

DOS ERRORES FAMOSOS EN LA *ARITHMETICA ALGEBRATICA* DE MARCO  
AUREL RECONSIDERADOS

Luis Puig  
Departamento de Didáctica de las Matemáticas  
Universitat de València Estudi General

Puig, Luis. (2018). Dos errores famosos en la *Arithmetica Algebratica* de Marco Aurel reconsiderados. En Dolores Ruiz-Berdún (Ed.) *Ciencia y Técnica en la Universidad*, Vol. II (pp. 215-228). Alcalá de Henares: SEHCYT y Universidad de Alcalá. ISBN 978-84-16978-81-6 (del Vol. II) 978-84-16978-79-3 (obra completa)



## DOS ERRORES FAMOSOS EN LA ARITHMETICA ALGEBRATICA DE MARCO AUREL RECONSIDERADOS\*

Luis PUIG  
Universitat de València Estudi General

### Introducción

Rey Pastor ya señaló en el texto que escribió para que se leyera en 1913 en la apertura del curso 1913-1914 de la Universidad de Oviedo, que tituló *Los matemáticos españoles del siglo XVI*<sup>1</sup>, la existencia de un par de errores en la *Arithmetica Algebraica* de Marco Aurel<sup>2</sup>, uno de los cuales calificó de «grave error» y examinó brevemente en una nota a pie de página<sup>3</sup>, y que estos errores fueron copiados por Juan Pérez de Moya y Antich Rocha. Por esta mención de Rey Pastor esos errores han adquirido una cierta fama y han sido mencionados o analizados en los más de cien años transcurridos desde entonces en varias ocasiones. Al «grave error» se refirieron Jaume Paradís y Antoni Malet en 1984<sup>4</sup> para apoyar que

---

\* Este trabajo ha contado con el apoyo de los proyectos EDU2015-69731-R, MINECO / FEDER y GVPROMETEO2016-143.

<sup>1</sup> REY PASTOR, Julio (1913) *Discurso leído en la solemne apertura del curso académico de 1913 á 1914. Los matemáticos españoles del siglo XVI*. Oviedo: Establecimiento Tipográfico de Antonio P. Santamarina, sucesor de Adolfo Biun. Años después Julio Rey Pastor publicó en su Biblioteca Scientia una versión del discurso «considerablemente ampliado, sin emprender la reforma del estilo sobrado juvenil, pero omitiendo alguna frase que pudiera parecer estridente y suprimiendo la parte ocasional, alusiva al acto en que fué leído»: REY PASTOR, Julio (1926) *Los matemáticos españoles del siglo XVI*. Toledo: Imprenta de A. Medina, p. 5. La parte que le dedica a Marco Aurel sólo se diferencia por la composición del texto y la inclusión en una nota a pie de página de la aprobación de Eneström a la corrección que en ella Rey Pastor hace a Cantor, aprobación que es posterior a la publicación del discurso en 1913.

<sup>2</sup> AUREL, Marco (1552) *Libro Primero, de Arithmetica Algebraica*. Valencia: En casa de Ioan de Mey.

<sup>3</sup> Del otro error sólo dice, tras examinar el «grave error», que «También acompaña a éste, otro error relativo al caso en que se debe sumar o restar el radical»: REY PASTOR, Julio (1913) *op. cit.*, nota 1, p. 37. En nuestro análisis, llamaremos «primer error» a ese «otro error» y «segundo error» al que Rey Pastor califica de «grave», porque en ese orden aparecen en el texto de Marco Aurel.

<sup>4</sup> MALET, Antoni i PARADÍS, Jaume (1984) *Els orígens i l'ensenyament de l'àlgebra simbólica (1478-1545). Vol. I*. Barcelona: Publicacions de l'Institut de Ciències de

«Marco Aurel no era un matemàtic de primera ni de segona fila»<sup>5</sup>; Vicente Meavilla, en su comunicación a la sección de Historia de las ideas algebraicas del Tercer Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática, celebrado en Valencia en 1991, describió ese error grave y lo explicó<sup>6</sup>, y, más recientemente, Javier Docampo lo ha examinado en su tesis doctoral<sup>7</sup>, defendida en 2004. Finalmente, Francisco Infante, en su trabajo de fin máster defendido en 2010, examina ambos errores<sup>8</sup>.

El hecho de que Rey Pastor mencionara estos errores de Marco Aurel y su difusión los empujó hacia la fama, pero además esos errores reúnen unas características que hacen que valga la pena estudiarlos. En primer lugar, no son errores que aparezcan simplemente enunciados como un hecho, sin ponerse en juego en ningún momento. Por el contrario, Marco Aurel usa las dos reglas erróneas en sendos ejemplos y para resolver un problema, lo que indica que su enunciado erróneo no responde a una falta de atención o una errata, sino a un conocimiento asentado. Además, y esto es lo realmente interesante, como las reglas erróneas producen al aplicarlas resultados incorrectos, éstas se acompañan de otras que dan el resultado correcto a partir del incorrecto, a pesar de ser igualmente erróneas, lo que refuerza aún más el que sean índice de un conocimiento (erróneo) firmemente asentado<sup>9</sup>.

---

l'Educació de la Universitat de Barcelona. El resto de los volúmenes no llegaron a publicarse en catalán.

<sup>5</sup> *Ibidem*, p. 127. El otro error no lo mencionan.

<sup>6</sup> MEAVILLA, Vicente (1993) «Una aproximación al “Libro primero de Arithmetica Algebraica” de Marco Aurel». En Eugenio FILLOY, Luis PUIG y Teresa ROJANO (Eds.) *Memorias del Tercer Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática. Historia de las ideas algebraicas*: 65-95. México, DF: CINVESTAV. Vicente Meavilla no advierte el otro error que indica Julio Rey Pastor, pero sí un tercer error, que no trataremos aquí.

<sup>7</sup> DOCAMPO, Javier (2004) *La formación matemática del mercader catalán 1380-1521. Análisis de fuentes manuscritas*. Tesis doctoral. Universidade de Santiago de Compostela, p. 554. Javier Docampo tampoco advierte la existencia del otro error.

<sup>8</sup> INFANTE, Francisco (2010) *Un estudio de las demostraciones de los algoritmos de solución de las formas canónicas de las ecuaciones de segundo grado en al-Khwārizmī, Abū Kāmil, Marc Aurel, Juan Pérez de Moya y Pedro Nunes*. Trabajo Fin de Máster del Máster de Investigación en Didácticas Específicas, especialidad de Matemáticas. Universitat de València. Francisco Infante analiza el error grave en la página 94, y el otro error en la 93.

<sup>9</sup> Este fenómeno está claramente establecido en el caso de las actuaciones de alumnos que están aprendiendo algoritmos para resolver clases de problemas y está explicado en la conocida como «Teoría de la reparación»: BROWN, John S. y VAN LEHN, Kurt (1980) «Repair Theory: A Generative Theory of Bugs in Procedural Skills». *Cognitive Science*, 4: 379-426: «many bugs can best be explained as

Por otro lado, también resulta pertinente su estudio ya que esos errores no sólo están presentes en el texto de Marco Aurel sino que fueron copiados por otros autores<sup>10</sup>, y que uno de los libros en que aparecen, la *Arithmetica Practica y Especulativa* de Juan Pérez de Moya, fue libro de texto recomendado durante años y fue reeditado con fines comerciales hasta 1798.

### Marco Aurel y su obra

De la vida de Marco Aurel sabemos muy poco. El que fuera alemán sólo lo sabemos porque él se presenta como «Marco Aurel Aleman, maestro de escuela en Valencia» en la portada de su otro libro conocido<sup>11</sup>, porque en la portada de la *Arithmetica Algebratica* añade tras su nombre «natural Aleman» o porque termina sus libros con lemas en alemán<sup>12</sup>. Sabemos también que fue «mestre de escriure e contar» y tuvo asignada una cámara del Estudi General hasta final del curso 1545-1546 porque así figura en los «Querns de Provisions» del Archivo Municipal de Valencia, y que renunció formalmente a dicha cámara el 30 de julio de 1546 «al ausentarse de la ciudad»<sup>13</sup>. El libro *Arithmetica Algebratica* lo publica en Valencia después de esa fecha, en 1552, y ya en el prólogo del *Tratado* había anunciado su propósito de escribirlo<sup>14</sup>, pero no tenemos ninguna otra noticia de si volvió a residir en Valencia, ni de si trabajó en Valencia posteriormente.

Marco Aurel indica en la página dedicada «Al Lector» que su obra la ha «partido en tres partes» de la que la publicada es la primera. Sin embargo, no tenemos más noticia de que las partes segunda y tercera llegara siquiera a escribirlas que la hipótesis que hace Juan Vernet en una breve nota<sup>15</sup> de la existencia de una traducción al árabe del libro de

---

“patches” derived from repairing a procedure that has encountered an impasse while solving a particular problem»: *op. cit.*, p. 381-382.

<sup>10</sup> Además de los casos de Juan Pérez de Moya y Antich Rocha, que señaló Julio Rey Pastor, los errores también fueron copiados por Juan Baptista Tolra.

<sup>11</sup> AUREL, Marco (1541) *Tratado muy util y provechoso para toda manera de tratantes y personas aficionadas al contar: de reglas breves de reducciones de monedas y otras reglas tanto breves como compendiosas*. Valencia: En el Molino de Rovella, en casa de Francisco Díaz Romano.

<sup>12</sup> «Got wirts wenden» al final del *Tratado* y «Gedult in Armut» al final de la *Arithmetica Algebratica*.

<sup>13</sup> Archivo Municipal de Valencia AMV QP, B-31, f. s/n.

<sup>14</sup> «E con esto ceso: no de rogar a dios por salud de todos / ni menos de escribir el libro dicho : que tratara de las reglas de Algibra : que en vulgar castellano se entiende por arte mayor / o regla de la cosa»: AUREL, Marco (1541), *op. cit.*, nota 11, fo. A3v.

<sup>15</sup> VERNET, Juan (1974) La introducción de la ciencia occidental en el mundo árabe. En: BARRAL, José M. (ed.) *Orientalia Hispanica sive Studia F. M. Pareja octogenario dicata*, vol. I: 645-646. Leiden: Brill.

Marco Aurel que contendría las tres partes: «si el texto árabe que nos conserva estas noticias es exacto, puede creerse que Aurel publicó las dos últimas partes de su obra, de las cuales no parece quedar constancia en las bibliotecas españolas»<sup>16</sup>.

Además de menciones y otros estudios más parciales, una presentación descriptiva de la parte de álgebra del libro puede verse en el texto *Una aproximación al «Libro primero de Arithmetica Algebratica» de Marco Aurel* de Vicente Meavilla<sup>17</sup>; un estudio del sistema de signos, la concepción de las especies de números, la clasificación de las ecuaciones y los algoritmos para resolverlas aparece desarrollado en las páginas 79 a 96 del trabajo de Francisco Infante<sup>18</sup>, y una caracterización del libro como componente de un «Arte Mayor Español» se argumenta en el texto *Spanish «Arte Mayor» in the Sixteenth Century* de Maria Rosa Massa-Esteve<sup>19</sup>.

### **El contexto en que aparecen los errores y el primer error**

Ambos errores aparecen en el capítulo dedicado a la «sexta igualación». Marco Aurel clasifica las ecuaciones polinómicas para las que presenta algoritmos de solución en ocho formas canónicas, que él llama «igualaciones» y que son generalizaciones de los seis tipos de ecuaciones cuadráticas que ya están en el álgebra de al-Khwārizmī (s. IX). La generalización sigue la misma idea que usó al-Karajī, algo más de un siglo después: ver las especies de números que se usan en los cálculos como elementos de una proporción continua<sup>20</sup> y expresar entonces las formas canónicas generalizadas usando los términos «el menor», «el mayor» y «el mediano», propios de las proporciones continuas.

Marco Aurel presenta las mismas ocho formas canónicas que Rudolff, aunque lo oculte en la introducción, en la que ni siquiera menciona a Rudolff, y en la que justifica el haber decidido que su número sea 8 con una fórmula mágica:

Agora te quiero mostrar 8 reglas, para las 8 ygualizaciones en las cuales estan fundadas las respuestas de nuestra regla, de la cosa, o arte mayor: dado

<sup>16</sup> *Ibidem*, p. 646.

<sup>17</sup> MEAVILLA, Vicente (1993), *op. cit.*, nota 6.

<sup>18</sup> INFANTE, Francisco (2010), *op. cit.*, nota 8, p. 79-96.

<sup>19</sup> MASSA-ESTEVE, Maria Rosa (2012) «Spanish “Arte Mayor” in the Sixteenth Century». En: ROMMEVAUX, Sabine; SPIESSER, Maryvonne y MASSA-ESTEVE, Rosa Maria (Eds.) *Pluralité de l’algèbre à la Renaissance*: 103-126. París: Honoré Champion Éditeur.

<sup>20</sup> «El bien (*māl*) del bien que es el producto del cubo por la raíz, que es lo mismo que multiplicar el bien por el bien, porque la raíz, el bien y el cubo forman una proporción» [al-KARAJI (1985) *Kitāb Al Fakhrī*. En: SA’IDAN, Ahmad Salīm (Ed.) *Historia de las ciencias del álgebra en el mundo árabe* [en árabe]: 95-308. Kuwait: Consejo Nacional para la Cultura, Artes y Ciencias, p. 98].

que algunos ponen 6, como fray Lucas del Burgo: y otros 10, como Albertucio de Saxonia. A mi empero me ha parecido tomar el medio arithmetico, entre 10, y 6, que es 8: pues por ellas entenderas las 6 de fray Lucas y por las mismas alcançaras las 10 de Albertucio. Las 4 son simples, de 2 quantidades : y las otras 4 compuestas, de 3 quantidades, como aqui las veras de una en una, y primero las simples<sup>21</sup>.

La ausencia de mención a Rudolff y el recurso a un argumento numerológico como justificación de que sean ocho las que él presenta y no porque está siguiendo a Rudolff, queda aún más en evidencia cuando se compara la forma en que están enunciadas con la forma en que lo hace Rudolff, que coincide casi palabra por palabra.

Las ocho formas canónicas, escritas en el lenguaje simbólico actual del álgebra son las que presentamos en la tabla 1, en la que hemos incluido también la generalización de las formas canónicas simples que Marco Aurel presenta en una nota.

	Simple		Compuestas
1ª	$ax^{m+1} = bx^m$	5ª	$ax^{m+2} + bx^{m+1} = cx^m$
2ª	$ax^{m+2} = bx^m$	6ª	$ax^{m+2} + cx^m = bx^{m+1}$
3ª	$ax^{m+3} = bx^m$	7ª	$bx^{m+1} + cx^m = ax^{m+2}$
4ª	$ax^{m+4} = bx^m$	8ª	$ax^{m+2n} + bx^{m+n} = cx^m$ $ax^{m+2n} + cx^m = bx^{m+n}$ $bx^{m+n} + cx^m = ax^{m+2n}$
Nota	$ax^{m+n} = bx^m$		

**Tabla 1.** Formas canónicas.

La sexta, en la que aparecen los errores, Marco Aurel la enuncia así:

Quando se yqualaren tres quantidades, o diferencias de nombres igualmente distantes, y que no falte ninguna entre medias: desta manera que la mayor, y menor se ygualen a la mediana, también partiras el menor, y mediano cada una por si, por la mayor. Y multiplica la mitad del quociente del mediano en si mesma, y del dicho producto, quitaras el quociente del menor,  $\sqrt{\quad}$  de la resta y +, o -, la mitad del quociente del mediano, será la valor de una  $\mathbf{12}$ <sup>22</sup>.

Lo que equivale a la fórmula

$$\sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}} \pm \frac{b}{2a}$$

<sup>21</sup> AUREL, Marco (1552), *op. cit.*, nota 2, fo. 77v.

<sup>22</sup> *Ibidem*, fo 78v-fo 79r.

que es errónea. El algoritmo correcto, que ya aparece en el álgebra de al-Khwārizmī con la misma forma, aunque allí esté enunciado para  $m = 0$  y  $a = 1$ , es

$$\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}}$$

Marco Aurel ha invertido el sentido en que hay que realizar la última de las operaciones del algoritmo, que es doble, adición y substracción. Esa inversión no tiene consecuencia alguna en el caso de la adición, que es conmutativa, pero es errónea en el caso de la substracción.

Si Marco Aurel se hubiese limitado a enunciar el algoritmo erróneo, podríamos pensar que fuera una errata o una equivocación que no correspondiera a una idea errónea, pero Marco Aurel ilustra el algoritmo usándolo en un ejemplo inmediatamente después de enunciarlo y, unas páginas más adelante, resuelve con él un problema.

El ejemplo es la ecuación  $2x^2 + 32 = 20x$  ( $2x^2 + 32 = 20x$ ), a la que aplica el algoritmo para resolverla:

Parte como dicho tengo, y verna el quociente del menor ser 16, y el del mediano 10, cuya metad es 5, multiplicado en si, vernan 25, de los cuales quita 16, que es el quociente del menor, y quedaran 9:  $\sqrt{9} = 3$ . Digo  $3 - \sqrt{9}$ , que es 2, sera la valor de una  $x$ .<sup>23</sup>

Como puede verse, la aplicación del algoritmo erróneo le da un resultado que Marco Aurel sabe que es erróneo,  $\sqrt{9} - 5$ , pero, en vez de inferir de ello que el algoritmo tiene que ser erróneo, lo que Marco Aurel hace no es corregir el algoritmo sino ponerle un parche, enunciar otra regla que se aplica al resultado incorrecto, para obtener el resultado correcto a partir de él, reparando así el error. En la resolución del ejemplo, Marco Aurel se ha limitado, al obtener el resultado incorrecto, a rectificarlo simplemente con un «Digo  $3 - \sqrt{9}$ » que corrige el  $\sqrt{9} - 5$  obtenido, pero a continuación eleva lo que acaba de hacer a la categoría de regla enunciándolo en general:

Nota, quando te verna como en esta sexta ygalacion viene, y agora vino a dezir  $\sqrt{9} - 5$ . Bien vees que no puede decir  $3 - 5$ , seria imposible de 3, sacar 5. Por lo cual lo has siempre de bolver, y poner la cantidad mayor primero. Assi  $3 - \sqrt{9}$ , como en el partir de binominos has visto<sup>24</sup>.

El final de ese párrafo, en que se enuncia la regla que parchea el error, «como en el partir de binominos has visto», intenta justificar lo arbitrario de la regla invocando otra situación para la que Marco Aurel ha enunciado una regla similar en la forma, pero que, en la otra situación, tiene sentido.

<sup>23</sup> *Ibidem*, fo 79r.

<sup>24</sup> *Ibidem*, fo 79r.



La situación a la que Marco Aurel reenvía es una que ha abordado en el capítulo décimo que «Trata de binominos y residuos: y de sus definiciones, declaracion, y operación»<sup>25</sup>, y es la siguiente:

Mas alguna vez te podra venir el partidor ser binomino, o residuo, y multiplicado con su contrario venga que se aya de sacar el mayor del menor, lo qual es imposible, En tal caso podras lo bolver al reves: como  $\sqrt{3} + 3$  ser el partidor: su residuo es  $\sqrt{3} - 3$ : multiplicando el uno con el otro vernan  $3 - 9$  lo qual es imposible: por tanto lo podras bolver, y verna a ser  $3 + \sqrt{3}$ : y su residuo  $3 - \sqrt{3}$ : y multiplicando el uno con el otro vernan  $9 - 3$ , que es 6: este sera tu partidor y la suma partidera sea, como dicho tengo la que fuere: multiplicado con el residuo del partidor, que es  $3 - \sqrt{3}$ , y en lo de mas haras como arriba has visto.<sup>26</sup>

En ese caso de división de radicales, lo que se hace con el denominador se compensa en el numerador y ese «bolver» tiene sentido (aunque se introduzca por el horror a lo negativo). Pero en el caso del algoritmo carece totalmente de sentido, aunque se obtenga el resultado correcto. Marco Aurel parece no preocuparse demasiado por el sentido de las reglas, sino sólo por que el resultado que se obtenga sea el correcto.

El único problema en que Marco Aurel usa la regla errónea y el parche para obtener el resultado correcto aparece en el capítulo vigésimoprimer, en el que Marco Aurel presenta 19 problemas que se resuelven por la sexta igualación. Ese problema lleva el número 14 y su enunciado es el siguiente:

Dos hacen compañía: el p<sup>o</sup> puso 7: el 2<sup>o</sup> gano 18, cabal y ganancia junto, es 48. Demando, quanto gano el primero, y que puso el 2<sup>o</sup>.<sup>27</sup>

De forma similar a como lo hace en el ejemplo de uso del algoritmo, Marco Aurel aplica el algoritmo incorrecto y, al obtener el resultado erróneo, escribe «Buelto es...» e invierte el orden de la substracción obteniendo 9, uno de los resultados correctos. Después añade que también se puede sumar en vez de restar y obtiene el otro resultado «que tambien verna bien»<sup>28</sup>.

En los problemas 1-13 y 15-18 no se da el caso de que tenga que aplicar el parche al algoritmo, porque Marco Aurel no tiene que hacer la doble operación de sumar y restar para obtener las dos soluciones, sino que le basta con hacer la de adición. En el problema 19, que sí se da el caso, no lo resuelve traduciéndolo a ecuaciones sino a proporciones y no usa explícitamente su regla para resolver la sexta igualación, aunque lo

---

<sup>25</sup> *Ibidem*, fo 55v.

<sup>26</sup> *Ibidem*, fo 60v.

<sup>27</sup> *Ibidem*, fo 129v.

<sup>28</sup> *Ibidem*, fo 129v.

que hace equivale a usar no su regla errónea, sino la correcta. Veremos de inmediato un rasgo que comparten los problemas 14 y 19.

### El segundo error y su parche

Este error, que es el que Julio Rey Pastor calificó de «grave», aparece en un «Aviso muy notable» que está al final del capítulo dedicado a la sexta igualación.

Quando el quociente del menor fuere mas que la potencia de la mitad del quociente del mediano, de manera que no puedas quitar (como lo manda la regla) el quociente del menor, de la potencia de la mitad del quociente mediano, summar lo has, y su rayz quadrada, y + la mitad del quociente mediano, sera la valor de la  $\mathfrak{z}$ : mas tal valor, sera menos o deuda.

Ejemplo. Dame un numero que añadiendo al duplo de su potencia 80 sea todo 12 veces tanto como el numero demandado, sera la ygalacion esta:  $2\mathfrak{z} + 80\mathfrak{z}$ , ygual a  $12\mathfrak{z}$ : verna  $1\mathfrak{z}$  a valer  $-10\mathfrak{z}$ . Pruevolo:  $2\mathfrak{z}$ , valen  $-200$ ; juntale 80, quedaran 120  $-$ . Tanto valen  $12\mathfrak{z}$ . Mira bien en ello<sup>29</sup>.

Se puede demostrar que la combinación del error en el algoritmo, el cambio de más por menos en el discriminante, y su parche, la consideración de que el cuadrado de un negativo es negativo, que es igualmente erróneo, se compensan y el resultado que se obtiene es correcto, aunque de nuevo lo que se está haciendo carece de sentido.

A diferencia de lo que sucede con el primer error, no hay ningún problema, de los 19 del capítulo vigésimo primero, al que se aplique este caso, con lo que el aviso queda en el texto de Marco Aurel sin aplicación alguna (y, como veremos de inmediato, siguió quedando así en los textos que le siguieron). Los dos errores de Marco Aurel están ligados al horror a lo negativo y sus parches se despreocupan por el sentido de las operaciones que se realizan atendiendo sólo a que conduzcan al resultado correcto.

### El primer error como producto de una lectura errónea de *Die Coss* de Rudolff

No tenemos noticia de la existencia de estos errores en textos anteriores al de Marco Aurel de los que él pueda haberlos tomado. A la espera de que podamos encontrar alguno, vamos a ver cómo, leyendo mal la regla para la sexta igualación que presenta Christoff Rudolff en *Die Coss*<sup>30</sup>, se

<sup>29</sup> *Ibidem*, fo 79r-79v.

<sup>30</sup> Un facsímil de la edición original de *Die Coss*, RUDOLFF, Christoff (1525) *Behend vnnd Hubsch Rechnung durch die kunstreichen regeln Algebre so gemeinlicklich die Coss genent werden*. Vuolfius Strassburg; Cephaleus Joanni Jung, se encuentra entre las páginas 161 a 264 de KAUNZNER, Wolfgang y RÖTTEL, Karl (2006) *Christoff Rudolff aus Jauer in Schlesien: Zum 500. Geburtstag eines bedeutenden Cossisten und Arithmetikers, der aus diesem seinerzeit hoheitlich zur Krone von Böhmen*

puede generar el texto de Marco Aurel, lo que puede tomarse como una hipótesis de cómo el error pudo generarse.

Marco Aurel no hace ninguna referencia a Rudolff en su libro. Los únicos autores a los que menciona son Euclides, Boecio, Pitágoras y Fray Joan de Ortega en la parte de aritmética y Guillelmo de Lunis, Fray Lucas del Burgo y Albertucio de Sajonia en la parte de álgebra. A Guillelmo de Lunis lo menciona como traductor de al-Khwārizmī al italiano. Ya hemos visto que los nombres de Luca Pacioli y Alberto de Sajonia aparecen precisamente para introducir el número de formas canónicas que va a considerar. Ni el texto de la forma canónica de Luca Pacioli que se corresponde con la sexta de Marco Aurel (sin generalizar) ni el conjunto de su tratamiento de las formas canónicas se parece lo suficiente como para que Marco Aurel lo haya tomado de él. Y no conocemos obra alguna de Alberto de Sajonia en la que aparezca.

<b>Rudolff, <i>Die Coss</i></b>	<b>Marco Aurel, <i>Arithmetica Algebraica</i></b>
<i>Die Sechst regel Werden einander vergleicht drei quantiteten natürlicher ordnung also das die kleiner vnd groesser samentlich gleich gesprochen werden der mittern</i>	Quando se yqualaren tres cantidades, o diferencias de nombres igualmente distantes, y que no falte ninguna entre medias: desta manera que la mayor, y menor se yqualen a la mediana
<i>Diuidir die kleiner vnd mitter ye eine in sunderheit durch die groesser quantitet. Multiplicir des mittern quocients halbenteyl in sich selbst quadrate. Vom quadrat subtrahir den quocient der kleinem quantitet.</i>	tambien partiras el menor, y mediano cada una por si, por la mayor. Y multiplica la mitad del quociente del mediano en si mesma, y del dicho producto, quitaras el quociente del menor,
<i>Radice quadratam des uebrigen gib oder nim dem halbenteyl des mittern quocients das collect oder rest wirt anzezeigen den werdt 12<sup>31</sup></i>	√ de la resta y +, o -, la mitad del quociente del mediano, sera la valor de una 12.

**Tabla 2.** La sexta igualación.

Sin embargo, si examinamos el libro *Die Coss* de Rudolff, no sólo Marco Aurel presenta las mismas ocho formas canónicas que presenta Rudolff, sino que la expresión de las reglas para cada una de las formas canónicas es muy similar y los problemas que las acompañan son idénticos en su mayoría. En el caso de la regla para la sexta igualación, que es la que Marco Aurel enuncia erróneamente, la similitud entre su expresión por

*gehörenden Landesteil stammt.* Eichstätt: Polygon-Verlag, que también lleva una transcripción comentada. Citamos el texto de Rudolff de esta edición.

<sup>31</sup> KAUNZNER, Wolfgang y RÖTTEL, Karl (2006), *op. cit.*, nota 30, p. 117 (transcripción) y p. 248 (facsimil).

Rudolff y por Marco Aurel queda patente si se comparan ambos textos en paralelo, como hacemos en la tabla 2.

La frase clave, la que contiene el error de Marco Aurel, es, en el texto de Rudolff, «*Radicem quadratam des uebrigen gib oder nim dem halbenteyl des mittern quocients das collect oder rest wirt anzeygen den werdt 12*», que Marco Aurel escribe « $\sqrt{\quad}$  de la resta y +, o -, la mitad del quociente del mediano sera la valor de una 12».

*Radicem quadratam* está en acusativo y *dem halbenteyl* en dativo, pero el traductor parece hacer caso omiso de ello y traducir el texto leyéndolo secuencialmente sin tener en cuenta las relaciones entre las palabras, como tantas veces hemos visto hacer erróneamente a los alumnos al traducir un enunciado verbal a una expresión aritmética o algebraica. Una traducción adecuada sería «La raíz cuadrada de lo que queda, añadida o quitada de la mitad del cociente del mediano, la suma o la resta mostrará el valor de una [cosa]»; traducción que no contiene el error de Marco Aurel, y que es equivalente a la regla algorítmica clásica que está en al-Khwārizmī, simplemente al cambiar «y + o -» por «añadida o quitada de».

Marco Aurel	Christoff Rudolff
1	1
2	3
3	6
4	7
5	8
6	9
7	10
8	11
9	12
10	13
11	14
12	15
13	17
14	no está
15	20
16	22
17	25
18	26
19	no está

**Tabla 3.** Correspondencia entre los problemas.

Si el texto de la regla de Marco Aurel se puede derivar del texto de Rudolff por el hecho de que sean las mismas ocho igualaciones y la expresión sea similar (mal leída en el caso de la sexta), aún tenemos otra indicación de que Marco Aurel conoció el texto de Rudolff o uno derivado de él: si comparamos los problemas que presenta Marco Aurel para la sexta

igualación con los de Rudolff, encontramos que 17 de los 19 problemas de Marco Aurel están en el texto de Rudolff. En la tabla 3 mostramos con qué problemas del libro de Rudolff se corresponden los de Marco Aurel.

Y los que no están son precisamente el 14 y el 19 de Marco Aurel, los dos que antes hemos señalado como el único problema en que usa la regla errónea y su parche (el 14), y el que lo resuelve sin escribir una ecuación ni mencionar la regla (el 19). Este hecho nos induce a pensar que Marco Aurel, leyera o no *Die Coss* directamente, estuvo influido por otro texto que contendría el problema 14, y la regla errónea y su parche.

### La difusión de los errores

Ya hemos indicado que Julio Rey Pastor señaló, en su discurso de 1913, que los errores fueron copiados por Juan Pérez de Moya y Antich Rocha, cuyos libros copian extensamente el de Marco Aurel, y hemos indicado además que también lo hizo Juan Baptista Tolra. Más concretamente, Juan Pérez de Moya los copia en su *Compendio*<sup>32</sup> y los pasa a su *Arithmetica*<sup>33</sup>, pero corrige el primer error al integrar la *Arithmetica* en su *Tratado*<sup>34</sup>, como veremos de inmediato, donde elimina también el párrafo en que aparece el segundo error. Antich Rocha también los copia en su *Arithmetica*<sup>35</sup>, e incluso es más fiel a Marco Aurel porque el único problema que plantea para resolver con la sexta igualación es el segundo de Marco Aurel. Juan Bautista Tolra en su *Algebra*<sup>36</sup> es aún más literal en su copia de Marco Aurel (siendo además el único que usa los caracteres cósicos) y los problemas que plantea son los dos primeros de Marco Aurel, pero sólo incluye el primero de los errores. Ahora bien, a excepción de Tolra, que incluye el ejemplo que ilustra el primer error, en el resto de los libros los errores sólo están enunciados, ni se ilustran en un ejemplo, ni se usan para resolver problemas, porque los problemas que se plantean no están en el caso de que la regla errónea produzca un resultado erróneo.

Cabe pensar que al aparecer los errores en los libros de Juan Pérez de Moya y Antich Rocha sólo en el enunciado de las reglas, sin usarse ni en ejemplo ni problema alguno, es más fácil que pasaran inadvertidos. La tabla 4 resume lo que aparece y lo que no en cada uno de los libros.

<sup>32</sup> PÉREZ DE MOYA, Juan (1558) *Compendio de la regla de la cosa o arte mayor*. Burgos: Martín de Bitoria.

<sup>33</sup> PÉREZ DE MOYA, Juan (1562) *Arithmetica practica y speculativa*. Salamanca: Mathias Gast.

<sup>34</sup> PÉREZ DE MOYA, Juan (1573) *Tratado de Mathematicas*. Alcalá de Henares: Juan Gracian.

<sup>35</sup> ROCHA, Antich (1564) *Arithmetica*. Barcelona: Claudio Bornat.

<sup>36</sup> TOLRA, Juan Baptista (1619) *Tratado de la arte mayor de Arismetica, llamada Algebra, o Regla de la Cosa*. Tarragona: Gabriel Roberto. Este libro apareció como apéndice de la traducción al castellano que hizo Tolra de la *Arismetica* de Juan Ventallol, pero con portada, pie de imprenta y numeración independiente.

	1er error	ejemplo	parche	problema	2º error	parche
Pérez de Moya <i>Compendio</i>	sí	no	no	no	sí	no
Pérez de Moya <i>Arithmetica</i>	sí	no	no	no	sí	no
Rocha <i>Arithmetica</i>	sí	no	no	no	sí	no
Pérez de Moya <i>Tratado</i>	no	no	no	no	no	no
Tolra <i>Algebra</i>	sí	sí	sí	no	no	no

**Tabla 4.** Presencia de los errores.

#### **La corrección del primer error por Juan Pérez de Moya en el *Tratado* y la pervivencia de los errores**

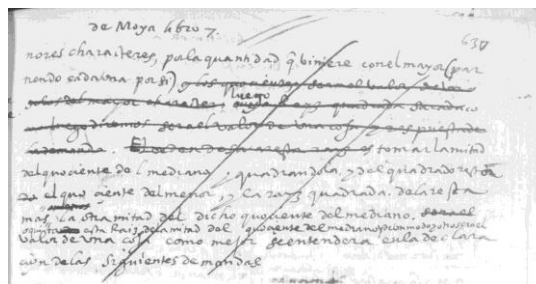
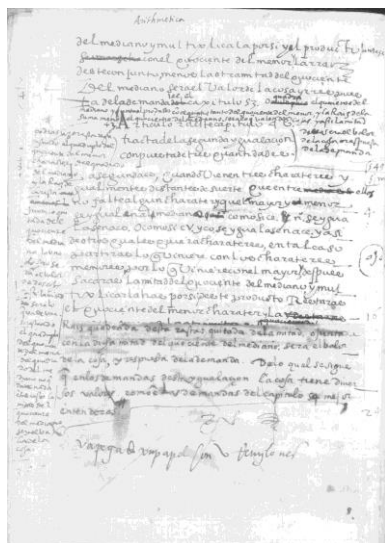
La historia de estos errores en los libros de Juan Pérez de Moya tiene un interés suplementario, porque no los copia una única vez. Lo hace primero en el *Compendio*, basado en gran medida en el libro de Marco Aurel, pero cuatro años después, compone su libro de mayor éxito comercial, la *Arithmetica practica y especulativa*, cortando y pegando y retocando ligeramente libros anteriores suyos entre los que está el *Compendio*, y reitera los errores al conservar literalmente idéntica la parte del libro que los contiene. Otros once años después, al abordar el *Tratado*, su obra más ambiciosa, vuelve a utilizar la misma estrategia de cortado, pegado y retoque de libros anteriores, pero, en esta ocasión, se percata de estos dos errores y los enmienda.

Además, tenemos la suerte de que exista un manuscrito del original de imprenta que Juan Pérez de Moya entregó al impresor, que se conserva en la Biblioteca Nacional<sup>37</sup>, en el que puede estudiarse cómo compuso, reescribió y reorganizó Pérez de Moya su *Tratado* a partir de sus libros anteriores.

En efecto, en sus libros anteriores Juan Pérez de Moya presenta la primera de las reglas para resolver las igualaciones dos veces: primero en

<sup>37</sup> *Obras del bachiller Juan Pérez de Moya, en que se tratan cosas de aritmética, geometría, astronomía, cosmografía y filosofía natural*. Biblioteca Nacional de España (BNE), MSS/19301. De la existencia de este manuscrito ya dio cuenta Aurelio Valladares [VALLADARES, Aurelio (1997) «El bachiller Juan Pérez de Moya: apuntes bio-bibliográficos». *Boletín del Instituto de Estudios Giennenses*, 165: 371-412] y Sonia Garza Merino lo estudió desde el punto de vista de la bibliografía textual [GARZA MERINO, Sonia (2004) «El *Tratado de Mathematicas* de Juan Pérez de Moya en la imprenta». En: CÁTEDRA, Pedro M.; LÓPEZ-VIDRIERO, María Luisa y PÁIZ HERNÁNDEZ, María Isabel de (coords.) *La memoria de los libros. Estudios sobre la historia del escrito y la lectura en Europa y América*. Tomo I: 435-462. Salamanca: Instituto de Historia del Libro y de la Lectura.

el capítulo en que presenta los tipos de igualaciones compuestas y sus reglas, y luego, como recordatorio, al comienzo del capítulo en que se resuelven problemas de cada una de las igualaciones. La sexta igualación de Marco Aurel es la segunda igualación compuesta en los libros de Juan Pérez de Moya.



**Figuras 1 y 2.** Izquierda: Folio 587v del manuscrito. Derecha: Parte superior del folio 630r.

En la figura 1 está reproducido el folio 587v del manuscrito. En él puede verse que Juan Pérez de Moya trabajó sobre una reproducción manuscrita de sus libros anteriores, en este caso de su *Arithmetica*, sobre la cual hizo anotaciones, tachaduras y correcciones sobre la misma hoja, o, en ocasiones en que cambiaba una parte grande del texto, pegando un papel con el texto nuevo manuscrito encima del folio. En este folio, en que aparece el enunciado de la segunda igualación compuesta y su regla, hay una advertencia en el margen, «ojo» escrito dentro de un redondel. Puede verse que el texto que contiene el error tiene su comienzo tachado y encima de donde continúa hay pegado un papel con el nuevo texto que lo corrige: «Raiz cuadrada desta resta: quitada de la mitad, o juntada con la dicha mitad del quociente del mediano: será el valor de la cosa, y respuesta de la demanda», y debajo del texto está escrita una advertencia para el impresor, que indica «va pegado un papel con renglones». El nuevo texto se corresponde con el algoritmo correcto tal y como hemos visto enunciado en *Die Coss*, y Juan Pérez de Moya ha corregido el error cambiando simplemente «más» y «menos» por «juntada con» y «quitada de», con lo que la substracción ya está en el sentido correcto.

La nota que contiene el segundo error no se ve en el manuscrito. Tendría que aparecer en el folio 587v (figura 1) precisamente debajo del papel pegado, y lo único que podemos ver a través del papel pegado es una tachadura en forma de aspa, que elimina lo que estuviera escrito. En el *Tratado* impreso, tras el enunciado de la regla lo que aparece es el texto que en este folio del manuscrito está añadido en el margen izquierdo, con el que concluye el apartado dedicado a la segunda igualación compuesta.

En la figura 2 está reproducida una parte del folio 630r, que corresponde al capítulo dedicado a los problemas que se resuelven por la segunda igualación compuesta. Aquí puede verse cómo Juan Pérez de Moya corrige el error de manera ligeramente distinta, en vez de copiar lo que ya ha hecho en el capítulo anterior. Lo que hace es tachar cuatro renglones e intercalar en ellos la palabra «luego» que une el renglón y medio sin tachar anterior con los que siguen a los cuatro tachados. En los renglones subsiguientes, añade «o menos» entre «mas» y «la otra mitad», pero lo tacha (la regla sería errónea si no lo hubiera hecho) y la substracción, en vez de indicarla con ese «menos» erróneo, la indica en un renglón que intercala entre el penúltimo y el antepenúltimo que dice «o quita esta Raiz de la mitad del quociente del mediano y de un modo y otro será el». Con ello el texto que queda es correcto y así aparece en la página 574 del texto impreso del *Tratado*:

toma la mitad del quociente del mediano, y quadrandola, y del cuadrado resta el quociente del menor, y la raiz quadrada de la resta, mas la otra mitad del dicho quociente del mediano. O quita esta Raiz de la mitad del quociente del mediano y de un modo y otro será el valor de una cosa como mejor se entendera, en la declaracion de las siguientes demandas.

La vida de los errores no acaba, sin embargo, con su corrección en el *Tratado*, ya que Juan Pérez de Moya muere en 1596, su *Tratado* nunca se reimprime, pero su *Arithmetica* inicia después de su muerte, con una reimpresión hecha en Madrid en 1598 por Luis Sánchez, una carrera de reimpresiones numerosas que no se acabará hasta 1798, manteniendo los errores de las dos ediciones que se hicieron en su vida, antes de la elaboración del *Tratado*. Con esto, los errores no sólo son índice de conocimientos erróneos asentados, sino también del funcionamiento en la época de la industria de los libros de texto.