de los problemas verbales", que escribimos Fernando Cerdán y yo hace veinticuatro años, que se publicó hace veintitrés, y que llamaré a partir de ahora PC91, no ha dejado de ser citado desde entonces[1]. He de confesar que yo no había vuelto a leer PC91 en detalle desde hace años, pese a darlo como bibliografía en cursos de doctorado diversos y citarlo de vez en cuando en otros textos míos, hasta que

1. Modestamente, es cierto, y en un ámbito reducido, como suele suceder con textos que no están escritos en inglés, ni publicados en revistas "de impacto". Además, como el simposio en que se presentó se realizó en 1990, los días 12, 13 y 14 de julio, y las memorias del simposio se publicaron un año después, en 1991, y son casi inencontrables, el texto suele aparecer citado como Puig y Cerdán (1990), que es como yo mismo lo he citado y como aparecía en la lista de "textos seleccionados" de mi página web hasta que, al descubrir con motivo de la elaboración de este libro que en la página de créditos de las Memorias indica "Primera Edición: Julio 1991", decidí ser fiel a las memorias y cambiarlo por Puig y Cerdán (1991).

pensé que este libro que hemos compuesto en memoria de Fernando Cerdán, comenzara con un facsímil de las páginas de las actas de las *Memorias del Segundo Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática*, en las que apareció publicado en México, en 1991, y que le siguiera un texto mío con el título "El texto "Acerca del carácter aritmético o algebraico de los problemas verbales", veintitrés años después", es decir, este texto –que se podría llamar pues PsPC91+23. Y no había vuelto a leerlo porque algunas de las ideas fundamentales que tengo sobre la naturaleza de los problemas aritmético-algebraicos de enunciado verbal y sus procesos de resolución, las pensé y las escribí por primera vez, al alimón con Fernando Cerdán, en PC91, y, desde entonces, he seguido, solo o en compañía de otros, pensando en ello. Dicho de otra manera, no había vuelto a leer PC91 porque no necesitaba hacerlo con el fin de recordar lo que estaba ahí escrito, ya que había seguido pensando en el asunto del que PC91 trata, y, si lo mencionaba, era sólo como un eslabón, casi el inicial, en mi forma de pensar sobre esos asuntos.

Veintitrés años después, me propongo pues leer PC91 para elaborar PsPC91+23, y vacilo entre tomarlo como un texto histórico (en la historia de la didáctica de las matemáticas), buscar en él lo que en otros lugares he llamado "cogniciones petrificadas"[2], e intentar darle sentido teniendo en cuenta, como decía Michel Foucault en *L'Archéologie du savoir*, que los documentos hay que tomarlos como monumentos[3], o bien bucear en mi memoria, esa construcción de la historia personal, que también convendría que fuera leída como un monumento. En las páginas que siguen, oscilo hacia uno y otro lado.

2.1 LAS CIRCUNSTANCIAS DE PC91

El texto PC91 es un texto de circunstancias. Al final de la década de los ochenta se produjeron un par de acontecimientos que dieron ocasión a que Fernando y yo nos sentáramos a escribir PC91. El primero fue la firma el 27 de octubre de 1988 en España y el 24 de enero de 1989 en México de un convenio entre la Universitat de València Estudi General (UVEG) y el Programa Nacional de Formación y Actualización del Profesorado de Matemáticas (PNFAPM), que dirigía en México Eugenio Filloy desde el Centro de Investigación y de

2. Por ejemplo en Puig (2006).
3. Como ya indiqué por primera vez en Puig (1996a).

Estudios Avanzados (CINVESTAV). Eugenio y yo promovimos ese convenio entre nuestras respectivas instituciones, después de que, tras nuestros primeros encuentros en 1978 en Santiago de Compostela y en 1980 en Oaxtepec, México, en sendos congresos de la CIEAEM, nos volviéramos a encontrar en 1985 en el PME9 en Noordwijkerhout, Holanda[4]. Una de las primeras acciones dentro de ese convenio, fue la invitación a varios miembros del Departamento de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Valencia a México para participar en el Segundo Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática, que organizaba el PNFPM en Cuernavaca, Morelos[5].

El segundo acontecimiento fue la aparición del libro *Problemas aritméticos escolares*[6], que laboriosamente escribimos Fernando y yo para la colección "Matemáticas, Cultura y Aprendizaje" de la Editorial Síntesis. En una nota al pie de la página 168 de ese libro, escribimos

> Filloy y Rojano (1985) han determinado en el terreno de la resolución de ecuaciones un corte entre el aritmética y el álgebra que según ellos está en el momento que es necesario operar con la incógnita para resolver la ecuación. Aquí señalamos como posible punto de transición entre los problemas aritméticos y algebraicos el momento en que el análisis de la incógnita no es posible realizarlo únicamente a partir de los datos; en esos casos, la traducción, ahora algebraica, que corresponde al análisis realizado conduce a una ecuación de las que Filloy y Rojano colocan del lado del álgebra (Puig y Cerdán, 1988, p.168).

Dejado así caer en una nota a pie de página, indicábamos cómo se enlazaba el análisis de estructura de lo que entonces llamábamos PAVOC (problemas aritméticos de varias operaciones combinadas), que habíamos realizado y

4. He narrado en qué sentido influyeron en el curso de mi pensamiento estos primeros encuentros míos con Eugenio Filloy al comienzo de Puig (2003a).
5. Invitación que devolvimos al año siguiente, organizando el Tercer Simposio en Valencia.
6. El libro lleva fecha de 1988 en el ISBN, pero realmente se publicó en 1989. En PC91, nos empeñamos en citarlo con la fecha real, para dejar claro el corto espacio de tiempo transcurrido desde la elaboración del libro y la de PC91: en 1989 acabamos el libro que lleva fecha de 1988 y en 1990 escribimos PC91. En PsPC91+23 lo estoy citando con la fecha del ISBN, que es lo más usual en la bibliografía, aunque no corresponda a la realidad. La discrepancia entre las fechas se debe a que el libro estaba programado por la editorial para 1988, pero su laboriosa elaboración nos hizo no entregarlo a la editorial hasta el año siguiente, y eso que decidimos terminar sin que el capítulo dedicado a los problemas multiplicativos estuviera completado de la misma forma que el de los problemas aditivos, como quería Fernando –y no era posible, pero así era (¿éramos?) de minucioso e intelectualmente exigente.

exponíamos en ese libro, con la distinción realizada por Filloy y Rojano entre ecuaciones aritméticas y ecuaciones algebraicas, que ellos calificaban como “corte didáctico”, por su observación de las actuaciones de los alumnos. Ese lazo entre terrenos distintos, por un lado, análisis de estructura y, por otro, observaciones de alumnos; por un lado, problemas de enunciado verbal, por otro, ecuaciones, estaba pidiendo continuar la indagación, y la invitación a México nos dio pie para ponernos a ello: PC91 fue el producto del comienzo de esa indagación.

2.2 PC91

El texto PC91 comienza haciendo referencia a algunas de las preguntas recién formuladas por Sigrid Wagner y Carolyn Kieran en el volumen dedicado al álgebra de la serie de estudios que promovió y publicó el National Council of Teachers of Mathematics a finales de la década de los ochenta para establecer cuáles eran las *Research Issues* y cuál la agenda (o cosas que hay que hacer) en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas (Wagner & Kieran, 1989). Unas de ellas las tradujimos así:

> ¿Qué es un problema verbal algebraico? ¿Hay problemas que son intrínsecamente más algebraicos que aritméticos? ¿Cuándo un método de resolver problemas verbales es más algebraico que aritmético? (PC91, p. 35).

En el propio desarrollo de Wagner y Kieran de la pregunta “¿Qué es un problema verbal algebraico?” en las dos que le siguen, ya está apuntado que la contestación no va a ser una diferenciación tajante entre “problemas verbales algebraicos” y “problemas verbales aritméticos”, ni, por tanto, una caracterización de qué es un “problema verbal algebraico”. Las dos preguntas que le siguen hablan de una progresión, un continuo, “más (algebraico) que (aritmético)”, tanto por lo que respecta a los problemas como a los métodos de resolución, y en ese sentido es en el que nosotros contestamos en PC91 a las dos primeras de esas preguntas.

No entramos, sin embargo, en una discusión de la tercera de las preguntas. El papel que asignamos a los métodos de resolución en PC91 fue el de convertirse en instrumento de análisis para contestar a las dos primeras preguntas y no el de ser objeto de estudio, aunque, en realidad, sólo usáramos como instrumento de análisis una versión del de análisis y síntesis. Esto es importante tenerlo en cuenta para no malinterpretar el sentido en el que en PC91 colocamos el método de análisis y síntesis del lado de la aritmética. Como método general de resolución de problemas, que es como el método de análisis y síntesis se elaboró en la Grecia clásica, carece de rasgo alguno que pueda calificarse de "aritmético". El método está concebido para resolver, por ejemplo, cualquier proposición de las que contienen los *Elementos* de Euclides, ya sea de los libros que tratan de geometría del plano, de razón y proporción, de aritmética, de geometría sólida o el libro X; ya se trate de proposiciones en las que hay que hacer algo, es decir, problemas (o, como decía Polya, "problemas de encontrar"), o ya se trate de proposiciones en las que hay que demostrar lo que se afirma, es decir, teoremas (o, como decía Polya, "problemas de demostrar").

Lo que nosotros hicimos es observar que una versión del método de análisis y síntesis reducido a la búsqueda de antecedentes, aplicado a un PAVOC (denominación que acabaríamos substituyendo por la de "problema aritmético-algebraico de enunciado verbal", como consecuencia de adónde nos llevó el estudio de esa clase de problemas que empezamos a finales de la década de los ochenta[7]), producía en la síntesis una expresión aritmética, siempre que el análisis hubiera culminado en datos. Eso nos permitió usar esa versión reducida e incompleta del método como un instrumento de análisis de una cierta estructura de los PAVOC y representarla mediante un diagrama con forma de árbol que muestra el camino entre la incógnita y los datos a través de relaciones entre cantidades, pero no estábamos abordando más que muy ligeramente un estudio de la naturaleza aritmético o algebraica de métodos de resolución que permitiera contestar a la tercera de las preguntas de Wagner y Kieran citadas. Sí hay en PC91 un apunte de que el método cartesiano tiene un rasgo que lo sitúa en el terreno del álgebra, que expresamos diciendo que "tanto datos como incógnitas se tratan desde el primer momento como si fueran datos, esto es, se puede operar formalmente con ellos", e indicando que "Descartes mismo señaló que ahí reside todo el artificio del método (PC91, p. 43)[8].

Hecha esta salvedad, en PC91 las preguntas de Wagner y Kieran sobre el carácter más o menos aritmético o algebraico de los problemas verbales se

7. Si hubiéramos querido conservar en la denominación el hecho de que los problemas aritmético-algebraicos son, de hecho, "de varias operaciones combinadas", hubiéramos tenido que repetir la A en el acrónimo y convertirlo en PAAVOC.

8. Lo que en PC91 fue un apunte lo desarrollé en años sucesivos en Puig (2003b), Puig y Rojano (2004), Filloy, Puig y Rojano (2008) y otros lugares.

reformulan, y la reformulación resulta ser de hecho función del instrumento de análisis, de lo que permite ver el instrumento de análisis. Como dijimos bien claramente en PC91, lo que permite ver la versión del método de análisis y síntesis que usamos es "la estructura de un proceso de traducción de un PAVOC al lenguaje aritmético" (PC91, p. 40). En esa frase está contenido lo que ahora me parece lo fundamental de PC91, que son dos cosas relacionadas: una, que lo que se puede calificar de aritmético o algebraico no es el problema sino algo que forma parte de su proceso de resolución, y otra, que además, como ese algo forma parte del proceso de resolución del problema (y no del propio problema), un mismo problema puede ser resuelto de varias maneras en las que esa parte del proceso puede que sea aritmética o que sea algebraica. Las preguntas de Wagner y Kieran se desplazan del problema al proceso de resolución, se contestan en términos del proceso de resolución y, además, se muestra que no parece pertinente plantearlas para el problema, dado que problemas resueltos de manera algebraica también pueden serlo de manera aritmética.

Sin embargo, al final de PC91 hay aún un intento de determinar si pudiera haber problemas para los cuales fuera imposible que se desencadenara un proceso de resolución aritmético, y esto se hace dándole la vuelta al procedimiento de indagación: en vez de partir de la versión del método de análisis y síntesis para ver si éste tiene éxito o no, y derivar de ahí la naturaleza aritmética (cuando hay éxito) o algebraica (cuando no lo hay) del proceso de resolución, se parte de una ecuación de las que Filloy y Rojano llaman algebraicas. Como ya habíamos indicado en la nota a pie de página del libro *Problemas aritméticos escolares* citada antes, esas ecuaciones se corresponden con procesos de resolución de PAVOC que llamamos algebraicos. Situados en el terreno formal de las ecuaciones, lo que hicimos es indicar que, si la ecuación se resuelve sin realizar las operaciones aritméticas, sino dejándolas indicadas, la expresión aritmética que resuelve la ecuación resuelve, por tanto, el problema, y esa expresión aritmética podría ser el resultado de la síntesis de un proceso de análisis y síntesis, a condición de que se pudiera dotar de sentido en el contexto de la historia que narra el enunciado del problema a las cantidades que aparecen en esa expresión aritmética; PC91 concluye precisamente preguntándose, y proponiendo como continuación del estudio, si hay características estructurales del problema que puedan influir en esa posibilidad de dotar de sentido a las cantidades necesarias para que el proceso de resolución sea aritmético, ya que la clave del asunto es precisamente esa posibilidad de dotar de sentido.

La continuación de nuestras indagaciones no siguió directamente, sin embargo, esa vía indicada al final de PC91, sino que, empujada por un acontecimiento que se produjo al presentar públicamente en Cuernacava el texto, se dirigió a un examen más detallado y preciso del método cartesiano y a su uso directo para el examen del proceso de resolución. El examen del método cartesiano en PC91 era en cierta manera subsidiario del uso de nuestra versión del método de análisis y síntesis como instrumento de análisis del proceso de resolución de los PAVOC, de modo que en PC91 veíamos el método cartesiano desde el método de análisis y síntesis, sin que cupiera que pudiéramos señalar que uno y otro se sitúan desde el comienzo del proceso en lugares distintos.

Años después expresé claramente esta diferencia radical haciendo uso de un aparato conceptual que en 1990 aún no se había desarrollado, y que es el propio de los Modelos Teóricos Locales:

> La diferencia fundamental entre el análisis del enunciado propio del método de análisis y síntesis y el del MC reside en que el esbozo lógico-semiótico que uno realiza cuando usa el MC prevé el uso del SMS_{al} del álgebra. Esto conlleva no sólo el uso de letras para designar las cantidades que se determinan en el análisis, sino los nuevos significados de las operaciones y las relaciones aritméticas y, en particular, del signo igual que son propios de ese SMS_{al}. Resulta entonces que ese análisis se hace considerando de la misma manera las cantidades conocidas y las desconocidas. Por el contrario, el análisis del enunciado propio del método de análisis y síntesis se desarrolla situándose en la incógnita del problema y considerando con qué datos habría que operar para obtenerla, y en el esbozo lógico-semiótico no se contempla la posibilidad de operar más que con cantidades conocidas (Filloy, Puig y Rojano, 2008, p. 332).

Pero el cambio de énfasis, del método de análisis y síntesis al método cartesiano, tuvo ya su origen en 1990 en Cuernavaca.

2.3 TRAS PC91

Fernando Cerdán no viajó a México al Simposio en que presentábamos PC91. Cuando yo lo expuse en Cuernavaca, al terminar la discusión que siguió a la exposición, se me acercó Ramiro Ávila, que venía de la Universidad de Sonora, a decirme que en una revista de su universidad acababan de traducir del ruso y publicar un artículo en el que se abordaba la representación de la estructura de los problemas verbales con unos diagramas que le habían recordado los diagramas con que nosotros representábamos el camino entre la incógnita y los datos. Ramiro Ávila llevaba consigo un ejemplar de la revista y me lo regaló. El artículo resultó ser "Los grafos trinomiales como metalenguaje de los problemas", y su autor L. M. Fridman[9]. Fernando Cerdán narra esta historia en una nota a pie de página de su tesis doctoral, que textualmente dice lo siguiente:

> La llegada casual o azarosa de este artículo a nuestras manos se debe al entrecruzamiento de las siguientes personas y circunstancias, una conferencia de Luis Puig, en la que está presentando los diagramas como medio de análisis de la estructura de los problemas de varias operaciones combinadas a la manera de como lo escribimos en Puig y Cerdán (1989)[10], un profesor de la Universidad de Sonora que ha estado en Cuba, que habla ruso y ha traducido el artículo de Fridman que la revista de la citada Universidad publica, y el profesor Ramiro Ávila, presente en la conferencia, que aprecia similitudes entre lo que está oyendo y lo que vio en el artículo de la revista de su Universidad (Cerdán, 2008, p. 5)

Al leer el artículo unos días después, me di cuenta de que la representación de la red de relaciones entre cantidades mediante un grafo del estilo que Fridman presentaba se colocaba de entrada en el terreno del álgebra. De alguna manera, la representación con los diagramas con forma de árbol que Fernando y yo habíamos concebido y la que Fridman presentaba en su artículo eran dos caras de la moneda aritmético-algebraica: en nuestros diagramas se miraba con ojos aritméticos, y lo algebraico aparecía como imposibilidad o forzando los límites de lo aritmético; en los grafos de Fridman se miraba con ojos algebraicos y lo aritmético aparecía como otra posible mirada, descrita en términos algebraicos. El asunto me pareció explotable y guardé la revista con cuidado de no perderla.

De vuelta en España mostré el artículo de Fridman a Fernando, que también vio de inmediato el interés de explorar los grafos de Fridman para nuestros propósitos, y eso nos pusimos a hacer sin dilación. Sin embargo, lo que resultó de esa exploración tardó años en hacerse público.

La razón de la tardanza tiene su origen en que Fernando y yo estábamos ambos embarcados conjuntamente en la realización de nuestras tesis doctorales, que trataban ambas del estudio del proceso de resolución de problemas: la de

9. Fridman (1990). El original en ruso se publicó en 1978.
10. Fernando se refiere aquí al libro *Problemas aritméticos escolares*, que, como ya he explicado en la nota 6, Fernando y yo preferíamos citar con la fecha en que lo acabamos, 1989, y no con la fecha que figura en su ISBN, 1988, que es con la que aparece aquí en las referencias bibliográficas.

Fernando centrada en el estudio de los problemas que entonces llamábamos PAVOC y acabamos llamando aritmético-algebraicos, la mía dedicada al estudio de la heurística, lo que incluía, al considerar tanto el método de análisis y síntesis como el método cartesiano como métodos de resolución de naturaleza heurística, el estudio de procesos de resolución de PAVOC, entre otros tipos de problemas. Fernando y yo decidimos que lo que estábamos desarrollando a partir del artículo de Fridman lo reservaríamos para su tesis doctoral (sin hacerlo público previamente, era el estilo de la época), y que para mi tesis doctoral no usaríamos los grafos de Fridman para el análisis de los procesos de resolución de PAVOC, aunque el proceso de resolución resultara ser de naturaleza algebraica, sino que mantendríamos la descripción del proceso mediante los diagramas de análisis y síntesis con forma de árbol. Esos fueron nuestros deseos, y así lo hicimos, hasta cierto punto[11], pese a que la tesis de Fernando se atrasó, arrastrada por su lucha contra la enfermedad, más de una década (Cerdán, 2008).

En mi tesis, que se atrasó sólo hasta 1993, aun representados con diagramas de análisis y síntesis, los análisis de los procesos de resolución de los PAVOC estaban pensados con los grafos[12]. Ahí también, por la presión de los datos, es decir, para poder dar cuenta con precisión de la estructura de los procesos de resolución de resolutores reales y concretos, decidí modificar de forma radical los grafos de Fridman, al introducir la relación de igualdad como una de las relaciones entre cantidades que era necesario representar. El caso concreto que me llevó a ello fue el proceso de resolución del problema del heno de la pareja de alumnos A y J, en el que vi cómo establecer la igualdad de dos cantidades que sólo diferían en su nombre resultaba ser un problema para los alumnos. Decidí pues que en la representación de su proceso de resolución no podía obviarse este hecho sin perder una parte sustancial de lo que había sido ese proceso de resolución. Así, en la representación de ese proceso de resolución del problema del heno (y en la de los de otros alumnos) mediante diagramas de síntesis incluí la relación de igualdad, indicando además que el estableci-

11. Hasta cierto punto, ya que de lo que desarrollamos a partir del artículo de Fridman hablamos en cursos, seminarios y grupos de trabajo, y un apunte de ello apareció en la tesis doctoral que realizó bajo mi dirección Alí Nassar, que se leyó antes que la de Fernando (Nassar, 2001).
12. De hecho, en mi tesis cambié los diagramas de dirección, convirtiéndolos en lo que llamé "diagramas de síntesis", por razones que se explican en Puig (1996b, p. 247).

miento de esa relación de igualdad era "el núcleo del proceso" (Puig, 1996b, p. 249)[13]. Al hacer esto, los grafos dejaron de ser trinomiales como los había concebido y estudiado Fridman, para pasar a poder tener aristas de dos, tres, cuatro o más vértices, correspondientes ya no sólo a las operaciones binarias de adición y substracción, que se representan con relaciones ternarias, sino a otras relaciones presentes en los problemas aritmético-algebraicos como la relación de igualdad, que es binaria, la relación de proporcionalidad, que es cuaternaria, relaciones entre varias partes y un todo, etcétera[14].

No es éste el lugar de exponer lo que desarrollamos estudiando, leyendo y transformando el artículo de Fridman. Lo esencial es que los grafos que elaboramos a partir de los de Fridman acabaron siendo una representación de la lectura analítica del enunciado de un problema verbal aritmético-algebraico y que en los propios grafos pudimos representar también la parte del método cartesiano que culmina en la escritura de una o unas ecuaciones. De ese modo la estructura del proceso de resolución de un problema concreto la podíamos representar ahora con un instrumento que materializaba el método cartesiano, método de resolución algebraico por excelencia; en vez de representarla, como habíamos hecho en PC91, con un instrumento que materializaba un método de resolución que, en nuestra versión, era aritmético, y que, como escribió Fernando en su tesis doctoral, nos había conducido a un "centramiento en el análisis de la incógnita del problema, del que [gracias a nuestra lectura del artículo de Fridman] fuimos progresivamente desprendiéndonos" (Cerdán, 2008, p. 64).

PC91 es pues un eslabón inicial en nuestro estudio de los problemas verbales aritmético-algebraicos y sus procesos de resolución, que se transformó y completó posteriormente con nuestras lecturas del artículo de Fridman, juntos y por separado. En su tesis doctoral (Cerdán, 2008), Fernando desarrolló profunda y extensamente el instrumento de los grafos, manteniendo

13. El protocolo de la actuación de A y J y su análisis puede verse en el apartado 5.4.7 de Puig (1996b), y, en el apartado 6.3.2.1, los diagramas de síntesis.

14. En cuanto se va más allá de los problemas que se traducen a ecuaciones de primer grado, aparecen otras relaciones. Alí Nassar, en su tesis doctoral (Nassar, 2001), decidió representar con aristas de dos vértices la relación derivada de la operación de elevar al cuadrado y su inversa, al considerar que sólo están presentes dos cantidades: la que se multiplica por sí misma y el resultado de esa multiplicación. Así es de hecho como la operación la conciben los alumnos, y también es así como se concibe en el álgebra árabe medieval la relación correspondiente entre la raíz y el tesoro, que son dos de las especies de números que constituyen los términos básicos del álgebra.

su carácter trinomial como Fridman[15], y lo usó para analizar la estructura de los problemas y actuaciones de alumnos. En Filloy, Rojano y Puig (2008) y Filloy, Puig y Rojano (2008), al usar el método cartesiano como modelo de competencia de la resolución algebraica de problemas aritmético-algebraicos, integré los grafos, con aristas de cualquier número de vértices, en el esquema teórico y metodológico de los Modelos Teóricos Locales, y en Puig (2010) los usé para analizar en detalle los mismos protocolos de resolución del problema del heno que en Puig (1996b) había analizado y representado con diagramas de síntesis por el motivo que he narrado. Esos mismos protocolos también los analiza Fernando Cerdán extensamente en su tesis doctoral entre las páginas 116 y 153, usando grafos trinomiales. Vale la pena comparar y combinar los tres análisis, tanto para entender mejor las actuaciones de los alumnos, como para entender mejor los distintos, aunque relacionados, instrumentos de análisis que están en juego en Puig (1996b), Cerdán (2008) y Puig (2010), todos ellos derivados de lo que se inició en PC91.

Veintitrés años después, PC91 es un documento que leo como un texto en el que están presentes también esos textos que le siguieron, y, ahora, mi lectura le da sentido a partir de ese intertexto, en este libro escrito en memoria de Fernando Cerdán, quien, como escribí en la dedicatoria de mi tesis doctoral, "me regaló todas sus ideas".

15. En el breve apartado 1.18 de la tesis, en que aborda lo que llama "grafos generales" es el único lugar en el que indica que los grafos pueden extenderse a relaciones entre más de tres cantidades y tener por tanto aristas de más de tres vértices, pero excluye explícitamente el caso de las relaciones de igualdad diciendo que "el límite inferior [tres] debe mantenerse ya que representa el mínimo número de cantidades inmerso en una relación aritmética" (Cerdán, 2008, p. 109), tomando la decisión pues de no considerar la relación de igualdad como una relación aritmética. Este asunto merecería ser discutido con más detalle en algún momento, ya que efectivamente la relación de igualdad entre cantidades es de naturaleza distinta a las relaciones entre cantidades que se derivan de operaciones binarias aritméticas como la adición o la multiplicación, o a las relaciones de proporcionalidad. Ahora bien, como ya hemos indicado en nota 14, hay otras operaciones aritméticas que cabe considerarlas como operaciones unarias, y, por tanto, las relaciones correspondientes son entre sólo dos cantidades.

2.4 REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Cerdán, F. (2008). *Estudios sobre la Familia de Problemas Aritmético-Algebraicos*. València: Servei de Publicacions de la Universitat de València.

Filloy, E. y Rojano, T. (1985). Operating the unknown and models of teaching (A clinical study with 12-13 year olds with high proficiency in pre–algebra). In S. K. Damarin and M. Shelton (Eds.) *Proceedings of the Seventh Annual Meeting for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter* (pp. 75–79). Columbus, OH

Filloy, E., Puig, L., y Rojano, T. (2008). El estudio teórico local del desarrollo de competencias algebraicas. *Enseñanza de las Ciencias*, *26*(3), 327-342.

Filloy, E., Rojano, T., y Puig, L. (2008). *Educational Algebra. A Theoretical and Empirical Approach*. New York: Springer.

Foucault, M. (1969). *L'archéologie du savoir*. Paris: Gallimard.

Fridman, L. M. (1990). Los grafos trinomiales como metalenguaje de los problemas. *Matemáticas. Revista del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora*, *17-18*, 51-59.

Nassar, A. (2001). *El Efecto de Enseñar Algunas Estrategias de Resolución de Problemas en la Actuación de los Alumnos del Nivel 3º de Secundaria al Resolver Problemas Verbales Algebraicos en Gaza (Palestina)*. Tesis doctoral. Universitat de València.

Puig, L. (1996a). Pupils' Prompted Production of a Medieval Mathematical Sign System. In L. Puig & Á. Gutiérrez (Eds.) *Proceedings of the Twentieth International Conference on the Psychology of Mathematics Education. Vol. 1.* (pp. 77-84) Valencia: PME.

Puig, L. (1996b). *Elementos de resolución de problemas.* Granada: Comares.

Puig, L. (2003a). Signos, textos y sistemas matemáticos de signos. En E. Filloy (Ed.) *Matemática Educativa: aspectos de la investigación actual* (pp. 174-186). México, DF: Fondo de Cultura Económica / CINVESTAV.

Puig, L. (2003b). Historia de las ideas algebraicas: componentes y preguntas de investigación desde el punto de vista de la matemática educativa. En E. Castro, P. Flores, T., Ortega, L. Rico y A. Vallecillos (Eds.) *Investigación en Educación Matemática. Actas del Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 97-108). Granada: Universidad de Granada.

Puig, L. (2006). Vallejo perplejo. En A. Maz, M. Torralbo y L. Rico (Eds.) *José Mariano Vallejo, el matemático ilustrado. Una mirada desde la educación matemática* (pp. 113-138). Córdoba: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Córdoba.

Puig, L. (2010). Researching (algebraic) problem solving from the perspective of Local Theoretical Models. *Procedia Social and Behavioral Sciences*, 8, pp. 3-16.

Puig, L. y Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares*. Madrid: Síntesis.

Puig, L. y Cerdán, F. (1991). Acerca del carácter aritmético o algebraico de los problemas verbales. En E. Filloy y T. Rojano (Eds.), *Memorias del Segundo Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática*, (pp. 35-48). Cuernavaca, México: PNFAPM.

Puig, L., & Rojano, T. (2004). The history of algebra in mathematics education. In K. Stacey, H. Chick, & M. Kendal (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra: The 12th ICMI study* (pp. 189-224). Boston / Dordrecht / New York / London: Kluwer Academic Publishers.

Wagner, S. & Kieran, C. (1989). An agenda for research on the teaching and learning of algebra. In S. Wagner and C. Kieran (Eds.) *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra* (pp. 220–237). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.