La Resolución de Problemas Matemáticos: Avances y Perspectivas en la Construcción de una Agenda de Investigación y Práctica

Manuel Santos Trigo
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Cinvestav-IPN
msantos@cinvestav.mx

La resolución de problemas es dominio de estudio que ha influido notablemente en las agendas de investigación en educación matemática y en las propuestas del currículum matemático y las prácticas de instrucción. En este trabajo se intenta caracterizar los principios que le dan sustento a los programas de investigación y se revisan temas relevantes de la resolución de problemas en el ámbito internacional. Incluye la presentación y discusión de una actividad o problema donde se ilustra que el empleo de herramientas computacionales (software dinámico, en este caso) ofrece un potencial para que los estudiantes desarrollen un método inquisitivo que les permita involucrarse en actividades propias del quehacer matemático. En este contexto se introducen aspectos relacionados con la identidad de la resolución de problemas, la investigación, el currículum y la importancia de la evaluación del conocimiento matemático.

Problem solving is a domain of study that has shaped the research agenda in mathematics education and influenced curriculum proposals and mathematical instruction. In this paper, I intend to characterize the tenets or principles that support research programs in this domain and its relation with curriculum and instructional environment. I also review main topics addressed in the international problem solving agenda. The paper includes the presentation and discussion of a problem or task to illustrate that the use of computational tools might offer students the opportunity of developing an inquiry or inquisitive method to address and develop mathematical ideas. The inquisitive approach is a key principle to support research and practice in problem solving. The process of solving the task is a departure point to introduce themes related to the problem solving identity, research agendas, curriculum and students' mathematical assessment.

Introducción

¿Qué es la resolución de problemas y cuál es su influencia en los sistemas de la educación matemática en el ámbito internacional? ¿Cuáles son los principios que distinguen a los programas de investigación en la resolución de problemas? ¿Cuál es la relación entre la investigación en la resolución de problemas y las prácticas de instrucción? En la discusión de estas preguntas se reconoce la existencia de diversas maneras de documentar y analizar el desarrollo e impacto de vincular la resolución de problemas con el aprendizaje o con la construcción del conocimiento matemático de los estudiantes. El mismo enfoque y objetivos de los programas de investigación puede variar dependiendo de los temas, tipos de estudio, métodos o diseños que se emplean en los procesos de investigación. Por ejemplo, un programa importante de investigación que ha inspirado una serie de estudios en la resolución de problemas es el dirigido por Schoenfeld (1985) que inicialmente documentó aspectos relacionados con el empleo de estrategias heurísticas, la naturaleza del pensamiento matemático, las creencias de los estudiantes y la relevancia de las estrategias metacognitivas en la resolución de problemas. Otros se han enfocado hacia aspectos relacionados con la relevancia de considerar situaciones auténticas o realistas que propicien en los estudiantes la construcción de modelos matemáticos (Gravemeijer & Doorman, 1999; Lesh, & Zawojewski, 2007). Además, un gran número de propuestas del currículum en el ámbito internacional, a nivel preunivesitario, identifican a la resolución de problemas como un eje central en la organización de los contenidos, esto es a pesar de diferencias en formas y estructuras de los sistemas educativos. El reconocimiento de la resolución de problemas en las propuestas no necesariamente implica un consenso o una convergencia en la identificación y usos de los principios y actividades que promuevan el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes. Törner, Schoenfeld, & Reiss (2007) invitaron a un grupo de expertos alrededor el mundo a documentar el "estado del arte" de la resolución de problemas en sus respectivos países. En la invitación se sugería responder tres preguntas: ¿Cuáles son las áreas fundamentales en la investigación? ¿Cuáles son los temas relevantes en el currículum? ¿Cuál es la relación entre la investigación y el currículum, al ser mediada por la política? En las contribuciones se observa que los autores abordan temas variados que van desde la relación entre la investigación y las prácticas de instrucción hasta el papel de la resolución de problemas en las evaluaciones internacionales como PISA (Programa para la Evaluación Internacional de los Alumnos, por sus siglas en inglés).

> …Aun dentro de una misma cultura o en un mismo sistema de educación, los desarrolladores del currículum, los profesores, los investigadores en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas y los matemáticos no necesariamente comparten los mismos puntos de vista sobre lo que un problema y lo que se enseña en términos de la resolución de problemas (Arcavi & Friedlander, 2007, p. 356).

De hecho, Schoenfeld (1992) plantea la necesidad de explicitar el significado en el uso del término "resolución de problemas" en los programas de investigación o propuestas del currículum.

> El término [resolución de problemas] ha servido como un paraguas bajo el cual se realizan radicalmente diferentes tipos de investigación. [Una exigencia] mínima debe ser un requerimiento *de facto* (ahora es la excepción más que la regla) que cada estudio o discusión de la resolución de problemas se acompañe de una definición operacional del término y ejemplos de lo que significa para el autor….Gran confusión emerge cuando el mismo término se refiere a una multitud de algunas veces contradictorios de comportamientos típicamente no especificados (Schoenfeld, 1992, pp. 363-364).

A más de tres décadas de presencia intensa de la resolución de problemas en la agenda de investigación y reformas curriculares resulta paradójico que su definición e identidad siga siendo un tema de discusión en la educación matemática (Santos-Trigo, 2007). En este artículo se intenta avanzar la discusión a la identificación de los principios que le dan sustento a la resolución de problemas y caracterizar el desarrollo o construcción del conocimiento matemático dentro de una comunidad de aprendizaje donde se valora y fomenta un método inquisitivo. Conviene también delimitar el dominio y los alcances de la resolución de problemas en las prácticas de instrucción y en la construcción de conocimiento matemático nuevo por parte de los estudiantes. En particular, identificar y caracterizar la ruta entre los resultados de los programas de investigación y su consideración o uso en el diseño curricular y la instrucción.

Un aspecto crucial en los programas de investigación en educación matemática, en las propuestas curriculares y en las prácticas de instrucción es el diseño o selección de problemas o actividades que promuevan el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes. Puig (1996) revisa diferentes usos del término problema en dominios como la psicología, la inteligencia artificial, y la educación matemática. Además, caracteriza el proceso de resolución como "la actividad mental y manifiesta que desarrolla el resolutor desde el momento en que, presentándosele un problema, asume que lo que tiene delante es un problema y quiere resolverlo, hasta que da por acabada la tarea" (Puig, 1996, p. 31). ¿Qué significa acabar la tarea o resolver un problema? ¿Cuándo el resolutor asume que tiene un problema que resolver? ¿Cómo se desarrollan caminos o acercamientos de resolución de problemas y cómo estos se refinan o robustecen? La discusión de estas preguntas implica la identificación de las cualidades matemáticas (recursos, estrategias, conceptos, caminos de solución) que justifican la selección o consideración de una actividad o problema. Este proceso demanda de los investigadores o profesores examinar rutas potenciales que pueden ayudar o guiar el proceso de construcción del pensamiento matemático de los estudiantes (Camacho & Santos, 2004; Santos-Trigo, 2004a).

Sobre los principios y caracterización de la resolución de problemas

¿Cuáles son los principios que revelan la identidad de la resolución de problemas? ¿Qué es lo que genera la diversidad o múltiples interpretaciones de la resolución de problemas en los programas de investigación o prácticas de instrucción? Lesh & Zawojewski (2007, p. 776) indican que "los patrones que forman una identidad en la resolución de problemas son complejos, involucran patrones de motivación variados, de reacciones afectivas, de desarrollo cognitivo y social en diferentes circunstancias dentro de una tarea dada". Además, sugieren que no existe una forma eficiente de acumular y discutir los avances y resultados de investigación en el ámbito internacional y, como consecuencia, varios temas se reciclan o solamente aparecen con un lenguaje diferente. En el reconocimiento de esa complejidad, no se intenta revisar en detalle la génesis y desarrollo de la resolución de problemas en varios países; se pretende, identificar aspectos comunes y algunas diferencias en términos del enfoque y actividades que distinguen los acercamientos a la resolución de problemas en la promoción del aprendizaje de los estudiantes. Lesh & Zawojewski (2007) definen la resolución de problemas como "el proceso de interpretar una situación matemáticamente, la cual involucra varios ciclos interactivos de expresar, probar y revisar interpretaciones –y de ordenar, integrar, modificar, revisar o redefinir grupos de conceptos matemáticos desde varios tópicos dentro y más allá de las matemáticas" (p. 782). Un aspecto importante en esta caracterización es que la comprensión o el desarrollo de las ideas matemáticas conllevan un proceso de reflexión donde el estudiante constantemente refina o transforma sus ideas y formas de pensar como resultado de participar activamente en una comunidad de práctica o aprendizaje. Lo relevante en esta visión es que el estudiante desarrolle recursos, estrategias, y herramientas que le permitan recuperarse de dificultades iniciales y robustecer sus formas de pensar acerca de su propio aprendizaje y la resolución de problemas.

En la actividad que se presenta más adelante en este artículo, se identifica a la resolución de problemas como una forma de pensar donde una comunidad de aprendizaje (los estudiantes y el profesor) buscan diversas maneras de resolver la situación y reconocen la relevancia de justificar sus respuestas con distintos tipos de argumentos. Es decir, la meta no es solamente reportar una respuesta sino identificar y contrastar diversas maneras de representar, explorar y resolver el problema. También contempla actividades que permitan extender el problema inicial y formular conjeturas y otros problemas. Esta forma de pensar es consistente con los rasgos fundamentales del pensamiento matemático alrededor de la resolución de problemas. Schoenfeld (1985, p. xii) establece que en la resolución de problemas:

> Aprender a pensar matemáticamente –involucra más que tener una gran cantidad de conocimiento de la materia *al dedillo*. Incluye ser flexible y dominar los recursos dentro de la disciplina, usar el conocimiento propio eficientemente, y comprender y aceptar las reglas "tácitas de juego".

En esta perspectiva se reconoce que un aspecto central en el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes es que adquieran los caminos, estrategias, recursos y una disposición para involucrarse en actividades que reflejen el quehacer matemático. Es decir, se reconoce la importancia de relacionar el proceso de desarrollar la disciplina con el aprendizaje o construcción del conocimiento matemático.

> Aprender a pensar matemáticamente significa (a) desarrollar un punto de vista matemático –que valore el proceso de matematización y abstracción y tener la predilección de aplicarlos, y (b) desarrollar una competencia con las herramientas de trabajo, y usarlas en el servicio de la meta de aprender estructuras –desarrollo del sentido matemático (Schoenfeld, 1994, p.60).

Así el reto en la instrucción matemática es crear condiciones para generar un ambiente que refleje los valores propios de la práctica o actividad matemática. ¿Qué condiciones son necesarias y favorecen el desarrollo de los valores del quehacer de la disciplina en los estudiantes?
Schoenfeld (1992) plantea que:

> …Para desarrollar los hábitos matemáticos apropiados y disposiciones de interpretación y encontrar sentido [a las ideas matemática] también como los modos apropiados de pensamiento matemático- las comunidades de práctica en la cual ellos [los estudiantes] aprenden matemáticas deben reflejar y promover esas formas de pensamiento. Es decir, los salones de clase deben ser comunidades en los cuales el sentido matemático, del tipo que esperamos desarrollen los estudiantes, se practique (p. 345).

Otro elemento relevante asociado con los principios de la resolución de problemas se relaciona con la forma en que se conceptualiza la disciplina. Schoenfeld reconoce que un aspecto importante en la caracterización de la naturaleza de las matemáticas es pensarla como la ciencia de los patrones.

> Las matemáticas revelan patrones escondidos que ayudan a comprender el mundo que nos rodea…El proceso de "hacer" matemáticas es mas que cálculos y deducciones; involucra la observación de patrones, la prueba de conjeturas, la estimación de resultados (NRC, 1989, p. 31) (citado en Schoenfeld, 1992, p. 343).

Estos patrones pueden ser numéricos, entre figuras o formas, patrones de movimiento y en general patrones de comportamiento de relaciones. Además, los patrones pueden ser reales o imaginarios, visuales o mentales, dinámicos o estáticos, cualitativos o cuantitativos, de interés utilitario o de carácter recreativo. El referente de estudio de estos patrones puede ser el mundo que nos rodea o una reflexión pura de la mente del individuo. Devlin (1994) selecciona seis temas generales para caracterizar a las matemáticas:

(i) Patrones numéricos que implican el reconocimiento de propiedades de colecciones de números;
(ii) Patrones de razonamiento y comunicación que incluyen procesos de argumentación y prueba;
(iii) Patrones de movimiento y cambio donde las matemáticas proveen los objetos (números, puntos, líneas, ecuaciones, gráficas, etc.) para estudiar fenómenos en movimiento.
(iv) Patrones entre figuras o formas geométricas que permiten identificar y examinar propiedades de colecciones de esas figuras;
(v) Patrones de simetría y regularidad que permiten capturar relaciones profundas o abstractas de las figuras u objetos; y
(vi) Patrones de posición donde interesa analizar y describir patrones de acuerdo a su posición y no tanto bajo la consideración de sus propiedades geométricas.

Así, un aspecto esencial durante la interacción con los problemas o contenidos matemáticos, es que los estudiantes busquen, representen y describan cambios o formas de variación (incluyendo invariantes) entre los objetos o atributos asociados con la actividad o problema que los lleven a la identificación de patrones, conjeturas o relaciones.

La investigación, la instrucción y la evaluación en la resolución de problemas

Se ha mencionado que de manera general en un gran número de países se ha declarado a la resolución de problemas matemáticos como un eje importante en la estructura y organización de propuestas curriculares; sin embargo, también se muestran diferencias notables sobre los contenidos y formas de sustentar y estructurar tales propuestas. ¿Cuáles son los principios comunes que caracterizan las propuestas de la resolución de problemas en la educación matemática? ¿Cuáles son los temas fundamentales de la agenda de investigación en la resolución de problema y qué resultados de investigación ha generado? ¿A qué nivel los resultados o productos de investigación en este campo de estudio se utilizan en la elaboración de propuestas curriculares y en las prácticas de instrucción matemática? La discusión de este tipo de preguntas nos permite contrastar la influencia y el impacto de la resolución de problemas en la educación matemática en el ámbito internacional.

La investigación. Los programas de investigación en este dominio, en general, intentan explicar las formas en que los estudiantes o individuos desarrollan el conocimiento matemático a partir de actividades que involucran la resolución de problemas. Entre las preguntas relevantes se incluyen: ¿Qué significa aprender o construir el conocimiento matemático en términos de la resolución de problemas? ¿Cómo los estudiantes desarrollan o construyen las ideas matemáticas? ¿Qué formas de pensar manifiestan y exhiben los estudiantes en la resolución de problemas? Schoenfeld (1992) presenta una caracterización de las dimensiones o categorías que explican el éxito o fracaso de los estudiantes en la resolución de problemas: (a) el conocimiento o recursos básicos que incluye definiciones, hechos, formulas, algoritmos y conceptos fundamentales asociados con un dominio matemático particular o tema; (b) estrategias cognitivas o heurísticas que involucran formas de representar y explorar los problemas con la intención de comprender los enunciados y plantear caminos de solución. Algunos ejemplos de estas estrategias son dibujar un diagrama, buscar un problema análogo, establecer submetas, descomponer el problema en casos simples, etc. (c) las estrategias metacognitivas que involucran conocimiento acerca del funcionamiento cognitivo propio del individuo (¿Qué necesito? ¿Cómo utilizo ese conocimiento?) y estrategias de monitoreo y control del propio proceso cognitivo (¿Qué estoy haciendo? ¿Por qué lo hago? ¿A dónde voy?) y (d) las creencias y componentes afectivos que caracterizan la conceptualización del individuo acerca de las matemáticas y la resolución de problemas, y la actitud y disposición a involucrarse en actividades matemáticas. Este marco de explicación del fracaso o éxito en la resolución de problemas ha sido referencia relevante en el desarrollo de otros marcos conceptuales o perspectivas. Por ejemplo, Puig (1998) reinterpreta y extiende algunas de las dimensiones del modelo de Schoenfeld en la presentación del componente de competencia de un modelo teórico local.

> …El modelo de competencia no se define como “las creencias que los resolutores tienen” sino como una creencia particular que forma parte de la conducta competente del estilo heurístico de resolución de problemas (“la tarea de resolución de problemas se realiza con fines epistémicos”) y con el gestor, que en el modelo de competencia es lo que llamo el “gestor instruido” (Puig, 1998, pp. 125-126).

Socas (2001) propone un modelo de competencias donde resalta aspectos semióticos o de representación de los objetos matemáticos y sus relaciones. Schoenfeld (2007) sugiere que las dimensiones pueden explicar el éxito o fracaso de los estudiantes, pero no explican cómo y por qué los estudiantes exhiben esos comportamientos al resolver problemas. En este contexto las extensiones al trabajo de Schoenfeld se tornan necesarias y útiles.

Las heurísticas y la resolución de problemas

Un tema relevante en los programas de investigación y en las prácticas de instrucción ha sido el documentar el empleo de estrategias heurísticas (Polya, 1945; Krulik & Reys, 1980) en el desarrollo de competencias de resolución de problemas en los estudiantes. Las revisiones de la literatura relacionada con el uso de las heurísticas, (Begle, 1979; Silver, 1985; Schoenfeld, 1992) reportan que los intentos de enseñar a los estudiantes el empleo de las heurísticas no había sido exitoso. Schoenfeld (1992) explica que una razón para esta falta de éxito podría ser que las heurísticas de Polya representaban nombres de una categoría larga o extensa de procesos que incluían otras sub-estrategias que los estudiantes no reconocían o accedían en sus intentos de resolución de problemas. Schoenfeld propone ir más allá de una descripción de las estrategias y ofrecer oportunidades para que los estudiantes desarrollen el poder prescriptivo relacionado con su uso. En particular sugiere (a) ayudar a los estudiantes a desarrollar un gran número de estrategias de resolución de problemas más específicas y que relacionen de forma clara clases específicas de problemas, (b) enseñar estrategias de monitoreo que permitan a los estudiantes aprender cuándo pueden utilizar estrategias apropiadas y el contenido matemático relevante en la resolución de problemas, y (c) desarrollar formas de robustecer las creencias de los estudiantes sobre la naturaleza de las matemáticas, la resolución de problemas, y sobre sus propias competencias o formas de interactuar con situaciones matemáticas.

Es importante mencionar que el empleo de herramientas computacionales en la resolución de problemas no solamente puede facilitar la implementación de las estrategias, sino también potenciar o extender el repertorio de las heurísticas (Santos-Trigo, 2007; 2008). En este contexto, el uso de la tecnología influye directamente en la conceptualización y forma de interactuar con los problemas y como consecuencia incide en el desarrollo de una teoría que explique las competencias de los estudiantes. Moreno-Armella & Santos-Trigo (en prensa) establecen que el uso de herramientas digitales ha permitido la introducción y consideración de aspectos cognitivos matemáticos nuevos en el desarrollo de las competencias de los estudiantes y, como consecuencia, ofrecen un potencial para repensar y estructurar nuevas agendas de investigación.

Conviene presentar un ejemplo donde se ilustra el potencial de una herramienta en el proceso de trabajar una tarea o problema que inicialmente se puede caracterizar de carácter rutinario, pero que un acercamiento inquisitivo de los estudiantes lo transforma en oportunidades para identificar y explorar diversas relaciones matemáticas. En el desarrollo de la actividad (Santos-Trigo & Cristóbal-Escalante, 2008) se describen los acercamientos que mostraron estudiantes del nivel de bachillerato al trabajar dentro de una comunidad de aprendizaje que promueve el uso de herramientas computacionales en actividades de resolución de problemas. Se caracterizan varios episodios donde se identifican temas relevantes asociados con la investigación y las prácticas de instrucción. En particular, en la solución de la actividad se destaca el uso de un software dinámico (Cabri-Geometry) en la representación de la situación y búsqueda de relaciones.

El problema del reparto: A dos estudiantes, Luis y Pablo, encargados de la siembra de hortalizas en el jardín de la escuela, se les asigna un pedazo de tierra en forma de un cuadrado y deciden repartirse el terreno en dos partes de tal manera que a cada uno le corresponda la misma área. Las figuras 1 y 2 representan las dos formas que inicialmente consideraron para dividir el terreno. Otro estudiante, Pedro, les sugiere seleccionar cualquier punto sobre cualquier lado del cuadrado y trazar una recta que pase por ese punto y el centro del cuadrado, Pedro les afirma que esta recta divide el cuadrado en dos regiones que tienen la misma área (Figura 3). ¿Es cierta la afirmación de Pedro? ¿Siempre funciona ese método de dividir el terreno? ¿Existe alguna relación entre el método original de Luis y Pablo con el procedimiento que propone Pedro?

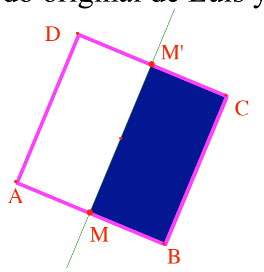

Figura 1: M & M' son puntos medios de AB y DC.

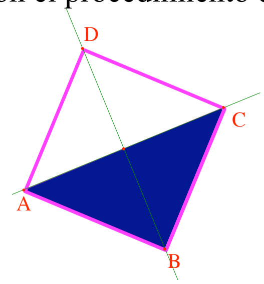

Figura 2: AC es la diagonal de ABCD

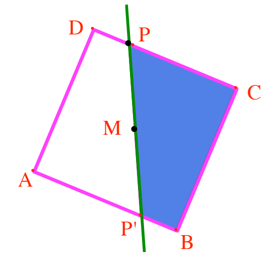

Figura 3: M es el centro del cuadrado y P & P' están sobre el perímetro.

El contexto. La actividad representa el tipo de problemas que se discutieron en sesiones de resolución de problemas en un grupo de estudiantes de grado 11. Los estudiantes trabajaron semanalmente en una sesión de 3 hrs. durante un semestre. La dinámica de las sesiones incluyó el trabajo individual, en parejas, presentaciones del trabajo de las parejas a todo el grupo, y discusiones plenarias coordinadas por el profesor. Los datos que se analizaron provienen de las presentaciones de las parejas y las discusiones plenarias que fueron video-grabadas y transcritas. Se describen los acercamientos de resolución de problemas que emergieron durante el desarrollo de las sesiones y no se pretende analizar en detalle las competencias individuales o comportamiento de cada estudiante al trabajar la actividad.

Primer episodio: **Comprensión del problema**. En general los estudiantes comprendieron el problema y, en los dos primeros casos (Figura 1 y Figura 2), afirmaron que era claro que la línea dividía al cuadrado en dos regiones con la misma área. Al pedirles que escribieran su explicación, cinco de las seis parejas utilizaron una "regla graduada" para medir y argumentar que las dimensiones de los dos rectángulos o triángulos que se forman son las mismas y por lo tanto las figuras eran *iguales*. Solamente una pareja no utilizó una regla y mencionó que en ambos casos el cuadrado había sido dividido en dos figuras congruentes. Se observó también que en el tercer caso (Figura 3) todos los estudiantes utilizaron el software dinámico (Cabri-Geometry) para verificar numéricamente que la línea PP' dividía al cuadrado en dos regiones con la misma área. Además observaron que cuando movían el punto P a lo largo de los lados, para la posición de P en el vértice y el punto medio de un lado coincidía con la posición de la línea de la figura 1 y 2. Es decir, estos dos eran casos particulares del tercer caso (Figura 3).

Segundo episodio: Búsqueda de argumentos matemáticos. En esta fase todos los estudiantes se mostraron convencidos de que la recta que pasa por el centro del cuadrado lo divide en dos regiones de áreas iguales. Aquí utilizaron argumentos visuales donde rotaban el cuadrilátero P'BCP alrededor del punto M un ángulo de 180 grados que hacía coincidir las dos regiones. También usaron argumentos de congruencia de las figuras. Por ejemplo, una pareja de estudiantes, que fueron los mismos que no utilizaron la regla para medir las dimensiones de las figuras, mostró que los triángulos PMC y P'MA eran congruentes (criterio LAL), esto los llevó a afirmar que los cuadriláteros PDMA y P'BCM tenían la misma área (usando aquí que la diagonal AC divide el cuadrado en dos triángulos congruentes) (Figura 4).

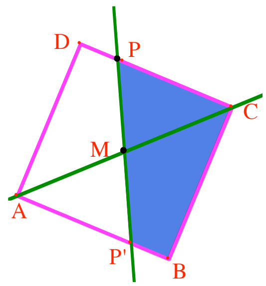

Figura 4: Búsqueda de argumentos para justificar las conjeturas.

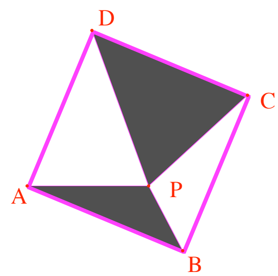

Figura 5: El punto P puede ser cualquier punto en el interior del cuadrado.

En la discusión con todo el grupo de estudiantes se abordó la importancia de presentar distintos tipos de argumentos y sus relaciones o conexiones. En ese momento, el profesor sugirió seleccionar cualquier punto P dentro del cuadrado y trazar segmentos que unieran el punto P con los vértices del cuadrado para formar los triángulos APB, BPC, CPD, y DPA (Figura 5). Con base en esta construcción, a Juan le correspondería la parte sombreada y a Pablo la otra parte del cuadrado. ¿Con esta repartición cada estudiante obtiene regiones con la misma área total? Justifique su respuesta.
Otra vez, los estudiantes utilizaron el software para representar y observar que al mover el punto P en el interior del cuadrado, la suma de las áreas de las regiones sombreadas y blancas era la misma. Los argumentos que se presentaron para justificar la conjetura incluyeron trazar la perpendicular del punto P a los lados del cuadrado y observar que el cuadrado se divide en cuatro rectángulos: HPEC, EPFD, FPGA, y HPGB (Figura 6).

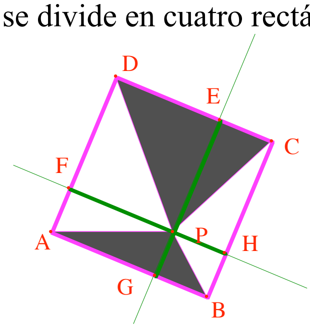

Figura 6: El argumento de los rectángulos.

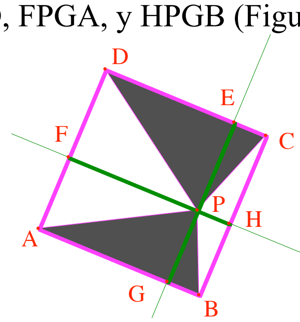

Figura 7: ¿Cómo calcular la suma de las áreas?

Aquí argumentaron que cada uno de los rectángulos incluye dos triángulos (uno sombreado y otro blanco) que tienen la misma área. Otro acercamiento incluyó calcular las áreas de los triángulos y observar que la suma de las áreas de los triángulos sombreados es la mitad del área del cuadrado (Figura 7).

$$A(\Delta CPD)+A(\Delta APB)=\frac{d(DC)\times d(EP)}{2}+\frac{d(AB)\times d(GP)}{2}=$$
$$=\frac{d(AB)\times(d(EP+PG)}{2}=\frac{d(AB)\times d(BC)}{2}$$

Tercer episodio: Búsqueda de otros métodos de solución y extensiones. Durante la discusión de los argumentos utilizados para justificar los métodos o procedimientos de reparto, un estudiante preguntó: ¿Existe otro método diferente aparte del que propuso el profesor? Hugo, quien se mostró hábil en el uso de la herramienta, propuso trazar rectas paralelas a DC y AD que pasaran por el punto P. Estas líneas intersecan a los lados del cuadrado en los puntos Q, S y R y T respectivamente. Entonces, el área del cuadrilátero QRST es la misma que el área de la región blanca (Figura 8).

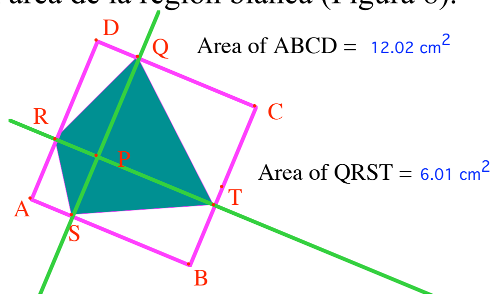

Figura 8: El área de QRST es la misma que el área de la región blanca.

La mayoría de los estudiantes reconocieron que el método de Hugo también funcionaba ya que involucraba un argumento que ellos habían utilizado antes en la figura 6 para demostrar que el área total sombreada era la misma que el área total de la región blanca. Aquí era evidente que el uso del software llegó a ser una herramienta de resolución de problemas para los estudiantes. El profesor una vez más retó a los estudiantes a explorar si el método utilizado para dividir el terreno cuadrado también se podía aplicar a terrenos con otras formas. ¿Pueden mostrar que el procedimiento funciona para dividir figuras como rectángulos, paralelogramos, pentágonos, etc? Algunos estudiantes demostraron que el método también se podía aplicar a rectángulos. De hecho, otros estudiantes se dieron cuenta que cuando la forma del terreno era un paralelogramo, el cual es un caso más general que el rectángulo, los métodos utilizados para dividir el cuadrado también funcionaban (Figura 9 y 10).

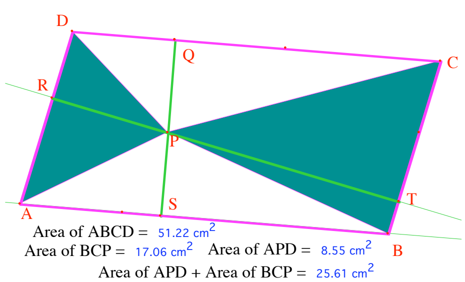

Figura 9: Área de APD + área de BCP = la mitad del área de ABCD.

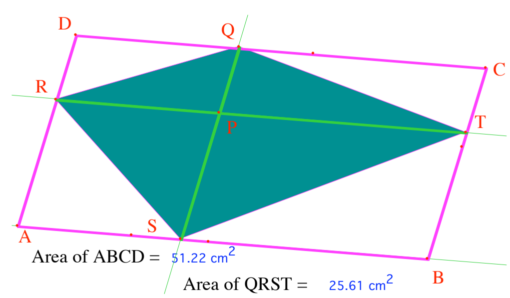

Figura 10: Área de QRST es la mitad del área de ABCD.

Además de verificar con el empleo de la herramienta que para distintas posiciones del punto P ambos métodos para dividir el terreno en áreas iguales funcionaban, los estudiantes también participaron en la construcción de un argumento formal para sustentar la conjetura. Se observó en la figura 9 que el área de ABCD se puede expresar como $d(AB)\times d(QS)=d(AD)\times d(RT)$ mientras que la suma de las áreas de los triángulos ADP y BPC se puede escribir como:

$$\frac{d(AD)\times d(RP)}{2}+\frac{d(BC)\times d(PT)}{2}=\frac{d(AD)(d(RP)+d(PT))}{2}=\frac{d(AD)\times d(RT)}{2}.$$

Y esta expresión es la mitad del área de ABCD. De la misma manera, en la figura 10 los estudiantes argumentaron que las rectas RT y QS, las cuales son paralelas a los lados AB y BC dividen al cuadrilátero ABCE en cuatro paralelogramos (RPQD, PFCQ, ASPR, y SBTP). Las diagonales de cada paralelogramo dividen a cada paralelogramo en dos triángulos congruentes. Por lo tanto el área de la región sombreada es la misma que el área de la región blanca.

Los estudiantes exploraron la validez del procedimiento para dividir en dos partes iguales un hexágono. Usaron el comando "regular polygon" para dibujar un hexágono y un punto P en su interior. Dibujaron segmentos perpendiculares del punto P a los lados CB, AB, FE, y DE. Observaron que para distintas posiciones del punto P, el área de GHIJ correspondía a la mitad del área del hexágono (Figura 11). Mostraron que el área del polígono GHIJ era la mitad del área del rectángulo E'F'B'C'. Este se construyó a partir de considerar el punto E' como la recta perpendicular a la recta EF que pasa por el punto I y la recta EF; el punto C es la intersección de esa perpendicular con la recta BC, B' es el punto de intersección de la recta BC y la perpendicular a BC que pasa por el punto G; y el punto F' es la intersección de esa perpendicular con la recta EF. Argumentaron que el área del rectángulo E'F'B'C' correspondía al área del hexágono original (Figura 12).

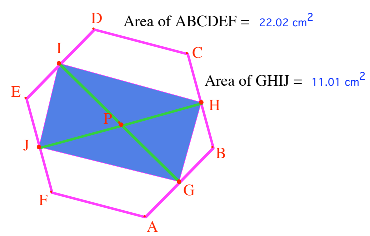

Figura 11: ¿Funciona el método para un hexágono?

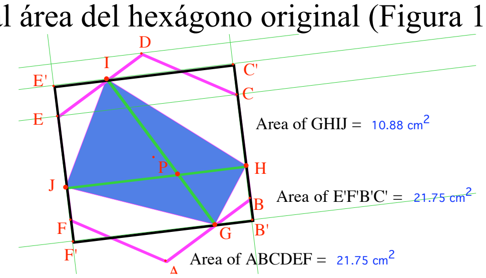

Figura 12: Búsqueda de un argumento para validar la conjetura.

La meta de los estudiantes fue verificar la conjetura: El área del rectángulo E'F'B'C' es la misma que el área del hexágono. Además, con el uso del software, algunos estudiantes observaron que los puntos de intersección (U, V, y T) de la rectas ED y BC; BC y AF, y ED y AF respectivamente, son los vértices del triángulo equilátero UVT (Figura 13).

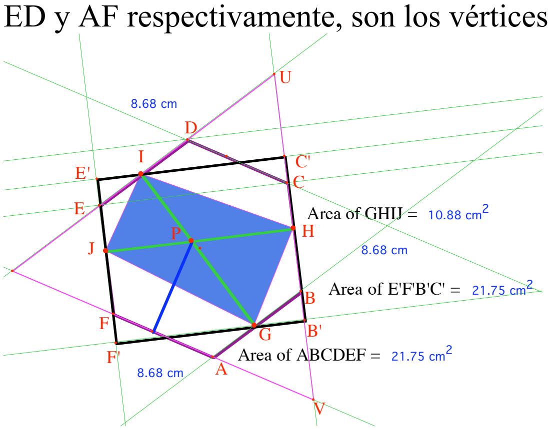

Figura 13: Buscando relaciones en el hexágono ABCDEF.

Los estudiantes mostraron que las rectas que pasan por el centro del hexágono y un punto sobre un lado de la figura, dividen al hexágono en dos regiones de áreas iguales (Figure 14). El profesor pidió justificar la existencia del triángulo equilátero y la posible relación entre la altura del triángulo y la suma de los segmentos perpendiculares trazados desde el punto P a cada lado del triángulo UVT. Otra vez, el uso de la herramienta resultó importante en la búsqueda de relaciones y argumentos para validarlas.

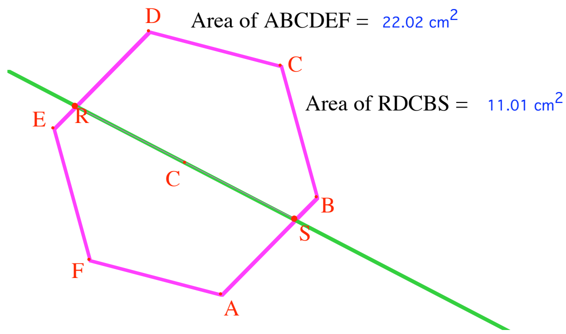

Figura 14: Una recta que pasa por el centro del hexágono lo divide en dos regiones de áreas iguales.

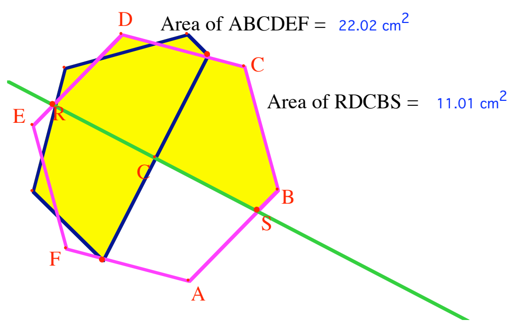

Figura 15: Rotación del polígono SBCDR un ángulo de 90 alrededor del punto C

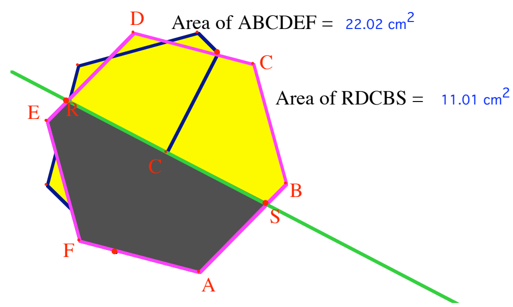

Figura 16: Rotación de la figura SBCDR un ángulo de 180 alrededor del punto C

Los estudiantes observaron que al rotar una de las regiones (e.g. SBCDR) 180 grados alrededor del punto O (centro del hexágono), las regiones SBCDR coincidían con las regiones REFAS (Figura 16). Así emplearon este argumento para concluir que ambas regiones tenían las mismas áreas. Posteriormente, en esta discusión colectiva los estudiantes formularon otra conjetura: Para cualquier polígono con un número par de lados, las líneas que pasan por el centro del polígono lo dividen en dos regiones de áreas iguales.

Una conexión. El empleo del software llevó a los estudiantes a explorar invariantes y relaciones dinámicamente. Por ejemplo, al mover el punto P (Figura 6) dentro del cuadrado, observaron que el área del cuadrilátero QRST permanecía constante; sin embargo, el perímetro cambiaba al mover el punto P. ¿Dónde debe situarse el punto P para que el cuadrilátero inscrito tenga el perímetro mínimo? La figura 17 muestra que cuando el punto P se sitúa en el centro del cuadrado, entonces se tiene que el cuadrilátero se convierte en un cuadrado con el perímetro mínimo.

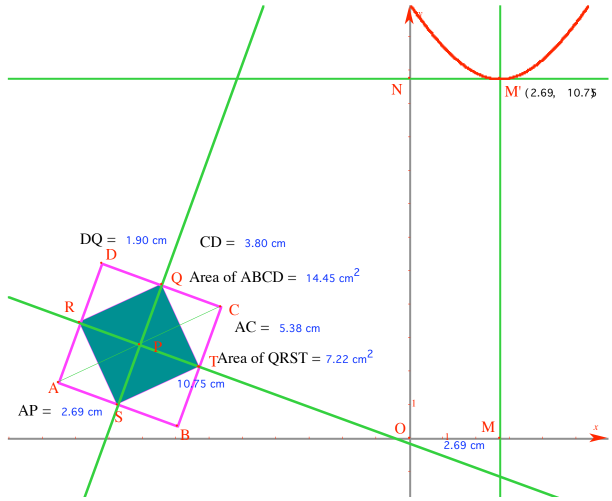

Figura17: Cuando P se sitúa en el centro del cuadrado, el cuadrilátero QRST alcanza el perímetro mínimo.

Comentario: En el desarrollo de la actividad se distinguen aspectos relacionados con la caracterización de la resolución de problemas, las prácticas de instrucción y el empleo de herramientas computacionales. En el proceso de interactuar con la actividad se ilustra que la discusión de caracterizar inicialmente la naturaleza del problema como rutinario o no-rutinario no resulta importante ya que lo que interesa es que los estudiantes exhiban una disposición y conceptualicen un problema o ejercicio como una oportunidad para buscar, identificar, explorar, extender, y sustentar nuevas relaciones matemáticas (Camacho & Santos, 2006). En este camino, lo fundamental es que los estudiantes desarrollen un método inquisitivo que les permita formular constantemente preguntas y explorarlas en términos de recursos matemáticos (Santos-Trigo, Espinosa-Pérez & Reyes-Rodríguez, 2008). Así, más que centrar la discusión sobre lo que sería un problema lo que interesa es que la actividad sea considerada por los estudiantes como un punto de partida para involucrarse en un proceso inquisitivo que les permita formular y explorar diversas relaciones matemáticas.

Otros acercamientos teóricos

En Francia, un país con una tradición notable en el desarrollo de la matemática, Artigue & Houdement (2007) documentan lo que consideran dos perspectivas diferentes, pero no independientes de la resolución de problemas: La investigación didáctica y la selección curricular. La discusión del desarrollo de la investigación de la resolución de problemas la abordan a partir del marco teórico (la teoría de situaciones didácticas, TSD) desarrollado por Brousseau que ha sido progresivamente robustecido y continúa como una perspectiva dominante, junto con la teoría antropológica de la didáctica (TAD) en la educación matemática francesa. Un principio epistemológico en la teoría de las situaciones didácticas es que el conocimiento emerge del proceso de resolver problemas matemáticos. De acuerdo con la teoría:

> El conocimiento matemático se atribuye a funciones diferentes que están ligadas a tres categorías de situaciones: Situaciones de acción, de comunicación, y de validación. Emerge primero como un medio para la acción a través de modelos que pueden permanecer implícitos, pero no pueden desarrollarse sin la construcción de un

> lenguaje apropiado y tiene entonces que llegar a ser parte de un cuerpo coherente de conocimiento. Estos pasos diferentes dependen de dialécticas distintas; dialécticas de acción, formulación y validación, las cuales requieren, para llegar a ser efectivas, organizaciones distintas de las relaciones de los estudiantes con el conocimiento matemático (Artigue & Houdement, 2007, p. 366).

En el marco de la teoría antropológica que de acuerdo con Artigue & Houdement (2007), representa una extensión de la teoría de la transposición didáctica propuesta por Chevallard donde reconoce una relación directa entre la resolución de problemas y el desarrollo del conocimiento matemático. "Dentro de las instituciones, el conocimiento matemático emerge de la resolución de tipos de tareas y del desarrollo asociado de las técnicas (la praxis) y del desarrollo de un discurso que explica y justifica las técnicas utilizadas" (p. 367). En respuesta a las críticas sobre la opacidad y dificultad de comprender algunos marcos teóricos desarrollados y utilizados por los investigadores franceses, Kieran (2008) describe ejemplos donde la didáctica francesa ha influido en el desarrollo de la investigación de algunos investigadores canadienses. También muestra evidencias sobre el interés de los franceses por contrastar y robustecer sus acercamientos teóricos a partir de la interacción con otros investigadores en un contexto internacional.

En Japón, Hino (2007) identifica varias líneas de investigación sobre el análisis de los procesos cognitivos del estudiante al trabajar actividades de resolución de problemas. En particular reporta estudios sobre el comportamiento de los estudiantes en los procesos de resolver problemas, en aspectos relacionados con las estructuras y contextos de los problemas, y en relación con el desarrollo de las habilidades de resolución de problemas.

> El énfasis en el análisis e interpretaciones fue variado, incluyendo representación, meta, motivación, elaboración, control/monitoreo y reflexión. El análisis detallado y fino de las transformaciones de las representaciones de los estudiantes en el uso de las estrategias y el curso de resolución de problemas también se observaron (Hino, 2007, p. 505).

Da Ponte (2007) utiliza el término "exploraciones matemáticas e investigaciones" para presentar aspectos de la resolución de problemas que se han desarrollado en Portugal desde del inicio de la década de los 90s. En el proceso de trabajar "exploraciones matemáticas e investigaciones" los estudiantes simulan o practican aspectos que se distinguen en la actividad matemática como la formulación de preguntas, la búsqueda y justificación de conjeturas. Así la actividad de investigar "significa trabajar a partir de una pregunta en la cual uno está interesado, que al principio puede ser confusa, pero que uno es capaz de clarificar y estudiar en una forma organizada" (Da Ponte, 2007, p. 421). Da Ponte también argumenta que el término investigación puede resultar intimidante y es por esto que en la práctica se habla de exploraciones, que aunque son de naturaleza abierta, no son tan sofisticadas como las investigaciones. En ambos casos los términos investigaciones y exploraciones se refieren a situaciones donde el problema no se formula completamente antes de presentarlo a los estudiantes, sino que los estudiantes participan en la formulación de las preguntas a responder.

Da Ponte (2007) señala que a partir de relacionar la noción de investigación matemática con el aprendizaje de los estudiantes se desarrollan estudios en temas que incluyen: (i) El desarrollo de las habilidades de los estudiantes al realizar las investigaciones; (ii) la promoción del aprendizaje de las matemáticas en los estudiantes; (iii) las actitudes y concepciones que desarrollan los estudiantes al trabajar en las investigaciones y (iv) la educación y prácticas de los profesores. Estas áreas de investigación se han ido robusteciendo y en la actualidad las exploraciones e investigaciones se organizan en unidades de enseñanza y ofrecen la posibilidad de analizar el comportamiento de los estudiantes en escenarios más cercanos a lo que ocurre en el salón de clase.

En Alemania, donde existen raíces históricas en áreas como la psicología y el desarrollo de las matemáticas, la investigación buscó investigar los procesos mentales del individuo cuando resuelve problemas; sin embargo, los resultados de la investigación no se relacionaron directamente con el aprendizaje de las matemáticas. Como en otros países, el trabajo de Poya (1945) llegó a ser un referente importante en la educación matemática en Alemania y que posteriormente se retoma junto con el trabajo de Felix Klein y orienta la educación matemática durante el década de los 60s (Reiss, & Törner, 2007).

English, Lesh & Fennewald (2008) identifican tres obstáculos que han limitado el desarrollo de la investigación en la resolución de problemas: (i) no existe una acumulación de información sobre resultados de estudios que se han realizado en la resolución de problemas y que pueda ser analizada y contrastada de manera sistemática. Teorías o marcos que surgieron en la fase inicial de resolución de problemas han sido reciclados sin pasar por un escrutinio acerca de su pertinencia y limitaciones; (ii) las teorías existentes no explican de manera robusta los procesos que involucran el desarrollo de conceptos o habilidades básicas o cómo se relacionan con la resolución de problemas; (iii) la debilidad inherente a los estudios que involucran observaciones o experimentos de enseñanza –y las hipótesis o suposiciones que sostienen, muchas veces implícitamente, que una gran teoría puede ser capaz de describir todos los sistemas conceptuales, de instrucción y de evaluación que son moldeados por las mismas perspectivas teóricas que están siendo utilizadas para desarrollarlas.

La instrucción y el diseño curricular. El currículum y las prácticas de instrucción que se sustentan bajo los principios de la resolución de problemas han sido un tema dominante en el ámbito internacional. (¿Qué es lo que distingue una propuesta de instrucción que refleje los principios de la resolución de problemas? ¿Qué tipo de problemas o actividades de instrucción promueven la construcción del conocimiento matemático de los estudiantes?). La NCTM (2000) propone un marco con una visión global de las matemáticas que se deben estudiar a nivel pre-universitario. En el documento destacan cinco estándares de contenidos (números y operaciones; geometría y sentido espacial; patrones, relaciones y álgebra; medición, análisis de datos y probabilidad) y cinco estándares de procesos del pensamiento matemático (resolución de problemas, razonamiento y prueba, comunicación, conexiones y representaciones). La visión matemática que promueve el documento ha sido una referencia importante en propuestas curriculares en países como Alemania, Estados Unidos, Portugal, y México entre otros.

La pertinencia y consistencia entre las metas, el espíritu del documento (los estándares) y las propuestas del currículum que emergen al incorporar los principios y la visión que se promueve es un tema importante que debe abordarse directamente entre educadores y profesores de matemáticas. Una reflexión inicial implica discutir los cambios que demandan la estructura y organización de los contenidos en una propuesta que reflejen de manera clara los principios y visión matemática de los estándares. Es común encontrar propuestas donde se introduce el uso del lenguaje de los estándares y se mantiene la rigidez y estructura de los contenidos en forma tradicional; o se suman a propuestas tradicionales ciertos apartados que hacen referencia a los propósitos de los estándares (Santos-Trigo, 2007).

Arcavi & Friedlander (2007) documentan los puntos de vistas sobre los problemas y la resolución de problemas que manifiestan líderes de grupos responsables del diseño y uso de proyectos curriculares en la educación elemental (grados 1-6) en Israel. Encontraron que en general los líderes coincidían en lo que significa los términos problema y resolución de problemas. Por ejemplo, "trabajar ejercicios rutinarios y la práctica de técnicas de repetición no las consideran actividades de resolución de problemas" (p. 362); sin embargo, no necesariamente coincidieron en caracterizar lo que para ellos no constituye o se identifica como un problema. En general, hubo coincidencia en que los problemas pueden ser de diferentes clases, y pueden ser clasificados de distintas maneras –por ejemplo, por su representación, su naturaleza, metas, dominio, y de acuerdo con su lugar en la secuencia curricular. Arcavi & Friedlander sugieren realizar proyectos de investigación donde "se observe, documente y discuta a un nivel fino o de detalle cómo la enseñanza de la resolución de problemas puede fomentarse en el salón de clases o cómo un currículum intentado es implementado" (p. 363).

En los Países Bajos (Holanda) se reconoce la importancia de implementar un currículum orientado en problemas de acuerdo a los principios de la educación matemática realista. La relación de la educación matemática realista con la resolución de problemas se manifiesta en el reconocimiento que el mundo real es una fuente o punto de partida para el desarrollo de los conceptos matemáticos.

> Problemas contextuales bien seleccionados ofrecen oportunidades para que los estudiantes desarrollen estrategias de solución informales, altamente contextualizadas, y se utilizan en la construcción de conceptos matemáticos…el contexto puede aún ser no realista o [ubicarse] dentro de las matemáticas, si el desarrollo del concepto lo requiere. Sin embargo, el contexto del problema debe ser experimentado como real por los estudiantes…El mundo real se utiliza como un dominio en el cual podemos usar nuestros conceptos matemáticos en la forma que deseemos (Doorman, Drijvers, Dekker, Van den Heuvel-Panhuizen, de Lange & Wijers, 2007, p.406-407).

Se observa que la visión o perspectiva de la educación matemática realista, que resalta la idea de que los problemas sean vistos por los estudiantes como situaciones auténticas para desarrollar el pensamiento matemático, aporta las bases o elementos para promover la resolución de problemas.

En China la resolución de problemas se orienta hacia la parte de contenidos curriculares y los aspectos de instrucción. "Una de las metas en la enseñanza de las matemáticas continúa siendo el ayudar a los estudiantes a aprender métodos, los cuáles pueden ser transferidos y aplicados a otros problemas" (Cai & Nie, 2007, p. 462). En

relación a las prácticas de instrucción, existen tres actividades de aprendizaje que son relevantes en el desarrollo de la instrucción: (i) Un problema con soluciones múltiples donde el profesor presenta un problema e invita o provee oportunidades a sus estudiantes para que resuelvan el problema de maneras distintas; (ii) un problema con múltiples cambios donde el profesor motiva a sus estudiantes a resolver variaciones de un problema después de que el problema original ha sido resuelto. La variación del problema puede también ocurrir en el proceso de resolver el problema; (iii) múltiples problemas con una solución donde los profesores orientan o guían a sus estudiantes a usar un método de solución para resolver un conjunto de problemas. El conjunto de problemas puede poseer diferentes características superficiales, pero comparten la misma estructura profunda (Schoenfeld, 1985).
De acuerdo con da Ponte, las actividades alrededor de las "exploraciones matemáticas e investigación" han influido en el diseño e implementación del currículum oficial portugués y documenta que las experiencias realizadas a pequeña escala muestran su potencial en el logro de los objetivos del currículum; sin embargo, también manifiesta que:

> [El papel de las investigaciones junto con el uso las tecnologías de la comunicación] como soporte para el desarrollo del conocimiento y las competencias matemáticas necesita aún una exploración más profunda, lo mismo que el asunto de cómo integrar las prácticas de instrucción y cómo diseminarlas a gran escala (Da Ponte, 2007, p. 429).

Burkhardt & Bell (2007) documentan rasgos generales de la resolución de problemas en el Reino Unido. Empiezan identificando la resolución de problemas con el proceso de abordar tareas que son significativamente diferentes de aquellas que uno ha aprendido mecánicamente; una parte del reto está en decidir cómo abordar el problema y qué tipo de conocimiento o recurso matemático se puede utilizar.

> Un resolutor de problemas necesita un rico y conectado entendimiento de las matemáticas y la habilidad de ver patrones de similitud y asociación, también como las destrezas para llevar a cabo un plan de solución y revisar que los resultados tienen sentido en el contexto del problema (Burkhardt & Bell, 2007, p. 395).

Las aplicaciones han tenido un lugar privilegiado en las matemáticas y en la educación matemática en Inglaterra. Así la resolución de problema se enfoca principalmente en la construcción de modelos que permitan matematizar diversas situaciones. El reporte Cockcroft (1982) (citado en Burkhardt & Bell, 2007, pp. 398-399) en respuesta a la preocupación expresada por líderes de negocios y de la industria en relación al mejoramiento de la educación, indica que la enseñanza de las matemáticas en todos los niveles debe incluir oportunidades para:

La exposición del profesor
La discusión entre el profesor y los estudiantes y entre los mismos estudiantes
Un trabajo práctico apropiado
La consolidación y práctica de destrezas fundamentales y rutinas

La resolución de problemas, incluyendo la aplicación de las matemáticas en situaciones cotidianas.

Burkhardt & Bell (2007) sugieren que el reporte Cockcroft fue la base para construir un progreso sólido en la educación matemática y propició el diseño de materiales interesantes para la enseñanza y el desarrollo profesional de los profesores en la resolución de problemas (Shell Centre, 1984).

Con respecto a la enseñanza en Japón, Hino (2007) sugiere que el empleo de problemas abiertos es uno de los métodos representativos para promover el desarrollo de las habilidades de los estudiantes en la resolución de problemas. Un problema abierto es un problema que es formulado de tal manera que tenga múltiples soluciones correctas. Un ejemplo de este tipo de problema es escoger los números que corresponden a los días de un mes y encerrar tres de ellos y preguntarse acerca de las reglas o patrones que se encuentren en esos tres números. La misma pregunta pero ahora encerrando cuatro números. En términos de la estructura de la clase, Hino (2007) describe las siguientes actividades de instrucción (a) revisión de la lección previa y presentación preliminar del problema del día; (b) el trabajo individual y la presentación de las ideas a todo el grupo; (c) presentación del problema del día y el trabajo del problema individual y la presentación a la clase; (d) comparación de las soluciones y analizar las ventajas y limitaciones de los métodos de solución; (e) reflexiones sobre la sesión.

Santos (2007) reporta que varias propuestas curriculares explícitamente identifican a la resolución de problemas como una actividad central en el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes y el lenguaje en la presentación distingue aspectos del quehacer matemático; sin embargo, no existe claridad en cuanto al significado de organizar un currículum bajo la perspectiva de la resolución de problemas. ¿Cuáles son los contenidos fundamentales de la educación preuniversitaria, por ejemplo, y cómo se estructuran u organizan en términos de actividades de resolución de problemas? ¿Cómo hacer visible en la propuesta la interdependencia entre los contenidos y los procesos del quehacer o práctica de la disciplina? Este tipo de preguntas han estado fuera de la discusión en la agenda de la resolución de problemas. Como consecuencia no existe un consenso sobre lo que una propuesta curricular que refleje la resolución de problemas debe incluir en términos de contenidos, más allá de solamente utilizar un discurso o de señalar la necesidad de fomentar las actividades propias de esta perspectiva.

El reconocimiento de que pueden existir varios caminos para organizar una propuesta del currículum que promueva la resolución de problemas implica la necesidad de explicitar cómo los principios de esta perspectiva se distinguen en la organización y estructura de los contenidos. Por ejemplo, si en la resolución de problemas interesa que los estudiantes identifiquen, representen, exploren y justifiquen diversas conjeturas asociadas con la comprensión de los conceptos matemáticos, entonces resulta esencial que el currículum se organice alrededor de las ideas o conceptos fundamentales que se deben estudiar de manera profunda en los distintos niveles educativos. Es decir, es necesario transformar las listas extensas de temas o contenidos que aparecían en las propuestas tradicionales del currículum en un conjunto de temas relevantes donde se muestre su desarrollo y las formas de conectarse en diversos dominios que antes se estudiaban de manera independiente como el álgebra, la geometría, la estadística, el cálculo y la probabilidad.

> La resolución de problemas exitosa requiere del conocimiento del contenido matemático, del conocimiento de estrategias de resolución de problemas, de un auto-monitoreo efectivo, y una disposición productiva a plantear y resolver problemas. La enseñanza de la resolución de problemas requiere aún más de los profesors, ya que deben ser capaces de promover tal conocimiento y actitudes en sus estudiantes. …La enseñanza en sí misma es una actividad de resolución de problemas (NCTM, 2000, p. 341).

En este contexto, la resolución de problemas es una forma de interactuar y pensar acerca de las situaciones que demandan el empleo de recursos y estrategias matemáticas. Arcavi (2000) utiliza actividades de la resolución de problemas para identificar, analizar, reflexionar sobre sus experiencias y formas de realizar investigación en la educación matemática. En este proceso, formula y discute preguntas como: ¿Cómo seleccionar preguntas de investigación? ¿Cómo evaluar su pertinencia y relevancia? ¿Cómo formular preguntas de investigación? ¿Qué tipos de diseños o métodos de investigación seleccionar? Es decir, la resolución de problemas conlleva al desarrollo o construcción de un pensamiento inquisitivo donde el conocimiento matemático se conceptualiza en términos de dilemas o preguntas que demandan el uso y formas de pensar consistentes con el quehacer de la disciplina. Así la resolución de problemas es un dominio inquisitivo donde los estudiantes constantemente formulan preguntas, identifican conjeturas o relaciones, buscan varias maneras de sustentarlas (incluyendo argumentos formales), y comunican resultados. Implica el desarrollo de una disposición a cuestionar, explorar preguntas y desarrollar una comprensión matemática dentro de una comunidad que valore y aprecie el trabajo individual y de colaboración, y la necesidad de constantemente reflexionar sobre el mismo proceso de construcción del conocimiento.

La evaluación del conocimiento matemático en la resolución de problemas

Un tema fundamental que la mayoría de los países asocian con la resolución de problemas es el que se relaciona con las evaluaciones internacionales como PISA y TIMSS. Lesh & Zawojewski (2007) afirman que esta tendencia se debe al reconocimiento y valoración de la evaluación de las competencias básicas a nivel mundial y a la relación entre los objetivos de las evaluaciones y las propuestas del currículum. De hecho, en algunos países los resultados de evaluaciones internacionales han sido utilizados para cuestionar el sistema educativo en general y buscar caminos de reforma. De acuerdo con Reiss & Törner (2007), en Alemania, los resultados de PISA han influido en el establecimiento de un programa de investigación en la resolución de problemas y en el reconocimiento de proponer estándares para las matemáticas escolares. Estos estándares incorporan aspectos relevantes de los propuestos por la NCTM, 2000.

> …uno puede establecer que ahora existen bases curriculares para la resolución de problemas como parte de las matemáticas escolares en Alemania. …los estándares introducen un concepto de resolución de problemas que no está restringido a partes específicas del salón de clases pero la motiva como una actividad importante…La resolución de problemas no debe ser considerada como

> una actividad aislada, sino como un hábito de la mente en el salón de clases (Reiss y Törner, 2007, p. 438).

¿Qué significa, en términos de competencia o aprendizaje de la disciplina, los resultados de los exámenes internacionales? ¿Cuál es la relación entre los indicadores que se reflejan en ese tipo de exámenes y la selección del currículum y las formas de enseñanza? Existen diversos factores que influyen en el desempeño académico de los estudiantes. Algunos, se relacionan directamente con el tipo de contenidos y las prácticas de enseñanza. Otros, incluyen los hábitos de estudio que los propios estudiantes han desarrollado en sus experiencias de aprendizaje, así como el acceso a distintos materiales incluyendo aquí las herramientas tecnológicas. Gardner (2000) afirma que la forma de evaluación en la mayoría de las escuelas se reduce a un solo examen que se aplica al final de una unidad y que se mantiene en secreto hasta entonces. Los estudiantes no saben o les tiene sin cuidado las particularidades de su aprovechamiento; sólo quieren saber sus calificaciones finales. ¿Qué cultura matemática debe poseer el estudiante al terminar sus estudios pre-universitarios?¿Qué relación existe entre las matemáticas escolares y el desempeño del estudiante en la vida cotidiana? ¿Qué tan importante es incrementar el número de profesionistas en áreas como ingeniería, ciencias y matemáticas? ¿Cuáles son los vínculos entre la educación primaria, secundaria, media superior y superior? ¿Cómo se formula e implementa el currículum en esos niveles? ¿Qué tipo de problemas ayudan a los estudiantes a desarrollar recursos matemáticos que pueden utilizar más allá del ambiente escolar? La discusión de este tipo de preguntas resulta importante para proponer formas de evaluar y monitorear el desarrollo del conocimiento matemático de los estudiantes.

La creencia de que los problemas matemáticos tienen solamente una respuesta correcta tiende a ser contraproductiva en el contexto de problemas complejos que involucran múltiples formas o caminos razonables de solución o diversas soluciones; sin embargo, cuando los estudiantes se enfrentan a exámenes de opción múltiple, como muchos de los incluidos en las evaluaciones internacionales (PISA, TIMSS, etc.) esta creencia puede resultar benéfica.

Además, los países donde los estudiantes han mostrado consistentemente un alto aprovechamiento en las evaluaciones internacionales han reconocido que no es suficiente promover una cultura matemática alrededor de la evaluación, sino construir propuestas que guíen a los estudiantes hacia el desarrollo de un pensamiento crítico y la resolución de problemas. Por ejemplo, conviene discutir formas de utilizar los problemas o preguntas que se incluyen en las evaluaciones internacionales de modo que sean un vehículo para promover una reflexión en los estudiantes donde se incluya la búsqueda de distintas formas de resolver o extender el problema.

Los resultados de las evaluaciones internacionales han generado inquietud en todos los niveles de la sociedad, en particular, la comunidad académica no debe aislarse de esta realidad y resulta necesario identificar los aspectos importantes alrededor de esta problemática que permitan proponer algún camino de solución. Los que desarrollan la disciplina (matemáticos); los que realizan investigación en educación matemática (educadores matemáticos); los que guían a los estudiantes en sus experiencias de aprendizaje (profesores); y los usuarios de las matemáticas deben participar directamente en una colaboración profesional que permita establecer un marco de discusión donde se

relacionen los avances de la disciplina, la necesidad de una formación matemática de todos los estudiantes y las distintas formas de aprendizaje.
En general, el marco y modelo de las preguntas de PISA es consistente con algunos aspectos y el espíritu de los problemas que se utilizan en la perspectiva realista (perspectiva Holandesa) y los resultados que muestran los estudiantes holandeses en las evaluaciones de PISA han sido satisfactorios. Sin embargo, en un estudio sobre el desempeño de estudiantes en la resolución de problemas de cuarto año identificados con alto aprovechamiento (los profesores seleccionaron a sus mejores estudiantes) se encontró que la mayoría de los estudiantes no utilizó el espacio dado en cada pregunta para intentar o resolver los problemas. Por ejemplo, en la pregunta (Doorman, et, al., 2007, p. 410):
Encontrar el número:
Que es menor que 100
Si lo divides entre 7, no existe residuo
Si lo divides entre 3, el residuo es 2
Si lo divides entre 5, el residuo es 1.
Los resultados indican que de los 152 estudiantes, solamente 39 respondieron correctamente. De estos 39, solamente 20 utilizaron el espacio dado o alguna hoja para escribir las ideas que los llevaron a la respuesta. Y de los 113 que respondieron incorrectamente, solamente 74 reportaron un trabajo escrito. Doorman, et, al. (2007, p. 410) mencionan que, al revisar las respuestas de los estudiantes y complementar la información de las entrevistas posteriores a los participantes, se encontraron tres tendencias: muchos estudiantes no escribieron sus ideas, otros ni iniciaron, y de los que comenzaron un buen número mostró una falta de persistencia.
En el ejemplo anterior es evidente que los estudiantes no acceden a recursos previos que les permitan representar y analizar distintas formas de resolver el problema. Por ejemplo, una lista ordenada de los números con las propiedades que se piden proporciona un camino para resolver el problema. Además, de la misma representación del problema los estudiantes pueden plantear nuevas preguntas o problemas. Así el reto de la instrucción es propiciar condiciones para que los alumnos vean o conceptualicen los ejercicios o problemas como oportunidades para utilizar varios caminos de solución y además de extender o formular otros problemas. La siguiente tabla resalta todos los números múltiplos de 7 que son menores que 100. Posteriormente el problema se reduce a eliminar de los 14 candidatos aquellos que no cumplan las otras condiciones, para finalmente identificar la solución. Aquí los estudiantes pueden aplicar distintas estrategias para llegar a la respuesta y plantear otras preguntas. En este contexto, lo que se intenta es que los estudiantes conceptualicen este tipo de preguntas como oportunidades para utilizar representaciones que naturalmente los lleven a la búsqueda de otras relaciones.

1	2	3	4	5	6	**7**	8	9	10
11	12	13	**14**	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	**28**	29	30
31	32	33	34	**35**	36	37	38	39	40
41	**42**	43	44	45	46	47	48	**49**	50
51	52	53	54	55	**56**	57	58	59	60
61	62	**63**	64	65	66	67	68	69	**70**
71	72	73	74	75	76	**77**	78	79	80
81	82	83	**84**	85	86	87	98	89	90

91	92	93	94	95	96	97	**98**	99	100

7, 14, **21**, 28, **35**, 42, 49, 56, **63**, **70**, 77, 84, 91, 98

Los problemas o dificultades que experimentan los estudiantes en la educación básica también aparecen en estudiantes de grados superiores. Selden, Selden, Hauk, & Mason (2000) reportaron en una serie de estudios que aun estudiantes universitarios que han obtenido buenas calificaciones en sus cursos de cálculo fueron incapaces de identificar y emplear recursos básicos que les ayudaran a resolver problemas de cálculo no rutinarios. Uno de los problemas empleados en el estudio fue "¿Tiene $x^{21} + x^{19} - x^{-1} + 2 = 0$ raíces reales entre –1 y 0? (justifique su respuesta)". Ninguno de los estudiantes participantes planteó caminos viables o resolvió este problema, la mayoría intentaron estrategias de ensayo y error y en ningún momento relacionaron el problema con el uso de herramienta de cálculo previamente estudiada. Es decir, aun cuando la solución a esos problemas requería de ideas y conceptos que recientemente habían estudiado, los alumnos mostraron serias dificultades en sus intentos de solución (estos alumnos ya habían acreditado un curso de cálculo a nivel universitario). En este estudio se observa que, en general, los cursos tradicionales de cálculo no dotan a los estudiantes de las herramientas necesarias que les permita trabajar problemas que van más allá de la aplicación de una serie de procedimientos, reglas o fórmulas.

> Lo que hace falta es el dominio de cierto tipo de conocimiento –comienzos tentativos de solución, formas de comenzar, que son parte de la imagen individual que el individuo posee de la situación problema. Este conocimiento se manifiesta como un hábito de pensar que involucra una reflexión sobre varias posibles formas de solución…Lo que sugerimos es que [los estudiantes] desarrollen estrategias que les permitan el reconocimiento de una situación problemática. Este proceso activa la información en forma de imagen la cual ayuda a identificar recursos o conocimiento de hechos (Selden et al. 2000, p.130).

Resulta necesario que matemáticos, educadores y profesores trabajen conjuntamente en el diseño de planes y programas que realmente reflejen la esencia de lo que significa aprender la disciplina. En particular, lo que interesa es que los estudiantes desarrollen una forma de pensar y disposición hacia el estudio de las matemáticas donde exhiban distintas formas de representar fenómenos, identifiquen relaciones y patrones, formulen conjeturas, justifiquen y comuniquen resultados. La idea es ir más allá del empleo de exámenes estandarizados y promover formas de evaluación donde los estudiantes tengan oportunidad de mostrar distintos procesos de razonamiento, extender o buscar conexiones y eventualmente formular sus propios problemas o preguntas. En este sentido, es importante proponer un currículum en términos de secuencias de problemas donde se reflejen los aspectos inherentes que transforman las asignaturas tradicionales en líneas de pensamiento numérico, algebraico, geométrico, y estadístico. Además, los procesos de evaluación no deben separarse de las actividades de instrucción que se desarrollan en la clase; deben ser parte de las actividades cotidianas de la instrucción. El trabajo individual es solamente un aspecto a incluir en la evaluación y también resulta necesario que el estudiante valore y acepte que parte de su aprendizaje es escuchar a los demás y exponer sus propias ideas a escrutinio dentro de la comunidad del salón de clase. En este sentido, el entendimiento o comprensión de las ideas matemáticas no es un proceso final; sino dinámico que se va robusteciendo en función de la necesidad de responder y resolver series de cuestionamientos que emerjan dentro y fuera de la propia comunidad de aprendizaje.

Reflexiones finales

Es evidente que en el ámbito internacional la resolución de problemas ha sustentado diversos programas de investigación relacionados con el desarrollo o construcción del conocimiento matemático de los estudiantes. Además en algunos países ha influido en la estructura y organización de propuestas curriculares. Sin embargo, la tarea de evaluar y contrastar el impacto de esos programas resulta difícil ya que las metas y el desarrollo pueden ser distintos e incluso el uso de términos diferentes para ideas similares. Por ejemplo, Lesh & Zawojewski (2007) cuestionan si el constructo "hábitos de la mente" que introduce Cuoco, Goldenberg, & Mark (1996) realmente aporta algo novedoso a la agenda de resolución de problemas al enfocar la investigación en "hábitos de la mente" en lugar de investigar estrategias de resolución de problemas y procesos metacognivos y creencias. "La terminología de hábitos de la mente parece enfatizar la búsqueda automatizada para usar y explicitar las estrategias heurísticas y metacognivas, en lugar de enfatizar los aspectos de interpretación, reflexión, y generalización de procesos de resolución de problemas que encajan en una concepción menos conductista de competencia" (p. 775). Santos-Trigo & Barrera Mora (2007) proponen contrastar diversos programas de investigación en términos de discutir temas relacionados con la caracterización de la disciplina, los tipos de problemas que promueven el desarrollo del pensamiento matemático, lo que significa aprender la disciplina, los ambientes de instrucción que favorecen la construcción del conocimiento matemático y las distintas formas de evaluación del conocimiento matemático. Como consecuencia, un aspecto crucial en las agendas de resolución de problemas es la interacción y discusión abierta entre los grupos de investigación sobre los aspectos comunes y principios o fundamentos que distinguen cada uno de los programas. Esto promovería la colaboración entre los distintos grupos y evitaría la repetición o reciclaje de estudios con agendas similares.
En la resolución de problemas se reconoce también que pueden existir caminos distintos para promover el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes; sin embargo, tanto los programas de investigación como las prácticas de instrucción coinciden en reconocer la relevancia de conceptualizar la disciplina en términos de dilemas o preguntas que los estudiantes necesitan responder y discutir en términos de recursos matemáticos. En este proceso, los estudiantes desarrollan un método inquisitivo que les permite reflexionar constantemente de manera profunda sobre las diversas maneras de representar y explorar las ideas matemáticas. Es decir, los estudiantes construyen, desarrollan, refinan, o transforman sus formas de comprender y resolver problemas como resultado de formular preguntas relevantes y responderlas con el uso de distintos medios, incluyendo las herramientas computacionales. En este contexto, los acercamientos iniciales en la resolución de problemas pueden ser incoherentes o limitados, pero éstos se refinan o mejoran cuando los estudiantes presentan y discuten de manera abierta sus ideas dentro de una comunidad de aprendizaje que valora y promueve el cuestionamiento matemático o método inquisitivo.

Existe evidencia de que algunas propuestas del currículum matemático a nivel preuniversitario sugieren organizar y estructurar el contenido y las prácticas de instrucción a partir de actividades de resolución de problemas. Sin embargo, un asunto pendiente es discutir y reflexionar sobre los cambios y la forma de estructurar los contenidos bajo la perspectiva de la resolución de problemas. Además, resulta relevante establecer una agenda académica para la actualización de los profesores en servicio y la educación y formación de los nuevos profesores que resalte las actividades de aprendizaje que se deben promover en el salón de clase. Esta agenda debe incluir formas de utilizar diversas herramientas computacionales en la construcción del conocimiento matemático de los estudiantes (Santos-Trigo, 2004b).

Se reconoce que diversas herramientas pueden ofrecer distintas oportunidades a los estudiantes para reconstruir o desarrollar conocimiento matemático. Por ejemplo, en el ejemplo desarrollado antes (problema del reparto), el uso del software dinámico favorece la construcción de representaciones dinámicas de los objetos matemáticos o del problema. Como consecuencia, algunas heurísticas como la medición de atributos (longitudes, áreas, perímetros), el arrastre de algunos elementos dentro de una configuración, la descripción de lugares geométricos, y el uso adecuado del sistema cartesiano resultan importantes en la búsqueda de conjeturas o relaciones y formas de justificarlas. El uso de distintas herramientas plantea la necesidad de actualizar o ajustar los marcos conceptuales que emergieron de estudios donde los estudiantes principalmente interactuaban con los problemas a partir del uso de lápiz y papel (Santos-Trigo, Reyes-Rodríguez & Espinosa-Pérez, 2007). Aquí interesa caracterizar las formas de razonamiento que los estudiantes construyen o desarrollan cuando utilizan de manera sistemática varias herramientas computacionales.

Finalmente, resulta urgente establecer una comunicación y colaboración académica con los distintos grupos que promueven la resolución de problemas en programa de investigación, propuestas curriculares y la instrucción. La idea es diseñar una agenda de trabajo que permita contrastar los diversos enfoques y construir nuevos marcos conceptuales que incorporen los avances en el desarrollo y quehacer de la propia disciplina y la disponibilidad de las herramientas digitales.

Nota: Este artículo se desarrolla en el marco de un proyecto financiado por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (Conacyt # 47850). El objetivo es investigar las formas de razonamiento que construyen los estudiantes al trabajar actividades de resolución de problemas en ambientes de instrucción que fomentan el uso de herramientas digitales.

Referencias

Arcavi, A. (2000). Problem-driven research in mathematics education. *Journal of Mathematical Behavior*, 19, pp. 141-173.

Arcavi, A. & Friedlander, A. (2007). Curriculum developers and problem solving: the case of Israeli elementary school projects. *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, 39, 5-6, pp. 355-364.

Artigue, M. & Houdement, C. (2007). Problem solving in France: didactic and curricular perspectives. *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, 39, 5-6, pp.365-382.

Begle, E. G. (1979). *Critical Variables in Mathematics Education*. Washington D. C: the Mathematics Association of America and the National Council of Teachers of Mathematics.

Burkhardt, H. & Bell, A. (2007). Problem solving in the United Kingdom. *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, 39, 5-6, pp.395-403.

Cai, J. & Nie, B. (2007). Problem solving in Chinese mathematics education: research and practice. *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, 39, 5-6, pp.459-473.

Camacho, M. & Santos, M. (2004). La relevancia de los problemas en el aprendizaje de las matemáticas a través de la resolución de problemas. *NÚMEROS*, pp. 45-60.

Camacho, M. & Santos, M. (2006). Sobre el desarrollo del sentido geométrico y el uso del software dinámico. Revista *UNO*, pp.20-33.

Cuoco, A., Goldenberg, E. P., & Mark, J. (1996). Habits of mind: An organizing principle for mathematics curricula. *Journal of Mathematical Behavior*, 15(4), 375-402.

Da Ponte, J. P. (2007). Investigations and explorations in the mathematics classroom. *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, 39, 5-6, pp.419-430.

Devlin, K. (1994). *Mathematics the science of patterns*. New York: Scientific American Library.

Doorman, M., Drijvers, P., Dekker, T., Van den Heuvel-Panhuizen, M., de Lange, J. & Wijers, M. (2007). *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, 39, 5-6, pp.405-418.

English, L., Lesh, R. & Fennewald, T. (2008). *Future directions and perspectives for problem solving research and curriculum development*. Paper presented at ICME 11, Topic Study Group 19.

Gardner, H. (2000). *The disciplined mind. Beyond facts and standardized tests, the K-12 education that every child deserves*. New York: Penguin Books.

Gravemeijer, K. & Doorman, M. (1999). Context problems in realistic mathematics education: A calculus course as an example. *Educational Studies in Mathematics*, 39(1-3), pp.110-128.

Hino, K. (2007). Toward the problem-centered classroom: trends in mathematical problem solving in Japan. *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, 39, 5-6, pp.503-514.

Kieran, C. (2008). Pour les débats de RDM. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, 28(1), pp. 107-118.

Krulik S. & Reys, R. (1980). *Problem solving in school mathematics. 1980 Yearbook*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Lesh, R. & Zawojewski, J. S. (2007). Problem solving and modeling. In F. K. Lester , Jr. (Ed.). *The Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. (pp. 763-804). National Council of Teachers of Mathematics. Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Moreno-Armella, L. & Santos-Trigo, M. (en prensa). Democratic access and use of powerful mathematics in an emerging country. En L. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education*. *Directions for the 21st Century, 2nd edn*. New York: Routledge

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
National Research Council. (1999). *Improving Student Learning: A strategic plan for education research and its utilization*. Washington, DC: National Academic Press.
Polya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton: Princeton University Press.
Puig, L. (1996). *Elementos de Resolución de Problemas.* Granada: Comares.
Puig, L. (1998). Réplica a *Elementos de resolución de problemas, cinco años después* de Ma Luz Callejo y José Carrillo. En J. R. Pascual (Ed.), Actas del *Segundo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación matemática,* pp. 107-112. Pamplona: Universidad Pública Navarra.
Reiss, K. & Törner, G. (2007). Problem solving in the mathematics classroom: the German perspective. *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, 39, 5-6, pp.431-441.
Santos-Trigo, M. (2004a). Exploring the triangle inequality and conic sections using Dynamic Software for Geometry. *The Mathematics Teacher*, 97(1), pp. 68-72.
Santos-Trigo, M. (2004b). The role of technology in students' conceptual constructions in a sample case of problem solving. *Focus on Learning Problems in Mathematics.* Spring Edition, 26(2), pp. 1-17
Santos-Trigo, M. & Barrera-Mora, F. (2007). Contrasting and looking into some mathematics education frameworks. *The Mathematics Educator*, 10(1), 81-106.
Santos-Trigo, M. (2007). Mathematical problem solving: an evolving research and practice domain. *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, 39, 5-6, pp.523-536.
Santos-Trigo, M. Reyes-Rodríguez, A., & Espinosa-Pérez, H. (2007). Musing on the use of dynamic software and mathematics epistemology. *Teaching Mathematics and Its Applications*, 26, 4, pp. 167-178.
Santos-Trigo, M. & Cristóbal-Escalante, C. (2008). Emerging high school students' problem solving trajectories based on the use of dynamic software. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 27(3), pp. 325-340.
Santos-Trigo, M. (2008). On the use of technology to represent and explore mathematical objects or problems dynamically. *Mathematics and Computer Education Journal*, 42(2), pp. 123-139.
Santos-Trigo, M., Espinosa-Pérez, H. & Reyes-Rodríguez, A. (2008). Connecting dynamic representation of simple mathematical objects with the construction and exploration of conic sections. *International Journal for Technology in Mathematics Education*, pp. 657-669.
Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. New York: Academic Press.
Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. A. Grows (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-370). NY: Macmillan.
Schoenfeld, A. H., (1994). Reflections on doing and teaching mathematics. In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Mathematical thinking and problem solving* (pp.53-70). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Schoenfeld, A. H. (2007). Problem solving in the United Status, 1970-2008: research and theory, practice and politics. *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, 39, 5-6, pp.537-551.
Selden, A., Selden, J., Hauk, S. & Mason, A. (2000). Why can't calculus students access their knowledge to solve non-routine problems? In E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld, & J. Kaput (Eds.), *Research in Collegiate mathematics education IV* (pp. 128-153). Providence, RI: American Mathematical Society.
Shell Centre (1984). *Problems with patterns and numbers*. Manchester, UK: Joint Matriculation Board.
Silver, E.A. (1985). Research on teaching mathematical problem solving: Some under represented themes and needed directions. In E. A. Silver (ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving. Multiple research perspectives* (pp. 247-66). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
Socas, M. (2001). *Investigación didáctica de la matemática vía modelos de competencia. Un estudio en relación con el lenguaje algebraico*. Universidad de la Laguna. Departamento de Análisis Matemático.
Törner, G., Schoenfeld, A. H., & Reiss, K. M. (2007). Problem solving around the World: *Summing up the state of the art. ZDM Mathematics Education,* 39, 5-6, p. 353.