OBSERVACIONES ACERCA DE LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS EN LA MATEMÁTICA EDUCATIVA[vi]

Remarks on the history of mathematics in educational mathematics

Puig, L.

Universitat de València Estudi General

Resumen

En este texto reflexionamos sobre formas de estudiar y usar la historia de las matemáticas que a nuestro entender puede decirse que son propias de la matemática educativa. En particular, reflexionamos sobre el planteamiento de preguntas a la historia de las matemáticas desde la problemática de la matemática educativa, sobre la consideración de los textos históricos como cogniciones petrificadas o como monumentos, sobre la introducción de un "principio de incorporación" para entender la complejidad de las relaciones entre ontogénesis y filogénesis, y sobre el efecto de desubicación o extrañamiento.

Palabras clave: *Historia de las matemáticas, matemática educativa, principio de incorporación, efecto de desubicación.*

Abstract

In this text we reflect on ways of studying and using the history of mathematics that we believe can be said to be specific to educational mathematics. In particular, we reflect on the questioning of the history of mathematics from the problematics of educational mathematics, on the consideration of historical texts as petrified cognitions or as monuments, on the introduction of an "embedment principle" to understand the complexity of the relationships between ontogenesis and phylogenesis, and on the dépaysement or defamiliarisation effect.

Keywords: *History of mathematics, educational mathematics, embedment principle, defamiliarisation effect.*

INTRODUCCIÓN

No pretendo plantear ninguna novedad al decir que las relaciones entre la historia de las matemáticas y la matemática educativa son múltiples y de estilos distintos, basta con señalar que esa multiplicidad de relaciones está presente en el mismo nombre que hemos adoptado para el grupo de la SEIEM, cuyas siglas son HMEM: "Historia de las matemáticas y Educación matemática".

La decisión de unir Historia de las matemáticas y Educación matemática simplemente con la cópula "y" la tomamos precisamente para dar cabida en nuestro grupo tanto a trabajos que se plantean la indagación en el uso de la Historia de las matemáticas *en* la Educación matemática, como a trabajos que lo que estudian es la Historia *de* la Educación matemática.

Esa separación entre dos campos de investigación está presente también en el ámbito institucional. Así, por ejemplo, en el *International Congress on Mathematical Education* hace ya varias ediciones que existen en él dos *Topic Study Groups* distintos, uno con el nombre "The role of the history of mathematics in mathematics education" y otro con el nombre "The history of the teaching and learning of Mathematics".

Puig, L. (2019). Observaciones acerca de la historia de las matemáticas en la matemática educativa. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 117-130). Valladolid: SEIEM.

Pero esa distinción presente institucionalmente, por un lado, aunque pueda hacerse no deja de ser problemática en cuanto separa la historia de la educación matemática de la historia de las matemáticas, como si en el desarrollo de las matemáticas en la historia no hubieran tenido función alguna las prácticas de enseñanza de las matemáticas o la elaboración de textos matemáticos para la enseñanza o presentes en prácticas de enseñanza, y, por otro, no agota las posibilidades de establecimiento de distinciones entre sus relaciones. Por ejemplo, también podría tomarse como otro campo de investigación el uso de la historia de la educación matemática en la enseñanza de las matemáticas, o la inclusión de la historia de las matemáticas como materia de enseñanza –si en vez de un principio de parsimonia a la manera de Occam, se prefiriera una ley contra la tacañería, como decía Karl Menger.

Sobre este asunto hay una abundante bibliografía desarrollada alrededor del *International Group on the Relations between the History and Pedagogy of Mathematics* (HPM), fundado hace más de cuarenta años[vii], que no voy a examinar ni resumir aquí porque tenemos disponibles excelentes recensiones.

Así, Fauvel y van Maanen (2000) reúnen el resultado final del trabajo desarrollado en el ICMI Study *History in mathematics education*, coordinado y editado por John Fauvel y Jan van Maanen, que establece el estado de la cuestión del trabajo del grupo hasta esa fecha. Más recientemente, el panorama descrito en Clark, Kjeldsen, Schorcht, Tzanakis y Wang (2016) completa y actualiza el presentado en Fauvel y van Maanen (2000), y nuevas actualizaciones aparecen en los textos editados por Clark, Kjeldsen, Schorcht y Tzanakis (2018a) y por Furinghetti y Karp (2018), producidos por los dos grupos de trabajo de historia del *International Congress on Mathematics Education* celebrado en 2016 en Hamburgo, sobre todo en el capítulo introductorio del primero de ellos (Clark, Kjeldsen, Schorcht y Tzanakis, 2018b).

De todo lo recogido en esos panoramas, me limitaré a señalar un texto titulado “Histoire et enseignement des mathématiques: Pourquoi? Comment?” (Barbin, 1997), porque tuvo carácter programático y en él su autora planteó tres funciones para la historia de las matemáticas en la enseñanza de las matemáticas que se han convertido en una referencia clásica que se reitera en los panoramas recientes (por ejemplo, en Clark et al., 2016, pp. 144-145). Esas tres funciones son una primera que traduzco como “de substitución” (en francés, *vicariante*), otra que traduzco como “de desubicación” (en francés, *dépaysante*), de la que trataré más adelante, y una tercera cultural.

Ahora bien, Barbin (1997) no se limita a distinguir funciones que la historia de las matemáticas puede tener en la enseñanza de las matemáticas, sino que además afirma que, para que la historia de las matemáticas pueda tener esas funciones en la enseñanza de las matemáticas, hay que plantear también qué historia de las matemáticas hay que desarrollar y usar, y qué matemáticas se trata de enseñar. Subrayo el hecho de que la determinación de la función que la historia de las matemáticas desempeñe en la enseñanza de las matemáticas no es independiente del tipo de historia que se use y del tipo de matemáticas que se pretenda enseñar.

Añado a Barbin (1997), que plantea esta necesidad de pensar qué historia y qué enseñanza de las matemáticas para poder hablar de su relación, la serie de textos que Michael Fried ha dedicado a problematizar la relación entre la historia de las matemáticas y la matemática educativa desde el que publicó en 2001 con el título provocativo de “Can mathematics education and history of mathematics coexist?”, en los que ha planteado cómo lo que interesa desde la educación matemática y lo que interesa desde la investigación histórica es difícilmente compatible, o al menos siempre va a estar en conflicto (Fried, 2001, 2007, 2011, 2018).

Las observaciones que presento en este texto apuntan básicamente a aportar elementos para discutir qué historia de las matemáticas conduce a una relación fructífera con la matemática educativa y cómo superar las dificultades de compatibilizar los intereses de una y otra.

PRIMERA OBSERVACIÓN

A principios de la década de los ochenta del siglo pasado, Eugenio Filloy inició un programa de investigación que enunció programáticamente en su texto de 1984 *La aparición del lenguaje aritmético algebraico*, programa de investigación en el que yo comencé a trabajar unos años después. Lo que se plantea ahí me da pie para mi primera observación.

Filloy parte de un tipo de historia, la historia de las ideas, en la que historia y epistemología están entrelazadas, de forma similar a como lo está la epistemología histórica de Gaston Bachelard (Lecourt, 1970) o también el tipo de historia que propone Barbin (1997). Lo que es singular de su planteamiento lo expresa de la siguiente manera en el apartado que titula "La lectura de textos".

> El nuevo acercamiento consiste en realizar análisis de problemas de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas con el método histórico-crítico, y después poner a prueba los hallazgos teóricos en los Sistemas Educativos, para después de esta experimentación, volver, a base de resultados prácticos, a tener una nueva visión de la problemática de la historia de las ideas que corresponda a los resultados didácticos. (Filloy y Rojano, 1984, p. 2)

Filloy plantea pues un vaivén entre los textos históricos y los sistemas educativos actuales en el que la historia de las matemáticas no es simplemente un instrumento que se usa en la matemática educativa, la relación entre la historia de las matemáticas y la matemática educativa no se limita a una relación de aplicación de la primera en la segunda, sino que, en primer lugar, lo que se busca en la historia es "realizar análisis de problemas de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas", y, en segundo lugar, esos análisis históricos se ponen a prueba en los sistemas educativos y se reconsideran a la luz de los resultados de las observaciones de las actuaciones de los alumnos.

Este planteamiento programático, que enunciado de esta manera resulta demasiado general, ambicioso y difícil de realizar salvo a largo plazo, se puede reformular a partir de lo que para mí es su idea central: es la problemática de la matemática educativa la que determina lo que se indaga en la historia. La problemática de la matemática educativa guía qué textos examinar en la historia y qué preguntas guían el examen de los textos (Puig, 2008, 2011).

Así, como en nuestra investigación en la enseñanza y aprendizaje del álgebra observamos que al resolver problemas aritmético-algebraicos de enunciado verbal los alumnos utilizan sistemas de signos estratificados con estratos provenientes de los sistemas de signos del lenguaje natural y la aritmética, así como de los modelos concretos usados en las secuencias de enseñanza, nos interesamos en el examen de los sistemas de signos anteriores al establecimiento (con Vieta, Bombelli, Descartes) del sistema de signos de carácter simbólico que se usa actualmente en el álgebra que se enseña en la secundaria. Nos interesamos también en inquirir a los textos históricos sobre cómo las características de los sistemas de signos previos afectan a la manera de resolver los problemas aritmético-algebraicos. Además, como uno de los modelos concretos usados en las secuencias de enseñanza modelaban las ecuaciones representándolas con segmentos y rectángulos con los que se opera, indagamos sobre el uso de representaciones con figuras geométricas y métodos de cortar y pegar en textos históricos.

En la relación entre la historia de las matemáticas y la matemática educativa ése es un primer movimiento que va de la matemática educativa hacia la historia de las matemáticas, que ya es en sí un campo de indagación histórica, digamos que inspirada por la matemática educativa y, por tanto, específica de la investigación en matemática educativa o didáctica de las matemáticas. Trabajos que se quedan ahí son valiosos como un fondo de conocimientos disponibles para su uso, aunque éste no sea inmediato.

El segundo movimiento es un movimiento de vuelta en el que los resultados obtenidos se incorporan a los diseños de investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. En los términos de nuestro marco teórico y metodológico de los Modelos Teóricos Locales (MTL)

(Filloy, Rojano y Puig, 2008), esto puede hacerse tanto para elaborar secuencias de enseñanza que usen lo determinado en el estudio de los textos históricos (lo que puede implicar o no que se usen los propios textos históricos), es decir, en el componente de enseñanza del MTL que se elabora para una investigación empírica concreta, como para incorporar elementos al componente de competencia que otros análisis (por ejemplo, de pura fenomenología o de fenomenología didáctica) no determinan, o para tener nuevas maneras de dar sentido a las actuaciones de los alumnos por analogías con las cogniciones petrificadas determinadas en los textos históricos.

Así, por ejemplo, el análisis histórico que presenté en el seminario de la SEIEM de 2003 (Puig, 2003)[viii] me permitió formular una versión del método cartesiano como descripción, o esqueleto para la organización de la descripción, de los elementos que constituyen la competencia en la resolución algebraica de problemas aritmético-algebraicos de enunciado verbal, que posteriormente usamos y seguimos usando en trabajos de investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje de la resolución de esa clase de problemas en los sistemas educativos. El estudio realizado sobre las características del sistema matemático de signos presente en el libro *De Numeris Datis* de Jordanus de Nemore (Puig, 1994), que subrayaba sus grandes diferencias con el sistema de signos de carácter simbólico que se enseña actualmente en los niveles no universitarios a pesar de su uso de letras del alfabeto, me permitió en un trabajo posterior (Puig, 1996) disponer de una referencia para analizar la producción por parte de unos alumnos de un sistema de signos análogo al presente en ese libro de Jordanus de Nemore, sabiendo, por lo caracterizado en el estudio de la historia, que esta invención de los alumnos no podía considerarse como una dotación de sentido afortunada para la tarea que tenían planteada, aunque funcionara bien de forma idiosincrásica en la comunicación entre ellos.

El vaivén entre la historia de las matemáticas y los sistemas educativos, que está señalado con estos dos movimientos, se concibe en el programa de investigación a largo plazo, no como un movimiento oscilante de ida y vuelta, sino como un movimiento en forma de hélice, que en cada vuelta avanza: cuando se vuelve de nuevo a indagar en los textos históricos tras un vaivén, esto se hace con lo encontrado en el sistema educativo, y así sucesivamente.

SEGUNDA OBSERVACIÓN

No cabe duda de que en la relación que acabo de describir entre la historia de las matemáticas y la matemática educativa, la historia de las matemáticas está subordinada a la matemática educativa. Fried (2018) ha analizado cómo distintos actores que han estado haciendo investigación en historia de las matemáticas han tenido puntos de vista distintos para relacionarse con las matemáticas del pasado, y los clasifica como “matemáticos”, que han buscado matemáticas en la historia de las matemáticas, han tratado a los matemáticos de otras épocas como colegas y se han sentido a sí mismos haciendo matemáticas al estudiar la historia; “matemáticos historiadores”, que “ven una continuidad entre las matemáticas del pasado y su propio trabajo matemático (Fried, 2018, p. 7) e “historiadores de las matemáticas”, cuyo oficio es la historia de las matemáticas y su formación es de historiador y, eventualmente, en matemáticas, de modo que esas categorías las coloca Fried (2018) en un continuo de mayor a menor presencia de la perspectiva histórica. Fried (2018) indica que a estos actores se han incorporado recientemente los “educadores matemáticos historiadores[ix]”, cuya manera de mirar las matemáticas del pasado también es distinta, y dentro de los cuales hay también grados de presencia de la perspectiva histórica.

En cualquier caso, lo que me interesa resaltar de la reflexión de Fried (2018) es que siempre se hace historia desde un determinado punto de vista. En el caso de los que él llama “educadores matemáticos historiadores”, el punto de vista es el de su uso en la educación matemática, que puede adoptar además formas variadas, siendo una de esas formas la que he descrito someramente en la observación anterior.

Fried ha señalado además el peligro de hacer un tipo de historia que ha sido calificado de “whig” (Fried, 2011). Fried toma el calificativo “whig” de Butterfield (1931/1951), en cuyo título, *The*

Whig Interpretation of History, ya aparece explícitamente, y cuyo significado explica en la introducción, diciendo que la historia “whig” es aquella que se dedica a “alabar las revoluciones a condición de que hayan tenido éxito, subrayar ciertos principios de progreso en el pasado y producir un relato que es la ratificación del presente, si no su glorificación” (Butterfield, 1931/1951, p. 5).

El peligro fundamental reside entonces en que en la historia “whig” desaparece del relato histórico lo que es extraño a la forma actual de ver las cosas, sólo permanece lo que puede relacionarse con los intereses del presente.

Dice Fried (2011) que la relación entre la historia de las matemáticas y la educación matemática siempre va a tener esa tensión hacia lo “whig” porque, así como los historiadores pueden poner el presente entre paréntesis al estudiar el pasado (para eludir lo “whig”), los educadores matemáticos que hacen investigación histórica tenemos la obligación de tener presente el presente, no podemos ponerlo entre paréntesis.

Ahora bien, desde mi punto de vista, es posible, haciendo historia de las matemáticas al servicio de la matemática educativa, conjurar el peligro de hacer historia “whig”. Basta con que tengamos en cuenta que entre los intereses del presente de la matemática educativa está también lo que es extraño a la forma actual de ver las cosas. No es pues preciso poner el presente entre paréntesis para estudiar el pasado, ya que desde el punto de vista de la matemática educativa es útil para el presente no sólo lo que conduce al presente, sino también lo que no conduce al presente. El uso del resultado del estudio del sistema de signos del *De Numeris Datis* para la caracterización de las actuaciones de alumnos, que he mencionado en la observación anterior, es un ejemplo de algo que no conduce al presente, pero es útil en el presente, responde a lo que le interesa a la matemática educativa para abordar su problemática actual. Ahora bien, para ello es necesario que en la indagación histórica que emprendamos examinemos lo que sucedió en la historia de las matemáticas en su contexto socio-cultural concreto y en su momento histórico, sin pasarlo por la criba de conceptos, procesos y sistemas de signos del presente.

Señalaré, para acabar esta observación, que hay otra manera de conjurar el hacer historia “whig”, que también viene dada por un interés que viene del presente de la matemática educativa: su uso con la función de desubicación indicada por Barbin (1997), a la que dedicaré la última de estas observaciones.

TERCERA OBSERVACIÓN

Las dos primeras observaciones apuntan elementos que contribuyen a la reflexión sobre qué historia de las matemáticas desarrollar para que ésta sea fecunda para la matemática educativa, cuestión que, como ya hemos indicado, es crucial para Barbin (1997). Añadiré ahora una tercera observación en el mismo sentido.

La historia de las ideas, trufada de epistemología, en la que no importa quién hizo qué, sino el proceso de invención y las prácticas matemáticas desarrolladas en momentos históricos y en contextos socio-culturales determinados, es el tipo de historia que está en la base de la propuesta de Filloy y Rojano (1984) o Barbin (1997).

Ahora bien, todo relato histórico, incluso el que tiene voluntad de no ser “whig”, de no fijarse sólo en lo que conduce al presente y lo glorifica, sino de tomar el texto histórico en su totalidad, produce una lectura de los textos históricos disponibles, transmitidos hasta el momento histórico y el contexto socio-cultural en que se leen, que ineludiblemente ha de pasar por el intertexto de esos textos, intertextualidad que Julia Kristeva calificó de “índice de la manera en que un texto lee la historia y se inserta en ella” (Kristeva, 1968, p. 312).

Pero además ha de contar con que ese intertexto no es estático, fijado en el momento y el contexto en que se produce el texto, sino que cambia en la historia, como consecuencia, entre otras cosas, de las sucesivas lecturas que se producen de él. Así, por ejemplo, desde el momento en que Qustā Ibn Lūqā traduce en el siglo IX las *Aritméticas* de Diofanto con el título *El arte del álgebra*, el intertexto de ese libro incluye textos del álgebra árabe medieval, lo que estará presente en lecturas subsiguientes.

A mi entender, conviene en consecuencia tomar en consideración, a la hora de abordar la lectura de textos históricos, la metáfora que introdujo Michel Foucault de tomar los documentos como monumentos (Foucault, 1969). Foucault señalaba con esta metáfora que no se trata de considerar los documentos (los textos matemáticos históricos, en nuestro caso) como una totalidad cerrada, que tiene un significado intencional que su autor puso en él. Si fuera así, la tarea del historiador consistiría en descifrar el (verdadero) significado del texto, encontrando lo que en él quiso decir su autor. Lo que propone Foucault es bien distinto, la metáfora nos lleva a no ver los textos como documentos, totalidades cerradas, sino verlos a semejanza de como nos llegan los monumentos años después de haber sido erigidos, que más bien se presentan ante nosotros fragmentados, modificados, integrados en entornos distintos de aquellos en los que fueron instalados, e integrados en prácticas sociales distintas de las usuales cuando fue concebidos.

Tomar los textos matemáticos como monumentos, en vez de como documentos, en el sentido foucaultiano, conduce pues a examinarlos en su relación con otros textos y con las prácticas que los produjeron y en las que se han insertado a lo largo de la historia.

En particular, cuando la investigación histórica se hace desde el punto de vista de la matemática educativa cobra especial importancia el tener presente que el desarrollo de las matemáticas en la historia no sólo ha estado conducido por las prácticas matemáticas orientadas a la investigación, a la creación de nuevos conceptos y procesos matemáticos, sino que también producen nuevas matemáticas otro tipo de prácticas como la propia de los textos que Netz (1998) llama "textos deuteronómicos". Son textos deuteronómicos, por ejemplo, libros escritos en la época helenística como la *Synagōgē* de Pappus, donde éste expone el arte del análisis, o el *Comentario al libro primero de los Elementos de Euclides*, donde Proclo establece las partes de la demostración de un teorema. En ellos, no sólo se resuelven problemas o se demuestran teoremas, como es lo habitual en los libros de la época clásica griega, sino que, a la vez que se resuelven problemas o se demuestran teoremas, se reflexiona sobre la forma en que se resuelven y se demuestran, o se establecen las reglas de la práctica de escritura de textos matemáticos, de modo que esos libros no son meros comentarios o recopilaciones sino que generan también matemáticas nuevas con nuevas prácticas. De forma similar, la organización de contenidos matemáticos para su enseñanza es una práctica matemática que también genera nuevas matemáticas. Como dice Belhoste (1998) "la puesta en común del saber matemático […] constituye un aspecto esencial de la actividad matemática, parte integral de la actividad de invención" (p. 289).

CUARTA OBSERVACIÓN

Mi cuarta observación versa sobre un asunto del que hay una bibliografía abundante de la que destacaré Furinghetti y Radford (2002, 2008), Schubring (2006, 2011) y Fried y Jahnke (2015), textos que todos ellos están escritos por "educadores matemáticos historiadores", siendo preciso señalar que hay también bibliografía abundante escrita por matemáticos interesados en la educación, de la que señalaré en particular, Branford (1908), que contiene un "diagrama del desarrollo de la experiencia matemática en la raza y en el individuo" reiteradamente citado, y Klein (1927) y Toeplitz (2015), publicados originalmente en alemán en 1908 y 1927, respectivamente. El asunto al que me refiero es la teoría de la recapitulación, que se suele resumir con la fórmula "la ontogénesis repite la filogénesis" y que ha sido fuente de distintos enfoques de elaboración de secuencias de enseñanza que toman en cuenta ese principio y, por tanto, el desarrollo histórico de las matemáticas.

Esa amplia bibliografía también es muy variada: por un lado, hay versiones más o menos radicales de la teoría de la recapitulación y de su uso para la enseñanza. Pero además, se suele incluir en el mismo campo la teoría psicogenética elaborada por Jean Piaget y Rolando García (Piaget y García, 1982) y el método genético de enseñanza. Ahora bien, en Piaget y García (1982) no se afirma en absoluto que haya una recapitulación de la filogénesis en la ontogénesis:

> [el] objetivo no es, en modo alguno, poner en correspondencia las sucesiones de naturaleza histórica con aquellas que revelan los análisis psicogenéticos, destacando los contenidos. Se trata, por el contrario, de un objetivo enteramente diferente: mostrar que los mecanismos de pasaje de un período histórico al siguiente son análogos a los del pasaje de un estadio psicogenético al estadio siguiente. (Piaget y García, 1982, p. 33)[x]

Piaget y García pues no sólo no buscaron correspondencias elemento a elemento entre el desarrollo de cada individuo y lo sucedido en la historia, sino analogías entre mecanismos de paso de un estadio de desarrollo a otro; más aún, lo que hicieron es analizar lo sucedido en la historia para buscar en ella lo que habían determinado en el desarrollo de los individuos, podríamos decir que en su teoría es la ontogénesis la que se recapitula en la filogénesis.

Con respecto al método genético de enseñanza, sin entrar a discutir sus variantes, que han sido analizadas por Schubring en varias ocasiones (cf., por ejemplo, Schubring, 2011), en la versión que Toeplitz llamó "método genético indirecto" la historia se usa como guía para la enseñanza, pero no se repite en ella: "La elucidación de dificultades didácticas […] sobre la base de análisis históricos, en la que esos análisis históricos sólo sirven para dirigir la atención en la dirección adecuada" (Toeplitz, 2015, p. 308).

Del mismo estilo es la idea de Hans Freudenthal de "reinvención guiada", que puede verse como una derivación de este método genético indirecto, en donde lo que se lleva a la enseñanza son en todo caso los procesos que han conducido en la historia a la invención de los conceptos más que los hechos concretos que los produjeron.

> Instar a que las ideas se enseñen genéticamente no significa que deberían presentarse en el orden en que surgieron, ni siquiera con todos los callejones sin salida cerrados y todos los desvíos eliminados. Lo que los ciegos inventaron y descubrieron, posteriormente los que ven pueden decir cómo se habría descubierto si hubiera habido entonces maestros que supieran lo que sabemos ahora. (Freudenthal, 1973, p. 101)

Introduciré mi observación a la teoría de la recapitulación con una cita de Wittgenstein tomada del libro publicado en 1957 póstumamente en el que sus editores, G. H. Von Wright, R. Rhees y G. E. M. Anscombe, recopilaron una parte de sus escritos sobre matemáticas y que titularon *Observaciones sobre los fundamentos de la matemática*:

> Quiero decir: Es esencial a la matemática que sus signos se usen también en lo *civil*.
>
> Es el uso fuera de la matemática, es decir, el significado de los signos, lo que convierte en matemática el juego de signos. (Wittgenstein, 1987, p. 215[xi])

Aunque Wittgenstein hiciera esta observación para introducir a su manera la raíz socio-cultural del significado, yo la voy a utilizar para apuntar cómo ese uso civil de los signos de las matemáticas los incorpora al mundo de las experiencias de los sujetos. Si además tenemos en cuenta, siguiendo a Wittgenstein, que el significado de los signos radica en su uso –un uso sometido a reglas, a un juego de lenguaje–, los signos de las matemáticas usados en lo civil conllevan ese juego de lenguaje, de modo que un individuo de ese contexto socio-cultural y ese momento histórico puede tener en su acervo de experiencias no sólo los fenómenos que fueron en su día organizados por el concepto, el signo en cuestión, en el momento histórico y el contexto socio-cultural en que esto sucediera, digamos que desnudos, sin esa organización para la que se creó el concepto, el signo, matemático, sino que los tiene acompañados de esos medios de organización, ya incorporados social y culturalmente incluso al acervo del lenguaje.

El mundo de experiencias de un individuo de ese momento histórico y entorno socio-cultural, diferente del mundo de experiencias posible de aquellos individuos que vivían cuando el concepto fue inventado y donde lo fue, es más rico al tenerlos incorporados –lo que hace innecesario, en esos casos, repetir la historia. Y lo hace innecesario por un motivo más profundo que el que Freudenthal (1973) señala en el texto que acabamos de citar: en esos casos, ni siquiera es necesario que haya un profesor que enseñe lo que ahora se sabe y antes no se sabía. El conocimiento creado en la historia se ha incorporado a las prácticas sociales, a los juegos de lenguaje, de modo que ya está presente en el mundo de experiencias de los aprendices: la guía del profesor al alumno en el método de reinvención guiada freudenthaliano no tiene que suplir pues todo lo producido en la historia, puede partir de la presencia de lo ya incorporado.

Un ejemplo sencillo de este hecho es la presencia de números negativos en los pulsadores de los ascensores. Otro, más complejo, los simuladores en entornos informáticos.

En la historia de la enseñanza de las matemáticas también tenemos un ejemplo claro en el hecho de que, en aritméticas escolares españolas históricas, expresiones como “cinco menos tres” se traten como algo ajeno al lenguaje natural, que necesita por tanto ser traducido, explicado, en el propio lenguaje natural, ya que van contra las reglas de la gramática, cuando actualmente no se ven así. Así, Vallejo, por ejemplo, escribe “la espresion 5—3=2, quiere decir que despues de quitar 3 unidades del 5 quedan 2, y se lee cinco menos tres igual ó es igual á dos” (sic) (Vallejo, 1841, p. 26). La necesidad que tiene Vallejo de explicar cómo se lee la expresión aritmética “5 – 3 = 2” y sobre todo el hecho de que eso no le baste para dar cuenta de su significado, sino que tenga que explicar qué significa “cinco menos tres igual a dos”, porque esta frase no se reconoce como una frase bien construida en español, es impensable hoy en día. Hoy en día está incorporada a la gramática del español.

Hechos de este estilo son los que en Radford y Puig (2007) conducen a enunciar un “principio de incorporación”, que establece un límite de calado a la teoría de la recapitulación:

> La característica principal del desarrollo de la vida de un individuo (ontogénesis) es el hecho de que está enmarcado por un mundo de artefactos culturales y formas más avanzadas de cognición que ofrecen al individuo una serie de líneas de desarrollo conceptual.
>
> […] El Principio de Incorporación siguiente arroja luz mejor sobre la relación entre la filogénesis y la ontogénesis: nuestros mecanismos cognitivos (por ejemplo, percibir, abstraer, simbolizar) están relacionados, de manera crucial, con una dimensión conceptual histórica ineludiblemente incorporada en nuestras prácticas sociales y en los signos y artefactos que los median (Radford y Puig, 2007, p. 148).

QUINTA OBSERVACIÓN

Mi última observación versa sobre la función de la historia de las matemáticas en la enseñanza de las matemáticas que Barbin (1997) llamó “de dépaysement”, y yo traduzco por “función de desubicación”.

Esta función de desubicación persigue en la enseñanza un objetivo similar al que perseguía lo que Bertold Brecht llamó “Verfremdungseffekt”, “efecto de extrañamiento o distanciamiento”, que constituyó el elemento clave de su teoría de la actividad teatral. El establecimiento de una distancia entre el espectador y la representación teatral, el hacer que lo habitual se convierta en sorprendente, obliga a pensar. Bertold Brecht pretendía con el distanciamiento del espectador ante la representación teatral romper con la identificación emocional, con la catarsis que fundamenta el teatro clásico, en la que no hay reflexión sobre lo que ocurre en la escena sino identificación con los personajes. Con el efecto de distanciamiento

> se procura […] que lo sobreentendido resulte "no entendido", pero con el único fin de hacerlo más comprensible. Para que lo conocido lo sea realmente, para que sea conocido a conciencia, debe dejar de pasar inadvertido; se deberá romper con la costumbre de que el objeto en cuestión no requiere aclaración (Brecht, 1970, p. 182).

La desubicación del lector, del estudiante, ante el texto histórico le saca también de su zona de confort, ese lugar en que, identificado con lo que uno tiene delante, se actúa de forma mecánica, reiterando acciones ya hechas que se disparan ante el estímulo de lo familiar. Ahora bien, la historia de las matemáticas puede tener esa función de desubicación a condición de que no sea una historia "whig", a condición de que no se busque en los textos históricos sólo lo que conduce al presente, eliminando todo lo que resulta extraño a la manera en que están elaborados los conceptos matemáticos en el presente o a la manera en que se realizan procesos como los de resolución de problemas en el presente, o eliminando los sistemas matemáticos de signos de otras épocas substituyéndolos por los actuales, substitución que no conduce sólo a traducir el texto histórico, sino que también lo modifica conceptualmente, si no obviamos el hecho de que los conceptos matemáticos no existen independientemente de su expresión en un sistema de signos, sino que se constituyen en los sistemas de signos y por ellos.

La función de desubicación de la historia de las matemáticas rompe además con la imagen de las matemáticas como un conjunto de resultados, de verdades eternas, que se han ido descubriendo a lo largo de la historia, y la idea de la propia historia de las matemáticas como la historia del avance de la ignorancia y el error hacia la verdad, en vez de una historia de creación de medios de organización de fenómenos de nuestra experiencia, cada vez más perfilados conceptualmente, y organizados a su vez en niveles cada vez más abstractos. En consecuencia, no sólo se trata de que el tipo de historia de las matemáticas ha de ser de ese estilo para producir la función de desubicación, sino que ese tipo de historia también produce una modificación en el tipo de matemáticas que se enseña, siempre que la enseñanza tome en consideración y se entrelace con ella. La función de desubicación de la historia de las matemáticas conlleva también la función que Barbin (1997) llamó "de substitución": las matemáticas que se enseñan son otras.

Examinaré con un ejemplo cómo puede un texto histórico servir para esa función de desubicación y algunas condiciones que conviene que se den o que se organicen para que la presentación del texto histórico pueda servir para ello.

El ejemplo usa el texto del enunciado de un problema aritmético-algebraico de enunciado verbal y su solución que se conservan en una tablilla babilónica, que he tomado de Høyrup (2002). El texto del enunciado es el siguiente:

> 2 gur 2 pi 5 bán de aceite he comprado
>
> De la compra de 1 shekel de plata, 4 silà, de cada (shekel), de aceite he separado.
>
> 2/3 mina de plata como beneficio he visto.
>
> ¿Con qué equivalencia he comprado y con qué equivalencia he vendido? (Høyrup, 2002, pp. 206-207).

La traducción española la he hecho a partir de la versión inglesa de Jens Høyrup, que él hizo del texto en acadio de la tablilla babilónica, y he mantenido en mi versión española el tipo de traducción que Høyrup defiende que hay que hacer de los textos históricos, que él llama "traducción conforme[xii]". En la traducción conforme, se procura que los términos técnicos se traduzcan manteniendo las distinciones de su uso en el texto histórico (así, por ejemplo, Høyrup usa varias palabras inglesas distintas para "sumar" porque en el texto babilónico en acadio se usan de forma consistente palabras distintas para acciones de sumar diferentes, tales como juntar dos conjuntos homogéneos, acumular un objeto a otro de manera que se incorpora a ese otro, etcétera); además, se procura mantener la estructura sintáctica de las frases aún a costa de violentar la sintaxis del idioma al que se traduce. Con ello se pretende que lo que el lector tenga ante él tenga rasgos fundamentales de la conceptualización de los objetos y procesos matemáticos que están en juego en el texto original y en las prácticas de la época.

Esta traducción conforme, a la manera de Høyrup, es un buen vehículo para que el texto pueda tener la función de desubicación. Ahora bien, para su uso en la enseñanza, la idea de Høyrup conviene modularla: para que la función de desubicación se desencadene hace falta que el alumno encuentre en el texto, o en la tarea en la que el texto está inserto, algo extraño, algo que le saque de su zona de confort; pero es preciso también que reconozca la tarea como parte de una familia de tareas que conoce, dentro de la cual ese texto particular desconcierta. Dicho de otra manera, el texto no puede ser un enigma, algo a lo que no se es capaz de dar sentido alguno. En el extremo, si se presentara el texto tal cual está en la tablilla babilónica o en la transcripción que usan los arqueólogos, sería un enigma. La traducción conforme de Høyrup puede seguir siendo un enigma para según qué alumnos, por lo que la tarea del profesor ha de ser elegir la distancia que se quiere crear entre el texto y los alumnos de modo que éstos puedan a la vez darle algún sentido y extrañarse: así podrá tener la función de desubicación que se persigue.

Así, del problema anterior puede eliminarse la dificultad que plantea la metrología babilónica, cuyo desconocimiento bloquea la posibilidad de desencadenar las acciones aunque se haya reconocido el problema como parte de una familia de problemas conocida, y cuya presencia sólo desubica en el terreno del desconocimiento de un hecho:

> 12`50 litros de aceite he comprado.
>
> De la compra de 1 gramo de plata, 4 litros, de cada (gramo), de aceite he separado.
>
> 40 gramos de plata como beneficio he visto.
>
> ¿Con qué equivalencia he comprado y con qué equivalencia he vendido?

También puede eliminarse la representación de los números en el sistema de numeración sexagesimal, que ya no sólo desubica en el terreno del desconocimiento de un hecho, sino también en la forma en que se realizan las operaciones aritméticas:

> 770 litros de aceite he comprado.
>
> De la compra de 1 gramo de plata, 4 litros, de cada (gramo), de aceite he separado.
>
> 40 gramos de plata como beneficio he visto.
>
> ¿Con qué equivalencia he comprado y con qué equivalencia he vendido?

Finalmente, puede abandonarse la traducción conforme a la manera de Høyrup y redactar un enunciado como traducción del texto babilónico que sólo es conforme con respecto a la estructura de relaciones y cantidades, y la historia de transacciones en las que se compra para vender más caro.

> Un comerciante compra 770 litros de aceite.
>
> Los vende dando 4 litros menos de los que ha recibido en la compra, por cada gramo de plata.
>
> Obtiene un beneficio de 40 gramos de plata.
>
> Averiguar a cuántos litros por gramo de plata compró el aceite y a cuántos litros por gramo de plata lo vendió.

Podría pensarse que esta última versión del texto babilónico ya no es capaz de tener función de desubicación alguna, porque el enunciado es familiar para los alumnos y pueden desencadenar de forma automática las acciones del método cartesiano, por ejemplo, y resolverlo. Ahora bien, este problema es particularmente interesante para discutir que la función de desubicación puede presentarse en niveles distintos, por la riqueza de elementos desubicadores que contiene.

En efecto, cuando se efectúa la lectura analítica del problema, la estructura de cantidades y de relaciones a la que conduce la lectura analítica más usual también desubica, porque no es la habitual en los problemas de esa familia con los que los alumnos de nuestra época se han encontrado y que han resuelto. Las relaciones de proporcionalidad que aparecen son relaciones de proporcionalidad inversa, en vez de relaciones de proporcionalidad directa, que es lo que constituye el centro de la estructura de las relaciones entre cantidades en esta familia de problemas.

Esto es así porque entre las cantidades del problema, que son “cantidad comprada y vendida” (litros), “importe de la compra” (gramos de plata), “importe de la venta” (gr), “tasa de compra” (l/gr), “tasa de venta” (l/gr), “beneficio total expresado en plata” (gr) y “beneficio unitario expresado en aceite por unidad de plata” (l/gr), tres de ellas responden a una conceptualización del fenómeno distinta de la habitual en el presente. En efecto, el precio unitario no está concebido como lo que se paga por unidad de mercancía, sino como la mercancía que se da o se recibe por unidad de dinero, y lo mismo sucede con el beneficio unitario. Como consecuencia de esa inversión en la concepción del precio de compra y venta (que yo he indicado llamándolo “tasa” en vez de “precio”), entre las cantidades en cuestión hay relaciones de proporcionalidad inversa y no de proporcionalidad directa.

La riqueza de la tablilla babilónica en la que aparece este problema desde el punto de vista de la función de desubicación no se agota ahí. La tablilla contiene también la solución del problema expresada como una lista de operaciones que hay que realizar para resolverlo, que presento en una traducción conforme de la que sólo he eliminado la metrología babilónica:

> Tú coloca 4 litros de aceite y coloca el beneficio 40 gramos
>
> Inverso de 40, 1´30´´, ves.
>
> 1´30´´ por 4 multiplica, 6´, ves.
>
> 6´ por 12`50, el aceite, multiplica, 1`17, ves.
>
> ½ de 4 rompe, 2, ves
>
> 2 cuadra, 4, ves
>
> 4 a 1`17 añade, 1`21, ves.
>
> ¿Cuál es el lado igual? 9 es el lado igual.
>
> 9 el equivalente coloca.
>
> ½ de 4, que has separado, rompe, 2, ves.
>
> 2 al primer 9 añade, 11, ves.
>
> Del segundo quítalo, 7, ves.
>
> 11 litros cada gramo has comprado, 7 litros cada gramo has vendido.
>
> ¿Plata equivalente a qué? ¿Qué a 11 litros [por gramo] puedo poner que 12`50 de aceite me dé?
>
> 1`10 coloco 1`10 gramos de plata.
>
> ¿Por 7 litros cada gramo de plata que vendes de aceite, los 40 gramos de plata a qué equivalen?
>
> 40 por 7 multiplica. 4`40, ves, 4`40 de aceite (Høyrup, 2002, p. 207).

Esa solución puede usarse en la enseñanza planteando a los alumnos la tarea de explicarla indicando cuál es el sentido que tiene cada una de las operaciones que la componen y su secuencia. Ahora bien, examinando la solución, podemos ver que, de nuevo, el lector moderno se ve desubicado.

En efecto, en las tres primeras líneas el beneficio unitario expresado en aceite por unidad de plata (l/gr) se divide por el beneficio total expresado en plata (gr), y, en la cuarta, el resultado de esa división se multiplica por cantidad comprada y vendida (l), y el resultado de esa multiplicación resulta ser el producto de la tasa de compra (l/gr) por la tasa de venta (l/gr), lo que carece de sentido en la historia que narra el problema. Hay que buscarle sentido en otro lugar, en una representación de las cantidades mediante rectángulos que se manipulan cortando, desplazando y pegando y se relacionan entre ellos, que está estrechamente ligada a la naturaleza de la protoálgebra babilónica[xiii].

El desconocimiento de la metrología (un hecho), las consecuencias del sistema de numeración en la ejecución de las operaciones aritméticas, la diferencia en la estructura de cantidades y relaciones con respecto a los problemas de esa familia y la carencia de sentido del algoritmo de solución con respecto al significado de las cantidades en la historia del problema enunciado verbalmente producen desubicación en niveles distintos, que conducen a tener que abrir el campo semántico de los conceptos y procesos implicados más allá del que proporciona una matemática como conjunto de resultados establecidos, hacia matemáticas elaboradas a lo largo de la historia en contextos socio-culturales diversos: la historia de las matemáticas cambia las matemáticas que se enseñan.

Referencias

Barbin, É. (1997). Histoire des Mathématiques: Pourquoi? Comment? *Bulletin de l'Association Mathématique du Québec*, *37*(1), 20–25.

Belhoste, B. (1998). Pour une réévaluation du rôle de l'enseignement dans l'histoire des mathématiques. *Revue d'histoire des mathématiques, 4*(2), 289–304.

Branford, B. (1908). *A study of Mathematical Education, including the teaching of arithmetic.* Oxford, Reino Unido: Clarendon Press.

Brecht, B. (1970). *Escritos sobre el teatro.* Buenos Aires, Argentina: Ediciones Nueva Visión.

Butterfield, H. (1931/1951). *The Whig Interpretation of History*. Nueva York, EE. UU.: Charles Scribner's Sons.

Clark, K. M., Kjeldsen, T. H., Schorcht, S. y Tzanakis, C. (Eds.). (2018a). *Mathematics, Education and History: Towards a Harmonious Partnership.* Cham, Suiza: Springer.

Clark, K. M., Kjeldsen, T. H., Schorcht, S. y Tzanakis, C. (2018b). Introduction: Integrating history and epistemology of mathematics in mathematics education. En K. M. Clark, T. H. Kjeldsen, S. Schorcht y C. Tzanakis (Eds.), *Mathematics, Education and History: Towards a Harmonious Partnership* (pp. 1-23). Cham, Suiza: Springer.

Clark, K., Kjeldsen, T. H., Schorcht, S., Tzanakis, C. y Wang, X. (2016). History of mathematics in mathematics education: Recent developments. En L. Radford, F. Furinghetti y T. Hausberger (Eds.), *Proceedings of the 2016 ICME Satellite Meeting of the International Study Group on the Relations Between the History and Pedagogy of Mathematics* (pp. 135-179). Montpellier, Francia: IREM de Montpellier.

Fauvel, J. y van Maanen, J. (Eds.). (2000). *History in mathematics education: The ICMI study. New ICMI Study Series (Vol. 6).* Dordrecht, Países Bajos: Kluwer.

Filloy, E. y Rojano, T. (1984). La aparición del lenguaje aritmético-algebraico. *L'Educazione Matematica, 5*(3), 1-16.

Filloy, E., Rojano, T. y Puig, L. (2008). *Educational Algebra: A Theoretical and Empirical Approach.* Nueva York, EE. UU.: Springer.

Foucault, M. (1969). *L'archéologie du savoir.* París, Francia: Gallimard.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task.* Dordrecht, Países Bajos: Reidel.

Fried, M. N. (2001). Can mathematics education and history of mathematics coexist? *Science & Education, 10*(4), 391-408.

Fried, M. N. (2007). Didactics and history of mathematics: Knowledge and self-knowledge. *Educational Studies in Mathematics, 66*(2), 203-223.

Fried, M. N. (2011). History of mathematics in mathematics education: problems and prospects. En É. Barbin, M. Kronfellner y C. Tzanakis (Eds.), *Proceedings of the 6th European Summer University on the History and Epistemology in Mathematics Education* (pp. 13–26). Viena, Austria: Holzhausen Verlag.

Fried, M. N. (2018). Ways of relating to the mathematics of the past. *Journal of Humanistic Mathematics, 8*(1), 3-23.

Fried, M. N. y Jahnke, H. N. (2015). Otto Toeplitz's 1927 Paper on the Genetic Method in the Teaching of Mathematics. *Science in Context, 28*(2), 285-295.

Furinghetti, F. (en prensa). History and epistemology in mathematics education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. doi: 10.1080/0020739X.2019.1565454.

Furinghetti, F. y Karp, A. (Eds.). (2018). *Researching the History of Mathematics Education: An International Overview.* Cham, Suiza: Springer.

Furinghetti, F. y Radford, L. (2002). Historical conceptual developments and the teaching of mathematics: from philogenesis and ontogenesis theory to classroom practice. En L. D. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 631-654). Nueva Jersey, EE. UU.: Lawrence Erlbaum.

Furinghetti, F. y Radford, L. (2008). Contrasts and oblique connections between historical conceptual developments and classroom learning in mathematics. En L. D. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education, 2nd Edition* (pp. 626-655). Nueva York, EE. UU.: Routledge.

Høyrup, J. (2002). *Lengths, widths, surfaces a portrait of Old Babylonian algebra and its kin.* Nueva York, EE. UU.: Springer.

Klein, F. (1927). *Matemática elemental desde un punto de vista superior. Vol. 1 (Aritmética. Álgebra. Análisis).* Madrid: Biblioteca Matemática.

Kristeva, J. (1968). Problèmes de la structuration du texte. En Tel Quel, *Théorie d'ensemble* (pp. 298-317). París, Francia: Seuil.

Lecourt, D. (1970). *L'épistémologie historique de Gaston Bachelard.* París, Francia: Librairie Philosophique J. Vrin.

Netz, R. (1998). Deuteronomic texts: late antiquity and the history of mathematics. *Revue d'histoire des mathématiques, 4*(2), 261–288.

Piaget, J. y García, R. (1982). *Psicogénesis e historia de la ciencia.* México D. F., México: Siglo XXI Editores.

Puig, L. (1994). El *De Numeris Datis* de Jordanus Nemorarius como sistema matemático de signos. *Mathesis, 10*(1), 47-92

Puig, L. (1996). Pupils' prompted production of a medieval mathematical sign system. En L. Puig y Á. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th International Conference on the Psychology of Mathematics Education, Vol. 1* (pp. 77-84). Valencia: PME.

Puig, L. (2003). Historia de las ideas algebraicas: componentes y preguntas de investigación desde el punto de vista de la matemática educativa. En E. Castro, P. Flores, T. Ortega, L. Rico y A. Vallecillos (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Actas del Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 97-108). Granada: SEIEM y Universidad de Granada.

Puig, L. (2008). History of algebraic ideas and research on educational algebra. En M. Niss (Ed.) *Proceedings of the Tenth International Congress on Mathematical Education (CD-version).* Roskilde, Dinamarca: IMFUFA, Roskilde University.

Puig, L. (2009). Protoálgebra en Babilonia (1ª entrega). *Suma, 61*, 93-98.

Puig, L. (2011). Researching the history of algebraic ideas from an educational point of view. En V. Katz y C. Tzanakis (Eds.*), Recent Developments on Introducing a Historical Dimension in Mathematics Education* (pp. 29-42). Washington, EE. UU.: The Mathematical Association of America.

Puig, L. y Navarro, M. T. (2010). Protoálgebra en Babilonia (2ª entrega): Métodos de solución. *Suma, 64*, 97-104.

Puig, L. y Rojano, T. (2004). The history of algebra in mathematics education. En K. Stacey, H. Chick y M. Kendal (Eds.), *The Future of the Teaching and Learning of Algebra: The 12th ICMI Study* (pp. 187-223). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer.

Radford, L. y Puig, L. (2007). Syntax and meaning as sensuous, visual, historical forms of algebraic thinking. *Educational Studies in Mathematics, 66*(2), 145-164.

Schubring, G. (2006). Ontogeny and phylogeny. Categories for cognitive development. En F. Furinghetti, S. Kaisjer y C. Tzanakis (Eds.), *Proceedings of HPM 2004 & ESU 4* (pp. 329-339). Iraklion, Grecia: University of Crete.

Schubring, G. (2011). Conceptions for relating the evolution of mathematical concepts to mathematics learning—epistemology, history, and semiotics interacting. *Educational Studies in Mathematics, 77*(1), 79-104.

Toeplitz, O. (2015). The problem of university courses on infinitesimal calculus and their demarcation from infinitesimal calculus in high schools [Translated into English and annotated by M. N. Fried and H. N. Jahnke]. *Science in Context, 28*(2), 297-310.

Vallejo, J. M. (1841). *Tratado elemental de Matemáticas. Cuarta edición, Tomo I. Parte Primera, que contiene la Aritmética y Álgebra.* Madrid: Imprenta Garrasayaza.

Wittgenstein, L. (1987). *Observaciones sobre los fundamentos de la matemática* [Traducción española de Isidoro Reguera]. Madrid: Alianza.

[vi] Este trabajo ha contado con el apoyo del proyecto EDU2017-84377-R (AEI/FEDER, UE).

[vii] En Furinghetti (en prensa) se presenta un esbozo reciente de la historia del *International Group on the Relations between the History and Pedagogy of Mathematics* (HPM) y de la comunidad de investigadores y profesores que han contribuido a las actividades del grupo.

[viii] Véase también Puig y Rojano (2004).

[ix] Fried (2018) dice "Educational Historians of Mathematics", expresión para la que he preferido la versión española "educadores matemáticos historiadores" a "educadores historiadores de las matemáticas", más literal, con el fin de referirme más directamente a quienes, dentro de nuestra comunidad de investigadores en didáctica de las matemáticas, educación matemática o matemática educativa, nos dedicamos a la historia de las matemáticas, en cualquiera de sus variantes relacionadas con la matemática educativa.

[x] Cito de la versión española que, de hecho, se publicó un año antes de la versión francesa y puede considerarse en cierto sentido como la versión original. Jean Piaget trabajó con Rolando García en este libro hasta el final de su vida, pero se publicó póstumamente. Rolando García estuvo al cargo de la edición póstuma y también fue él quien tradujo del francés al español las partes escritas por Piaget.

[xi] Al componer este libro a partir de los escritos de Wittgenstein, los editores G. H. Von Wright, R. Rhees y G. E. M. Anscombe numeraron los apartados. Esto ha hecho que sea habitual citar este texto de Wittgenstein usando como referencia el número del apartado establecido por los editores en la tercera edición revisada, en vez del número de página, como exigen las normas APA. La ventaja de que la referencia indique el número del apartado es que éste es el mismo en la versión inglesa que compusieron los editores, en la versión en alemán o en la española que estoy citando. En el caso de lo que cito, se trata del apartado V, 2.

[xii] Høyrup la llama "conformal translation", y utiliza la palabra inglesa "conformal" que no se usa en el lenguaje cotidiano, sino que es un término técnico científico para indicar "con la misma forma". He decidido traducirla por "conforme", que en español tiene ese significado técnico, aunque también tenga otros en el lenguaje cotidiano. Høyrup, al usar "conformal", quiere subrayar que el tipo de traducción que propugna deja invariantes una serie de características del texto que se traduce, "conserva la estructura" (Høyrup, 2002, p. 41).

[xiii] Un análisis más detallado de este problema y su solución puede verse en Puig (2009) y Puig y Navarro (2010), sin que en esos textos se hable de la función de desubicación de la historia de las matemáticas.