CAPÍTULO 6

RAZÓN Y PROPORCIONALIDAD

6.1 *Un prefacio intermedio*

Una primera versión de este capítulo fue el primer espécimen de fenomenología didáctica que produje — en 1973 y en alemán. La causa inmediata de ello fue una exposición téorica sobre objetivos de instrucción por parte de un pedagogo, en la que el autor trató el tema "razón" como ejemplo paradigmático. Eligió este ejemplo porque, en el trabajo más amplio del que lo sacaba, era un tema que podía cubrirse con un único objetivo. Yo he argumentado reiteradas veces que formular objetivos de instrucción debe venir precedido por la observación de los procesos de aprendizaje que puedan revelar lo que se está aprendiendo y, por tanto, lo que debería enseñarse. También he argumentado que tanto para observar procesos de aprendizaje como para el desarrollo curricular una condición previa indispensable es una fenomenología didáctica. Sin embargo, en esa época los objetivos de instrucción se destilaban a partir de los libros de texto que prevalecen y de colecciones de tests. Con el fin de mostrar cuánto se pierde con este enfoque, me valí de "razón" como ejemplo que sirviera para explicar lo que es la fenomenología didáctica o lo que debería ser. A quienquiera que lea lo que escribí entonces —y no suena muy diferente en la versión presente— le chocará una rigidez de estilo que no es habitual en mí. Visto desde ahora, debo confesar que este estilo fue condicionado al menos tanto por el tema concreto como por mi intención de escribir un espécimen de fenomenología didáctica —más adelante daré razones de ello.

En mayo de 1975 di unas conferencias en Berlín. Allí conocí en persona a Christine Keitel, con quien ya me había carteado. Le hablé de un manuscrito, que más adelante se publicó con el título de *Desbrozar y sembrar*, y sobre una fenomenología didáctica de conceptos matemáticos fundamentales, que sería mi empresa siguiente. Le prometí una obra escrita en un estilo científico riguroso, sin tomar en consideración su legibilidad. Christine me imploró "no lo hagas" con un cierto tono, como si quisiera decir "no tienes ninguna obligación de hacerlo así". Durante mucho tiempo esas palabras me obsesionaron.

En el verano de 1975 el capítulo sobre razón ya existía, así como un esbozo provisional de "Fracciones", pero aún tenía que comenzar el que fuera el primer capítulo. "Conjuntos", por supuesto. Luché con él, pero no tuve éxito. El tema se resistía y el estilo terso, que con tanta destreza había dominado en "Razón", me abandonó. No escribí ni una línea.

Cambié de opinión. Nada de conjuntos. Números —no. Geometría —no. Finalmente elegí "Longitud", y al poco había concebido en detalle el capítulo. (Tiene lagunas, debería volverse a pensar.) Pero de nuevo fui incapaz de escribirlo, es decir, fui incapaz de escribirlo en el estilo terso de Razón —un ideal que encadenaba mi mente. ¿Debería encorsetar un tema que no estaba hecho para ello, sólo para que tuviera un aspecto que no le era propio?

Por otra parte, no tenía ninguna obligación de hacerlo así. No necesitaba asumir un lenguaje académicamente rimbombante para despertar expectativas de profundidad. No empiezo una carrera en la que un lenguaje de este estilo sea recomendable y no me siento feliz proporcionando unas obras a las generaciones futuras que hayan de sondear profundidades en obras ilegibles. Mi retrato espiritual está establecido y mis ideas sobre lo que es científico no necesitan ser corregidas. *Simplex veri sigillum* —lo que traduzco así: lo que es verdadero puede decirse en lenguaje llano.

Ya sabía qué hacer, pero todavía no sabía cómo hacerlo. Leí y releí "Razón". Parecía estar bien y bien escrito. Era claro y el estilo era honesto. ¿Por que era incapaz de escribir sobre "Longitud" de la misma manera? Intenté formulaciones diversas, en vano. En fin, debía liberarme de ese modelo. Me sabía "Razón" como si dijéramos "de memoria". Debía cerrar ese cajón de mi mente y abrir otro.

Así que decidí cambiar del alemán al holandés. Escribiría la fenomenología en holandés, para traducirla después al alemán. El lenguaje es una infección. El holandés es la única prosa en la que nunca he intentado ser profundo.

Tras tomar la decisión sobre el idioma, brotaron argumentos nuevos. Había comenzado la fenomenología para ayudar a los que hacían desarrollo curricular conmigo en su trabajo cotidiano y en las discusiones sobre él, y ésa era su intención; a corto plazo nadie más iba a beneficiarse de ello —estuviera traducida o no. Estaba pensada para nuestro habla coloquial y debía ser escrita en nuestro lenguaje coloquial.

Éste era un prefacio colocado en el lugar erróneo. Escribiré otro cuando vuelva sobre este trabajo.

6.2. *El estatuto lógico de Razón*

Aunque algo tarde, entendí finalmente que el estatuto lógico de razón está muy lejos de los conceptos discutidos hasta aquí. También entendí por qué debía separar la razón de fracciones.

La razón es una función de un par ordenado de números o valores de magnitud. También lo son la suma, la diferencia, el producto y el cociente, pero éstos lo son en sentido algorítmico: hay una receta para obtener el valor de la función correspondiente a un par determinado o al menos para actuar como si se hubiera obtenido —en efecto, ¿qué se ha obtenido si se contesta a 3 : 4 con $\frac{3}{4}$?

La razón también puede obtenerse: transformándola en un cociente, esto es, leyendo

como 3 es a 4

como si dijera

3 dividido por 4,

pero esto es la violación de la razón. Si se hace, se priva a la razón de lo que la hace valiosa como razón.

La razón es una función de un par ordenado de números o valores de magnitud. Pero, ¿qué hay de los valores de esa función? ¿Números o valores de magnitud, de nuevo? Se puede interpretar así, pero es la manera errónea de hacerlo. En efecto, esto identificaría razón con cociente. El significado propio de la razón es hablar sobre igualdad (o desigualdad) de razones sin conocer el tamaño de la razón, ser capaz de decir con sentido

a es a *b* como *c* es a *d*

sin anticipar que

a es a *b*

puede reducirse a un número o valor de magnitud

$$\frac{a}{b}$$

de modo que entonces ya que

c es a *d*

es lo mismo:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Gracias a la oportunidad ofrecida por la numerosidad y la longitud, subrayé que fenomenológicamente el reconocimiento de la igualdad y la desigualdad, de más grande y más pequeño, precede a la operación de sumar y medir —es una lástima que este hecho simple esté dañado en su credibilidad por principios de conservación interpretados erróneamente. Si se tomara la razón tan en serio como la numerosidad y la longitud, entonces la igualdad y la desigualdad, más grande y más pequeño, desempeñarían un papel similar. En cualquier caso, la exploración fenomenológica debe descubrir las mismas raíces.

Si se confirman estas suposiciones —y lo serán—, entonces el estatuto lógico de la razón en su contexto fenomenológico se parafrasearía como sigue:

> la razón es una relación de equivalencia en el conjunto de pares ordenados de números (o valores de magnitud), indicada formalmente por
>
> $a : b = c : d$
>
> si el par $\lceil a, b \rceil$ es equivalente al par $\lceil c, d \rceil$.

No formulamos los postulados (axiomáticos) que esta relación de equivalencia particular ha de satisfacer.

Es un hecho que, una vez se ha elegido una unidad *e,* la clase de equivalencia del par $\lceil a, b \rceil$ puede expresarse mediante un número (un valor de magnitud), en concreto *el u* para el que

$$a : b = u : e,$$

pero este enfoque es un intuición *a posteriori*, que de hecho sólo importa si *e* no depende de nada arbitrario (por ejemplo, si es la unidad numérica). *A priori*, la razón depende de dos datos y, por consiguiente, cada proposición sobre razones —la proporcionalidad— depende de cuatro datos.

Este complejo comportamiento era lo que yo quería decir cuando en el primer párrafo de esta sección coloqué la razón, por lo que respecta a su estatuto lógico, muy por encima de otros conceptos tratados antes de él. Cocientes y fracciones son medios para reducir esta complicación, para bajar su estatuto lógico, a costa —como suele suceder— de intuición. Uno debe dudar de que las fracciones puedan enseñarse intuitivamente, si falta intuición de la razón —esta duda es precisamente la que influyó la composición del capítulo sobre fracciones. La influencia podía haber sido más fuerte, pero no me atreví a integrar el análisis fenomenológico de las fracciones y la razón. ¿Acaso no debería proseguir los capítulos “Fracciones” y “Razón y Proporción” con un capítulo “Fracciones, Razón y Proporción”?

El estatuto lógico de razón que he explicado aquí implica que “razón y proporción” es matemáticas más profundas, matemáticas en un nivel más alto que lo que se ha discutido hasta ahora. Este hecho, pienso, influyó el estilo terso de mi primer ejemplo de fenomenología didáctica. Debido a la elección del tema, el más matemático en el nivel elemental, me encontré mi pan matemático untado con mantequilla por ambos lados. Más que por mi deseo de escribir una fenomenología didáctica, el estilo terso vino sugerido por la elección del tema. El intento de imitarlo con otros temas estaba mal motivado y condenado al fracaso.

El lector tendrá que contentarse con esta caótica alternancia de estilos. Está enraizada en los temas y los puntos de vista sobre los temas, más que en estados de ánimo.

6.3. *La razón como una relación en una magnitud y entre magnitudes*

Para no sobrecargar la exposición de las ideas más relevantes, comienzo con unos pocos conceptos, términos y notaciones. Usaré un lenguaje algo vago, con un mínimo de formalización. Por ejemplo, hablaré de tamaños iguales si se trata de *objetos* del mismo tamaño, de espacios[1], pesos o tiempos iguales allí donde debería decir en estricta propiedad caminos de la misma longitud, cuerpos del mismo peso, intervalos de la misma duración. Incluso podrá suceder que hable de la razón de dos objetos, cuando debería ser la razón del tamaño, el volumen o el peso de los objetos, o de la razón de dos metales en una aleación en vez de la de sus masas.

Comenzaré con un ejemplo fuertemente matematizado,

el movimiento uniforme:

(1) en tiempos iguales se recorren espacios iguales,

lo que es equivalente a

(2a) los espacios son proporcionales a los tiempos,

tan pronto como se asume que el movimiento es continuo, como debe ser;

(2b) el espacio es proporcional al tiempo

no es más que otra manera de escribir (2a), y

[1] En esta terminología que Freudenthal usa de forma poco precisa, según él mismo dice, hay dos palabras 'path' y 'distance' cuya traducción al castellano he decidido que sea siempre la misma: 'camino' y 'espacio', respectivamente. Esto hace que alguna de las frases que he escrito en las que aparece 'camino' chirríen, pero he querido conservar el significado "físico" que tiene 'path' y del que carece 'espacio'. Por otro lado, no he traducido 'distance' por 'distancia' para no ir en contra del uso en el lenguaje escolar de 'distancia' (entre los dos puntos inicial y final de un camino) y 'espacio recorrido' (desde el punto inicial hasta el final, a lo largo del camino).

(3) el espacio es una función lineal del tiempo

es otra formulación también, igual que lo es

(4) la rapidez[2] es constante,

aunque esta última tenga un aspecto diferente.

Un comentario escueto:

De (1) se sigue:

en el doble de tiempo se recorre un espacio doble,

en el triple de tiempo se recorre un espacio triple,

y, más en general,

en n veces el tiempo, se recorre n veces el espacio.

Sea

$$s = f(t)$$

el espacio como una función f del tiempo t. Simplemente hemos señalado que

$$f(nt) = nf(t) \text{ para } n \in \mathbf{N}.$$

Reemplácese t por $\frac{1}{n}t$. Entonces

$$f(t) = nf\left(\frac{1}{n}t\right),$$

lo que leído

$$f\left(\frac{1}{n}t\right) = \frac{1}{n}f(t),$$

conduce a

en $\frac{1}{n}$ veces el tiempo, se recorre $\frac{1}{n}$ veces el espacio.

---

2 Uso 'rapidez' para traducir 'speed' y 'velocidad' para traducir 'velocity', con el fin de distinguir la magnitud escalar de la vectorial.

Si en la última fórmula t se reemplaza por mt ($m \in \mathbf{N}$) se obtiene

$$f\left(\frac{m}{n}t\right)=\frac{1}{n}f(mt)=\frac{m}{n}f(t).$$

Así que para todo racional (positivo) α:

en α veces el tiempo, se recorre α veces el espacio.

La continuidad garantiza lo mismo para α real en vez de racional.

Tómese dos tiempos t_0, t. Póngase

$$\alpha=\frac{t}{t_0}.$$

Entonces

$$f(t):f(t_0)=f(\alpha t_0):f(t_0)=\alpha f(t_0):f(t_0)=t:t_0,$$

que es la formulación de (2a) o (2b). Esto último también puede escribirse

$$f(t)=\left(\frac{f(t_0)}{t_0}\right)t,$$

que es la formulación de (3), o

$$\frac{f(t)}{t}=\frac{f(t_0)}{t_0},$$

que es la formulación de 4.

Aquí están implicadas dos magnitudes —el tiempo y la longitud— y una función f que asigna una longitud a un tiempo, a saber, la *longitud* del camino recorrido en el intervalo de *tiempo*. Las razones que se consideran aquí son las de pares *en un mismo sistema* (tiempo *o* longitud); lo que se exige es que las razones en un sistema sean iguales a las razones correspondientes en el otro — éste es el postulado de la uniformidad del movimiento.

Llamamos

internas a las razones formadas dentro de un sistema para distinguirlas de las externas que se discuten más adelante.

Si t_1, t_2 son tiempos y s_1, s_2 los caminos correspondientes, el postulado de uniformidad dice que

$$s_1 : s_2 = t_1 : t_2.$$

Si nos sentimos tentados a intercambiar los términos medios, obtenemos

$$s_1 : t_1 = s_2 : t_2,$$

de nuevo la igualdad de dos razones, aunque razones del camino al tiempo.

Llamamos

externas a las razones entre dos sistemas.

La uniformidad del movimiento se expresa ahora por el postulado

la razón "camino a tiempo" es constante.

Las razones pueden interpretarse también como

cocientes.

En esta interpretación

la razón interna es un número,

la razón externa es una magnitud,

esto es, en el caso actual del movimiento uniforme,

el cociente de camino y tiempo: rapidez.

El conjunto del razonamiento, en particular el intercambio de los términos medios en una proporción, nos es bastante familiar. Me pregunto si nos percatamos suficientemente de que no tiene por qué ser tan obvio para el que aprende. La instrucción aritmética anterior era bastante consciente de este salto. En vez de pasar por encima del obstáculo, en ella se inventaba dos tipos de división: la división razón y la división distributiva. Junto con este monstruo de dos cabezas parece haberse desvanecido también la conciencia previamente existente de este problema y ya nadie es consciente hoy en día del salto mental de las razones internas a las externas, nadie plantea la cuestión de si no será un salto demasiado largo para el que aprende.

La tradición geométrica de la antigüedad griega sólo permitía formulaciones con razones *internas;* sólo se permitían operaciones algebraicas o magnitudes en un marco geométrico complicado. Es un inconveniente de la geometría griega que, a causa de la falta de razones externas, intercambiar los términos medios en las proporciones no estaba permitido en general y había que sortear ese inconveniente mediante complicados procedimientos. La tradición antigua se ha mantenido en las ciencias teóricas durante largo tiempo. Ejemplos notables de esta costumbre son la segunda y la tercera ley de Kepler:

> en tiempos iguales el radio vector desde el Sol a un planeta barre áreas iguales;
>
> los cuadrados de los tiempos de revolución están en la misma razón que los cubos de los ejes mayores de las órbitas.

Esta tradición impregnó las ciencias teóricas más tiempo de lo que lo hizo en las matemáticas comerciales y técnicas, en las que se admitieron antes las operaciones algebraicas directas y no geometrizadas y, en particular, las razones externas; incluso hoy en día las matemáticas puras muestran una escasa comprensión de los cálculos con magnitudes.

He usado el movimiento uniforme como paradigma. La generalización puede quedarse para el lector. Ya estará suficientemente claro lo que quiero decir con

razón interna (en una magnitud)

y

razón externa (entre dos magnitudes).

Es igualmente obvio que al establecer una aplicación entre magnitudes,

la invarianza de razones internas

y

la constancia de razones externas,

que le es equivalente, significa

linealidad de la función;

en nuestro ejemplo,

el movimiento uniforme es una función lineal del tiempo en el camino.

La linealidad de la función *f* se define correlativamente de dos maneras:

implícitamente (postulatoriamente),

a la suma corresponde la suma, $f(x+y)=f(x)+f(y)$,

explícitamente (algorítmicamente),

$f(x) = \alpha x$, para todo x y un cierto α.

Una vez más: todo esto es tan obvio que como matemáticos ya no nos preocupamos de ello, pero no esperemos que pase desde nuestro inconsciente al de nuestros alumnos por mera difusión.

Las cosas son aún más enrevesadas: un movimiento uniforme tiene todos los intervalos de tiempo de la misma longitud, sea cual sea ésta, aplicados sobre intervalos de camino iguales. No se menciona de forma explícita que la composición de dos intervalos de tiempo conectados se aplica sobre la composición de los intervalos de camino correspondientes porque está implícito en la idea de movimiento. Lo mismo sucede con otros pares de magnitudes, tales como volumen y peso de cierta substancia. Sin embargo, si f es una función que aplica magnitudes, ya me he abstraído de los intervalos particulares de tiempo y de camino (y similares); han sido suplantados por longitudes y duraciones (y cosas así). Así que estoy obligado a exigir explícitamente que, de la misma manera que sucede en la esfera de los objetos en la que compuestos se corresponden con compuestos, en la esfera de las magnitudes sumas se corresponden con sumas. En un marco más formalizado podría haber formulado esto de forma más aguda, pero quisiera evitar un formalismo excesivo.

6.4. *Exposiciones y composiciones*

La razón debe considerarse en un contexto más amplio que el de las relaciones en una magnitud y entre magnitudes. Quiero esbozar esto por medio de ejemplos tan diversos como los que siguen:

6.4.1. un conjunto de especies animales con sus pesos medios (u otra característica cuantitativa),

6.4.2. un conjunto de vuelos en avión con sus precios (o distancias),

6.4.3. un conjunto de países con sus poblaciones (o sus superficies),

6.4.4. un conjunto de artículos con sus precios (o pesos),

6.4.5. el conjunto de componentes de una aleación con sus masas,

6.4.6. el conjunto de las clases de edades de una población con sus números,

6.4.7. el conjunto de tipos de uso del suelo de una nación, con las superficies correspondientes,

6.4.8. el conjunto de enfermedades con el número de casos de cada una,

6.4.9. el conjunto de pares de puntos de un plano con sus distancias mutuas.

El *rasgo* común de todos estos ejemplos es un conjunto, indicado generalmente en lo que sigue por Ω, Ω', …

y

una función, denotada generalmente en lo que sigue por ω, ω', …, que toma valores de una determinada magnitud.

Entre los cuatro primeros ejemplos (6.4.1-4) y los cuatro siguientes (6.4.5-8) hay una *diferencia* profunda:

En el primer grupo, los elementos de Ω son

objetos, en un sentido primitivo, y Ω se define por los rasgos comunes de sus elementos (especies de animales, vuelos en avión, países, artículos),

en el segundo grupo los elementos de Ω son

clases de un universo, formado según ciertos criterios que son importantes para ese universo (edades en una población, etc.).

En el primer grupo

la función ω describe propiedades internas de los elementos de Ω,

en el segundo grupo

la función ω describe el tamaño de la clase (no necesariamente un número entero, cf. 6.4.5).

Llamaré, de forma algo arbitraria, a la primera y la segunda clases, respectivamente,

exposiciones

composiciones,

El ejemplo noveno, que no es un ejemplo que carezca de importancia, es totalmente diferente de los anteriores: en la sección 6.5 volveremos sobre él.

Las exposiciones y las composiciones difieren en la manera en que se usan. Usualmente aparecen por parejas: lo explicaré con unos ejemplos.

Parejas de exposiciones:

Ω un conjunto de países,

ω la función que asigna a cada país su número de habitantes,

ω' la función que asigna a cada país su área;

la razón ω a ω' (densidad de población) es variable: un país tiene "en proporción" el mismo número de habitantes (o un número menor o mayor).

Ω un conjunto de paquetes de plástico llenos en un supermercado, en los que hay indicado:

el precio ω,

el peso ω';

la razón ω a ω' (precio unitario) es variable, para los paquetes que contengan el "mismo" artículo, será la misma; sobre ellos ω y ω' son linealmente dependientes.

Parejas de composiciones:

Consideramos dos aleaciones con los mismos componentes. Los componentes de las aleaciones forman dos conjuntos

Ω y Ω'

con las correspondientes funciones de masa

ω y ω',

por ejemplo,

30 kg de bronce están formados por 20 kg de cobre y 10 kg de zinc,

65 kg de bronce están formados por 40 kg de cobre y 25 kg de zinc.

Tanto Ω como Ω' son el conjunto

{cobre, zinc}.

En las dos aleaciones tenemos, correspondientemente

ω(cobre) = 20 kg, ω(zinc) = 10 kg,

ω'(cobre) = 40 kg, ω'(zinc) = 25 kg.

En general la razón de ω a ω' puede variar; si ω y ω' son linealmente dependientes, es la "misma" aleación.

Dos poblaciones —las de Los Países Bajos y Las Filipinas— se dividen en clases de edades.

> Ω y Ω'

están formados por las clases de edades

> $\{[0, 1), [1, 10), [10, 20), \ldots\}$.

> ω y ω'

son el número de personas en las clases respectivas.

En una población hay "en proporción" menos niños, más personas de edad, etc., que en la otra.

El caso de una pareja de *exposiciones* consiste en

> un conjunto Ω,
>
> con dos funciones ω, ω' en él,
>
> cuya razón —externa, en la mayor parte de los casos— se considera.

El caso de una pareja de *composiciones* consiste en

> particiones en clases Ω y Ω' de dos universos, obtenidas según el mismo principio e identificadas de forma natural una con otra,
>
> con dos funciones ω, ω' en ellas,
>
> cuyas razones —internas, en la mayor parte de los casos— se consideran y quizá se comparan.

6.5. *Constructos*

Pasamos al ejemplo 6.4.9, que muestra

> un conjunto Ω basado en una estructura Σ fuerte —preferentemente geométrica— con una función medida.

En nuestro caso particular, Σ era una figura plana, por ejemplo, el plano completo; Ω, el conjunto de los pares de puntos; ω, la distancia.

Otras posibilidades serían:

Ω el conjunto de curvas planas, con ω como la longitud del arco;

Ω el conjunto de rectángulos, con ω como el área.

Designaré un sistema Ω, ω como

un constructo,

o, con más precisión,

un Σ-constructo

(si Σ es la estructura en que se basa).

Los constructos también se usan por parejas, Ω, ω y Ω', ω', en las que puede suceder que $\Omega = \Omega'$ y $\omega = \omega'$.

Una pareja de constructos:

Ω es el conjunto de pares de puntos de una figura plana Σ,

Ω' es el conjunto de pares de puntos de una figura plana Σ',

ω y ω' son las funciones distancia correspondientes.

Más aún, hay una aplicación

f de Σ en Σ'

que se extiende de forma natural a una aplicación

f de Ω en Ω'.

Una propiedad de f, que puede ser pertinente, es

la semejanza.

De la misma manera que sucedía con la uniformidad del movimiento en la sección 6.3, la semejanza se puede caracterizar en primer lugar mediante la condición

f hace corresponder pares que tienen la misma distancia entre sí con pares que tienen la misma distancia entre sí, o

f conserva la igualdad de distancias,

o —una formulación más rica, pero equivalente—

f hace corresponder pares de figuras congruentes entre sí con pares de figuras congruentes entre sí,

o

f conserva la congruencia.

Esta formulación no implica aún la razón, pero, bajo la condición —natural— de continuidad, esta caracterización es equivalente a

f conserva las razones, esto es,

$$\omega'(f\alpha) : \omega'(f\beta) = \omega(\alpha) : \omega(\beta) \ (\alpha, \beta \in \Omega).$$

Esto es

conservación de razones *internas*,

tomadas respectivamente en Ω y Ω'. Igual que en la sección 6.3, en el caso de las magnitudes, el que *f* sea una

semejanza

puede expresarse mediante la

constancia de razones *externas*:

$$\omega'(f\alpha) : \omega(\alpha) = \omega'(f\beta) : \omega(\beta) \ (\alpha, \beta \in \Omega).$$

Otro ejemplo:

Ω un conjunto de segmentos, ω la función longitud,

Ω' el conjunto de cuadrados sobre esos segmentos, ω' la función área.

El uso de esta pareja es obvio.

6.6. *La aparición de las razones en las secciones 6.3-5 comparadas*

En la sección 6.3, las razones aparecen en una magnitud y entre magnitudes, en la sección 6.4 en exposiciones y composiciones y entre ellas, en la sección 6.5 en constructos y entre constructos.

Los casos 6.3 y 6.5 se parecen el uno al otro a causa de la fuerte estructura matemática subyacente, mientras que en la sección 6.4 esas estructuras son débiles. Las secciones 6.3 y 6.5 también tienen en común que

la proporcionalidad y la semejanza

se pueden definir

sin involucrar la razón

simplemente por

la conservación de la igualdad o la congruencia.

En el caso de la sección 6.4 esto no es posible o requeriría un razonamiento complicado.

Comparado con la sección 6.3, el caso 6.5 tiene la ventaja de que

la congruencia de figuras se puede visualizar con más fuerza que la igualdad de valores de magnitud.

Veremos que estas distinciones tienen consecuencias didácticas importantes.

6.7. *La razón en semejanzas*

Hacemos girar ahora el énfasis de nuestra fenomenología hacia la didáctica.

La razón en cuanto concepto e incluso en cuanto objeto mental requiere un nivel de desarrollo considerablemente alto. Pese a ello, la sensibilidad y la vista[3] para las razones se presenta en el desarrollo notablemente pronto. Según Piaget, los conceptos topológicos deben preceder a los euclídeos. Anticipamos que esto es válido como mucho para relaciones espaciales tales como inclusión, exclusión y solapamiento, pero éstas son relaciones que ningún matemático considerará topológicas, como lo hacen los psicólogos. La aceptación de propiedades verdaderamente topológicas —esto es, que establecen equivalencias mediante biyecciones continuas— no es, con toda certeza, una

[3] En inglés, 'the feel and look'.

actitud que pueda situarse en la primera infancia; es demasiado compleja para que pueda esperarse de los niños pequeños. Piaget y los investigadores que repitieron sus afirmaciones o sus experimentos se confundieron seriamente. A partir de la falta de destreza de los niños pequeños para dibujar círculos y cuadrados con la suficiente nitidez como para que difieran unos de otros, extrajeron la conclusión del predominio topológico. Sin embargo, desde una edad muy temprana los niños pueden distinguir claramente los círculos y los cuadrados, que es lo único que importa. Es cierto que los niños juzgan los dibujos de los libros o los dibujos hechos por adultos con criterios distintos que sus propios dibujos —un tipo de separación entre sistemas que valdría la pena estudiar en detalle.

No puede caber empero duda alguna de que los niños reconocen muy pronto los tamaños diferentes de los objetos y el que sean más grandes o más pequeños unos de otros. Es igualmente cierto que pueden manejar la semejanza como una equivalencia operativa. Incluso llegaría hasta el extremo de afirmar que las congruencias y las semejanzas son rasgos incorporados en la parte del sistema nervioso central que procesa nuestras percepciones ópticas. La reidentificación inmediata de los objetos despues de una rotación (del objeto o del que percibe) y después de un cambio de distancia presupone en el cerebro algo como un programa de ordenador para la eliminación de este tipo de aplicación —para mí es un enigma el aspecto de tal programa; su existencia, de la que no tengo duda alguna, es para mí como un milagro.

A una edad temprana, un niño reconoce dibujos y modelos de animales, muebles, coches, bicicletas, barcos como imágenes de esos objetos —no importa a qué escala ni si están dibujados a diferentes escalas uno al lado del otro. "¿Cómo de grande es realmente una ballena?", puede preguntar un niño, convencido de que el dibujo, salvo por la escala, es exacto. Bueno, a veces se esbozan ballenas mediantes dibujos de un solo trazo, pero incluso la diferencia entre una fotografía y un boceto característico se entiende pronto.

Pesadas realizadas por Bastian (5; 6) con una báscula de muelle fueron indicadas por él mismo en una "báscula de muelle" horizontal mecanografiada a escala diferente. Bastian notó desviaciones inesenciales en las figuras (1 en vez de 1) pero no de la diferencia de orientación ni de escala. La imagen mecanografiada era estructuralmente fiel.

Después de una serie de días soleados, Bastian (6; 1) ve nubes de nuevo y dice: "Lloverá". Le digo: "No, éstas son nubes muy altas, de las que no cae lluvia; las nubes de lluvia son bajas y oscuras". Él: "¿A qué altura están estas nubes?" Yo (exagerando): "A diez mil metros". Él: "¿Y las nubes de lluvia?" Yo: "A mil metros". Él (señalando hacia el suelo): "O sea, si estamos aquí y esto (señalando una altura de 30 cm aproximadamente) es nubes de lluvia, entonces esto (señala 1 metro aproximadamente) es nubes sin lluvia".

Los niños aceptan sin vacilar lo más mínimo que se dibujen objetos en la pizarra diez veces más grandes que los de la hoja de trabajo, que la recta numérica de la pizarra tenga una unidad de 1 dm mientras que la de la hoja de trabajo sea de 1 cm. Aceptan rectas numéricas una junto a otra en las que intervalos del mismo tamaño significan una unidad, o diez, o cien. Sin embargo, los niños protestarían inmediatamente ante modificaciones estructurales que violan la semejanza de la imagen:

> lo que es mutuamente igual en el original,
>
> debe ser mutuamente igual en la imagen,

lo que implica, como sabemos,

> la invariancia de razones internas,

caracterizando las aplicaciones como

> semejanzas.

Los niños se familiarizan a una edad muy temprana con estas

> aplicaciones que conservan las razones

como las llamaremos, al ver figuras planas o espaciales dibujadas —cuadros, copias de cuadros, modelos de edificios. Las desviaciones sistemáticas de este principio de aplicación se perciben; por ejemplo,

> el uso de escalas distintas en direcciones distintas,
>
> el uso de escalas distintas para figuras distintas,
>
> el uso de escalas distintas para partes de la misma figura.

Sin embargo, esto no se hace haciendo explícitas las escalas, sino con formulaciones como

> la cabeza es demasiado grande —si se compara con el tronco—,
>
> esto es demasiado largo —si se compara con el ancho—

objeciones respecto a la falta de semejanza, aunque sin que las razones se hagan explícitas.

Requiere una intuición mayor de las relaciones geométricas aducir otros criterios, tales como

> lo que es un ángulo recto en el original,
>
> debe ser un ángulo recto en la imagen.

Con este ojo o sensibilidad para la semejanza, como lo he acuñado, el niño está todavía por supuesto bien lejos de la semejanza como objeto mental, no digamos como concepto. Indico algunos de los pasos intermedios:

Reconocer la conservación o no conservación de la razón bajo aplicaciones.

Construir aplicaciones que conservan la razón.

Resolver conflictos en la construcción de aplicaciones que conservan la razón.

Manejar operativamente,

formular,

relacionar unos con otros:

criterios para la conservación de la razón, tales como

conservación de la igualdad de longitudes,

conservación de la congruencia,

conservación de las razones internas,

constancia de la razón externa,

conservación de los ángulos,

y decidir acerca de la necesidad y suficiencia de tales criterios.

En los primeros pasos de esta secuencia

las razones no se presentan explícitamente,

más tarde

la igualdad de razones (interna y externa) se torna explícita,

y finalmente

las propias razones se hacen explícitas.

Es una secuencia semejante a la observada a propósito de la longitud y otras magnitudes.

La fuerte visualización es una ventaja del contexto geométrico de la razón, en comparación con otros contextos. Lo que didácticamente importa es la

> verbalización gradual del razonamiento visual.

Mucho más frecuentemente los contextos de la razón no son visuales, pero son accesibles a la visualización. Una temprana familiaridad con las aplicaciones que conservan la razón es un soporte para visualizar los contextos de la razón que no son visuales *a priori*. Sin embargo, esto requiere que la razón visualizada se suelte en cierta forma del contexto de las semejanzas globales. Para construir un puente de razones no visuales a razones visuales, la visualización estricta por semejanza ha de ser debilitada.

La semejanza, tal como se entiende matemáticamente, es una aplicación de planos completos sobre planos completos. En cada visualización uno se contenta con figuras lineales o planas que sugieren el plano completo gracias a su tamaño y estructura: trozos del mundo real y sus dibujos, patrones en el papel para paredes y otras estructuras que pueden continuarse hacia adentro y hacia afuera. Para todas las actividades y sus distintos niveles que se enumeran,

> una estructura rica de original e imagen
>
> y el hecho de que una es la imagen de la otra (o por lo menos la sugerencia de ello)

son cuanto menos ventajas, si no requisitos.

Demasiada poca estructura puede ser un obstáculo para el reconocimiento visual de la semejanza de figuras —esto es así incluso para adultos. En un material más ricamente estructurado, los criterios más o menos algorítmicos para el reconocimiento de la semejanza pueden ser aislados y ejercitados siguiendo el flujo de actividades anterior, para que lleguen a ser operativos en un material menos estructurado.

Es un paso corto desde el hecho a la sugerencia de que algo es de alguna manera la imagen de alguna otra cosa. La falta de toda sugerencia puede ser un impedimento incluso para pensar en semejanzas excepto si la dispensabilidad y la reposición de tal sugerencia haya sido preparada en un proceso de enseñanza.

Si unos rectángulos dibujados han de ser comparados con respecto a la semejanza, la mera adición estructurante de las diagonales puede transformar el fracaso en éxito. Es más fácil comparar la longitud de caminos en mapas y en la realidad que comparar circunferencias o rectángulos desnudos. La intuición de que todos los círculos son semejantes se puede adquirir con mucha mayor facilidad con círculos estructurados, tales como nuestras[4] monedas, cuyos anversos son semejantes incluso en detalles de la superficie. El círculo desnudo no es un buen medio para revelar la razón interna de la circunferencia (o la distancia recorrida al hacerla girar) al diámetro. El enfoque vía las razones y circunferencias externas usando círculos distintos (y estructurados de forma similar) es más útil.

Resumo esta exposición con una lista de actividades:

Transferir lo que se ha

ejercitado, reconocido, hecho explícito

respecto a razones y la conservación de la razón

en un contexto ricamente estructurado

a un contexto menos o pobremente estructurado.

Mediante razones y la conservación de la razón

enriquecer un contexto pobremente estructurado,

introducir una estructura geométrica en un contexto no-geométrico,

traducir un contexto no-geométrico a uno geométrico,

entendiendo y usando contextos que pueden ser geométricos o no serlo como imágenes geométricas uno de otro.

6.8. *Relativamente*

Mientras que uno puede recorrer un buen trecho con aplicaciones que conservan la razón sin verbalizar todo lo que puede ser visto, experimentado o construido como razón, otros contextos requieren una verbalización más temprana (aunque no de la razón) de ideas tales como

relativamente (o comparativamente).

En tanto objeto mental, esto puede suponerse que ocurre al final de la educación infantil.

Este chocolate es más dulce porque contiene —relativamente— más azúcar.

[4] 'Nuestras' aquí significa 'holandesas'.

Una pulga puede saltar —relativamente— más alto que un hombre.

Un pasaje de avión a Sudamérica es —relativamente— más caro que uno dentro de Europa.

En Holanda hay —relativamente— más bicicletas que en Alemania.

En la formulación explícita, la palabra 'relativamente' puede que falte, ya que está claro lo que se quiere decir. Los términos

relativamente más, tanto… como, menos

pueden recibir varios matices de significado

desde cualitativo grosero hasta cuantitativo preciso.

En particular, para establecer "más" o "menos", pueden bastar las estimaciones, aunque pueden refinarse mediante añadidos como

mucho, realmente mucho, una pizca[5].

A "relativamente" le falta un término de relación, que puede ser añadido de forma

obvia o explícita.

Por ejemplo:

Si se compara con el número de habitantes, hay más bicicletas en Holanda que las que hay en Alemania.

Una secuencia posible de niveles:

entender que las ordenaciones (mayor y menor, más y menos) pueden relativizarse (relativamente mayor, menor, más, menos),

entender "relativamente" en el sentido de "en relación con[6] …", con el criterio de comparación rellenando los puntos suspensivos,

usar con sentido "relativamente" y "en relación con",

completar "relativamente" y "en relación con" en un contexto,

conocer operativamente lo que "relativamente" y "en relación con" significan en general,

---

[5] En inglés, 'much, very much, a bit'.
[6] En castellano, también 'con respecto a …'

> explicar lo que "relativamente" y "en relación con" significan en general.

Hay un cierto número de estadios

> desde cualitativo grosero hasta cuantitativo preciso,

en el que finalmente el criterio, según el asunto, es

> una razón interna o externa.

Las tareas en las que tales actividades pueden tener lugar pueden tener un carácter visual:

> casas, gente, árboles a escalas diferentes
> —¿qué va con qué y por qué?
>
> un grupo de personas y, a otra escala, trajes
> —¿qué va con qué?
>
> muros a escalas diferentes y de grosores distintos
> —¿cuáles son más gruesos?
>
> prados con flores, charcas con ranas, cielos con nubes
> —¿dónde hay más relativamente?

Otros sentidos pueden desempeñar también un papel:

> una gran orquesta que produce sonidos relativamentes suaves.

6.9-11. *Normalizar*

6.9. Se darán a continuación unos pocos ejemplos para introducir el complejo de técnicas, uso erróneo de técnicas, actitudes que estas técnicas fomentan (o, más bien, no fomentan) —un complejo que yo he bautizado como *normalizar*:

> Si imaginamos la Tierra como la cabeza de una alfiler (1 mm de diámetro), el Sol aparece como una esfera con un diámetro de 10 cm a una distancia de 10 m.

La reducción de escala tiene la intención de visualizar razones drásticas: uno elige una escala familiar para empezar, sin que importe cuál sea la escala.

> Si el desarrollo de la vida en la Tierra se imagina que se haya producido en un día, el hombre apareció hace un minuto y la cultura humana comenzó hace un segundo.

Se parece mucho al primer ejemplo: una reducción temporal que puede ilustrarse mediante un dibujo lineal. Para el componente mayor, "día" se ha elegido como unidad, mientras que en el primer ejemplo se empezó con la cabeza de un alfiler.

Los ejemplos

uno de cada cinco niños que nacen es chino,

uno de cada cuatro coches es un Fiat,

muestran una preferencia por las razones normalizadas por "uno de cada…"

Una receta "Bœuf à trois moutardes" para cuatro personas,

la unidad de comida es cuatro, lo que en muchos casos puede ahorrar conversiones. (Sin embargo, no es recomendable confiar en razones al cocinar o hacer pastelería.)

La calidad del agua potable o para bañarse se indica por

tal cantidad[7] de sal en un litro

o

tal cantidad de bacterias coli en un cc,

mientras que las cantidades que realmente se beben o en las que realmente uno se baña son de un orden de magnitud harto distinto, y las cantidades que realmente se analizan, también.

La producción de basura se mide con una unidad vaga

equivalente de habitante,

que sólo sirve para estimar y cargar con impuestos la producción de basura de las familias y las industrias.

La potencia de las explosiones nucleares se mide en

kilotones de TNT,

una normalización extraña que sirve para comparar las bombas nucleares entre sí más que para compararlas con los explosivos convencionales.

[7] En inglés, 'this much'.

Si el coste de la vida se fija en 100 en 1965, es 147 en 1975 —un ejemplo de los frecuentemente usados números índices, en los que preferentemente se elige 100 como base. En otros casos, una media se normaliza a 100, por ejemplo, para el I. Q.:

> la media de las puntuaciones en una cierta población (a una cierta edad) se fija en 100 para medir las puntuaciones individuales con ella.

Este número 100 liga con el sistema decimal, mientras que, por otro lado, se evitan las *fracciones* decimales todo lo posible. En la enseñanza tradicional de la aritmética, los porcentajes y el interés estaban estrechamente vinculados. Sin embargo, esto no es una tradición antigua: el interés se expresaba más bien por "uno a…" (el "diezmo" significa un décimo[8]). Gracias a la decimalización del dinero, la aritmética de los porcentajes de interés se tornó eficaz. Hoy en día la aplicación más usual de los porcentajes es en "composiciones":

> el todo se fija en 100 con el fin de expresar las partes numéricamente.

La intención es

> hacer que composiciones diferentes sean comparables.

La comparación puede estar

> apoyada por la visualización,

por ejemplo, mediante diagramas de sectores. La necesidad de hacer comparables los datos de composiciones es actualmente la motivación más fuerte para los porcentajes; además, el porcentaje es un artefacto que se presenta como lo más natural en el momento en que, en beneficio de la comparabilidad, los totales deban ser normalizados uniformemente. Esto es, ni

> si Holanda fuera tan grande como Alemania Federal

ni

> si Alemania Federal fuera tan grande como Holanda

sino

> fija el área (número de habitantes) de ambas en 100 (o quizá 1000), entonces…

---

[8] En inglés, 'the "tithe" means one tenth'. En castellano, la palabra 'diezmar' proviene de la costumbre de elegir uno de cada diez prisioneros para matarlos, contando de uno a diez reiteradamente y eligiendo cada décimo; en su significado actual, no queda rastro del número diez: un ejército queda diezmado tras una batalla cuando ha sufrido pérdidas considerables, probablemente mayores que la décima parte de sus miembros.

Resumiendo el análisis precedente, se pueden enunciar unos pocos niveles

con respecto a hacer las composiciones y los constructos más perspicuos normalizando un componente,

con respecto a hacer las composiciones comparables normalizando el todo (en general en 100), mientras que los datos absolutos y el factor de escala desempeñan un papel tan subordinado que en cierta medida se desprecian

entender la normalización,

entender la razón de ser de la normalización,

ejecutar normalizaciones cuando se piden,

ejecutar normalizaciones cuando son útiles,

entender esta actividad operativamente,

describirla,

y colocarla en un marco mayor.

6.10. Un error relacionado con la normalización es: olvidar los datos sin normalizar y el factor de escala:

se adscribe un significado absoluto a datos que dependen de la normalización, en particular, datos derivados de normalizaciones distintas se comparan sin volverlos a normalizar;

el número 100 desempeña un papel mágico, como si lo fuera;

porcentajes derivados de procedimientos de normalización distintos se suman y se procesan en medias —sin ponderar;

causa sorpresa y no se entiende si, por ejemplo, un partido en unas elecciones ve crecer su porcentaje en todos los distritos mientras que el porcentaje sobre el total desciende;

se aplica una doble normalización como en el siguiente ejemplo tomado de un periódico: en 1972, el producto nacional per capita del Brasil aumentó un 5%, pero ese aumento ha sido absorbido en su mayor parte por el $4\frac{1}{2}$% de aumento de la población durante el mismo período de tiempo.

6.11. Un rasgo más sutil y más peligroso es olvidar los datos sin normalizar, por ejemplo, en estadística, cuando esto incluye olvidar

> la precisión de los datos normalizados:

"uno de cada dos" o 50% puede haberse obtenido de un total de dos o mediante una estimación grosera de un total de mil o un millón.

Los problemas de precisión pueden ser causados por medidas o aleatoriamente —de hecho, la fuente de imprecisión en las medidas, ya sean exactas o estimadas, también es aleatoria. La precisión se tratará en otro capítulo, pero mientras tanto tiene sentido haber aludido a este tema ya, en conexión con la normalización de datos relativos. Incluso en este capítulo volveremos a tratarlo.

6.12. Puede suceder que se produzcan normalizaciones, o se pida que se hagan, en donde no importa hacerlas o incluso en donde hacerlas trastorna. Ejemplos:

Una cuerda cerrada alrededor del Ecuador se alarga un metro y se vuelve a cerrar, con holgura, alrededor del Ecuador. ¿Puede arrastrarse un hombre bajo ella?

El problema se contesta a menudo con una pregunta sobre el diámetro de la Tierra, que, dada la relación lineal entre el diámetro y la circunferencia, no importa.

John y Pete viven y trabajan en la misma dirección postal. En bicicleta, John tarda 30 minutos en ir de casa al trabajo y Pete, 40 minutos. John sale 5 minutos más tarde que Pete. ¿Dónde le alcanzará?

La reacción usual es preguntar por la distancia entre la casa y el trabajo, lo que, de nuevo por razones de linealidad, no importa.

Un ejemplo aún más drástico. Un estudiante que tiene que pasar del sistema métrico al anglosajón pregunta: ¿cuánto vale π aquí?

Lo que precede puede resumirse como sigue:

> Intuición de la no pertinencia de la normalización en el caso de relaciones lineales.

6.13. *Visualizaciones*

La comprensión de la razón puede guiarse y profundizarse mediante visualizaciones. Uno puede ilustrar exposiciones mediante histogramas y pictogramas,

composiciones mediante diagramas de sectores y otras divisiones planas.

Ejemplo de composiciones visualizadas: Los países de la CEE se representan, respecto a sus áreas, mediante

rectángulos con la misma base y alturas proporcionales a las áreas

que se colocan uno junto a otro como en un histograma; sus números de habitantes se representan mediante

un grupo de figuras humanas (por ejemplo, cada una representa un millón),

pudiendo combinarse ambas representaciones

colocando las figuras humanas en los rectángulos correspondientes,

con el fin de visualizar las diferentes densidades de población (razón del número de habitantes al área).

Ejemplo de composiciones visualizadas: Un círculo dividido en sectores cuyas áreas son

proporcionales a las áreas correspondientes a categorías de uso del suelo de un país

para varios países uno junto a otro, con el fin de ilustrar

las diferencias con respecto al uso del suelo

(más o menos agricultura, etc.).

Tales visualizaciones son una especie de aplicaciones que conservan la razón, con razones distintas de las razones entre distancias de pares de puntos considerados —en el último ejemplo, por un lado,

las razones de áreas, número de habitantes, categorías de uso,

por otro lado,

áreas de figuras planas.

Una secuencia de niveles podría ser:

entender histogramas, pictogramas, divisiones de áreas y representaciones visuales similares como aplicaciones que conservan la razón de exposiciones y composiciones,

construir tales representaciones visuales,

dedicir ante conflictos al construirlas,

entender los principios de tales representaciones visuales y describirlos;

reconocer la conservación de la razón como el principio común en la representación visual, y

describirlo.

Aún más, por lo que respecta a la comparación entre dos o más exposiciones y composiciones representadas de esta manera:

decidir preguntas del estilo de "relativamente más, tanto… como, menos" mediante esas representaciones visuales,

hacer posibles tales decisiones mediante la manipulación del material; entender los principios de tales decisiones, y

describirlos.

6.14. *Visualizaciones mediante constructos*

Los constructos pueden servir para visualizar no sólo razones y proporciones, sino tambien conexiones lineales completas. Se puede distinguir entre métodos gráficos y nomográficos:

la gráfica de la función lineal (figura 55),

la sombra del sol (figura 56),

la sombra de una lámpara (figura 57).

insertar las figuras 55, 56 y 57 de la página 199 del original

Aunque se usen muy poco, estas visualizaciones son particularmente eficaces didácticamente. Son modelos que encajan bastante bien con las ideas sobre la geometrización de la instrucción elemental. Tienen buenas oportunidades de ser explotadas en serio.

Las razones internas y externas

y sus relaciones mutuas

pueden ser

> vistas, entendidas, descritas

con eficacia por estos modelos.

Al leer la sección 6.15 hay que tener en mente este hecho.

6.15. *Algoritmizaciones*

La contrapartida de visualizar es procesar numéricamente. Verificar que una aplicación f conserva la razón queda muy simplificado por la observación de que la validez de

$$\omega(A) : \omega(B) = \omega'(f(A)) : \omega'(f(B))$$

no necesita verificarse para todos los pares $A, B \in \Omega$. En efecto, la

> validez para A, B y B, C

implica la

> validez para A, C,

transitividad de la conservación de la razón.

(En el caso de los constructos, pueden usarse más simplificaciones que se sustentan en hechos geométricos; en el plano, basta con comprobar la conservación de la razón para las distancias desde dos puntos fijos; el resto queda garantizado por los teoremas de congruencia.)

Es menos trivial captar que la conservación de la razón se puede describir por la existencia de un factor de escala constante, esto es, por una razón externa.

Otra intuición importante es que la

> composición de aplicaciones que conservan la razón da de nuevo aplicaciones que conservan la razón

y saber

> cómo se comportan los factores de escala (razones externas) bajo la composición de aplicaciones que conservan la razón.

En el caso de las magnitudes es importante darse cuenta de que la conservación de la razón se reconoce esencialmente como un isomorfismo con respecto a la adición de magnitudes.

Voy a formular unos pocos niveles:

Simplificar la verificación de la conservación de la razón mediante

la transitividad de la conservación de la razón,

propiedades de congruencia geométrica,

la razón externa y el factor de escala,

el isomorfismo con respecto a la adición entre magnitudes,

el comportamiento bajo la composición de aplicaciones;

simplificar la construcción de las aplicaciones que conservan la razón gracias a los mismos principios;

resolver conflictos al aplicar estos principios;

entender estos principios de forma operativa y describirlos;

entender las relaciones entre estos principios operativamente y describirlos.

En el curso de la algoritmización, esto se complementa con

entender las razones de forma operativa en el contexto de la aritmética de fracciones, y

describir esa relación;

entender las propiedades de la razón operativamente como propiedades de las fracciones, y

describir esa relación;

entender la conservación de la razón de las aplicaciones entre magnitudes operativamente como linealidad, y

describirla como tal;

entender sus propiedades operativamente como propiedades de aplicaciones lineales, y

describirlas como tales.

Lo contrario, que pertenece con más propiedad al capítulo sobre fracciones, puede añadirse explícitamente:

entender las fracciones operativamente en el contexto de la razón, y describir esa relación;

entender las propiedades de las fracciones operativamente como propiedades de la razón, y

describir esa relación;

entender las aplicaciones lineales en el dominio numérico operativamente como aplicaciones que conservan la razón, y

describirlas como tales;

entender sus propiedades operativamente como propiedades de las aplicaciones que conservan la razón, y

describirlas como tales.

Las aplicaciones que conservan la razón no sólo sirven en las visualizaciones, sino que también tienen su propia función cognitiva como modelos, como lo muestra nuestro primer ejemplo, el movimiento uniforme como una aplicación que conserva la razón de la magnitud tiempo sobre la magnitud longitud.

Las propias aplicaciones que conservan la razón se ilustran

gráficamente (la línea recta como una imagen de la función lineal),

nomográficamente,

mediante la regla de cálculo,

y algorítmicamente mediante

tablas de proporcionalidad (matrices de proporcionalidad),

formulas para las funciones lineales.

Los niveles que podrían mencionarse serían

leer;

construir;

entender operativamente los principios de los artefactos, y describirlos;

aislados y en sus conexiones mutuas.

6.16. *Criterios para la conservación de la razón*

Los principios por los que uno

reconoce y predice

que una aplicación conserva la razón están mucho más profundamente arraigados y son menos accesibles. Apenas pueden ser aclarados sin una fenomenología didáctiva previa de magnitudes particulares. La discusión subsiguiente sólo intenta esbozar cómo puede producirse esto.

Comienzo con una lista ejemplar de adjetivos, cuyo significado se tornará claro sin dilación:

muchos, grande, largo, ancho, alto, grueso, mucho, lleno, duradero, pesado, rápido;

fuerte, viejo, afilado, romo, blando, denso;

brillante, cálido, rojo, atronador, húmedo, alto;

dulce, bello, doloroso;

inteligente, interesante, somnoliento, difícil;

valioso, caro, rico.

Algunas de estas palabras tienen varios significados (por ejemplo, “brillante”). El adjetivo “alto” aparece dos veces en esta lista, en el primer lugar puede significar una propiedad de las montañas; en el segundo, una propiedad de los sonidos, pero esto aquí no nos importa.

Uno puede hacer las preguntas:

¿Qué propiedades admiten comparativos?

¿Qué propiedades admiten la acción de duplicar?

(“Duplicar” figura aquí como paradigma; más general sería “multiplicar”, quizá también demediar, dividir; finalmente, también añadir.)

¿Cómo comprobar comparativos?

¿Cómo comprobar el duplicar?

¿Cómo hacer comparativos?

¿Cómo hacer dobles?

Estas son preguntas sobre hechos, aunque con un toque analítico considerablemente lógico o lingüístico.

La pregunta central es la de duplicar. El proceso de duplicar es el de combinar dos iguales. Éste es cómo transformar una torre en una de altura doble, a saber poniendo una torre "igual" encima de ella. Un peso de azúcar se dobla añadiendo uno igual. La temperatura muestra que las cosas no son siempre así de fáciles: la temperatura de un líquido no se dobla por añadir un líquido de la misma temperatura; de la misma manera, la velocidad de una pelota que rueda no se dobla uniéndola con una de la misma velocidad.

Los parámetros que, cuando las cosas se combinan, se comportan aditivamente se llaman

extensivos

—número, longitud, área, volumen, peso, energía, luminosidad (de una fuente luminosa), carga eléctrica, todos tienen esta propiedad; otros como temperatura, color, dureza se llaman

intensivos.

No obstante, incluso parámetros como la temperatura, o más bien la diferencia de temperaturas, pueden interpretarse como parámetros *extensivos*, aunque de un proceso más que de un estado. Así que lo que se combinan son los procesos y no los estados. Por lo que respecta a la temperatura, por ejemplo, una diferencia de temperatura que se obtiene mediante el calentamiento con una fuente de calor W durante un tiempo t, se dobla si el "mismo" proceso se repite (realmente, esto se cumple sólo dentro de ciertos límites). En el caso de velocidades —vectoriales— esta combinación con el ánimo de duplicar tiene de nuevo aspecto diferente: si A con respecto a B y B con respecto a C tienen la misma velocidad, A tiene doble velocidad con respecto a C.

El principio gracias al cual la conservación de la razón por aplicaciones puede reconocerse y predecirse puede formularse ahora de la siguiente manera:

> *Dos parámetros que son extensivos bajo la misma operación de combinación están en una relación que conserva la razón.*

No pretendo que este ahondar haya traído una sabiduría profunda a la superficie. El resultado es, dicho de forma valiosa, el criterio al que cada profesor competente recurrirá, más o menos conscientemente, si quiere convencer a sus alumnos sobre cuándo pueden usar la "regla de tres" y cuándo no. “Quien trabaja el doble de tiempo consigue el doble de dinero” —dice, por ejemplo, quizá mientras coloca dos veces una cantidad de dinero bajo dos intervalos iguales en un eje temporal. O “doble espacio en tiempo doble”, con una ilustración similar.

Está claro por qué no se puede extraer ninguna inferencia sobre el número de viudas de Enrique IV a partir del número de viudas de Enrique VIII, ya que el número de orden de los reyes del mismo nombre no hay manera de explicarlo mediante combinación alguna como un parámetro extensivo. La regla de tres no se aplica al problema “si un hombre recorre una distancia en 3 horas y su hijo lo hace en 2, ¿cuánto tiempo necesitan si caminan juntos?”, ya que ir juntos, para gente que van igualmente rápido, no cambia en absoluto el tiempo requerido. Aún así, también en el problema de los trabajadores que hacen un cierto trabajo primero individualmente y luego juntos, la pregunta central es: ¿el tiempo que se requiere se dobla si dos iguales trabajan juntos? No, se reduce a la mitad, así que el tiempo recíproco emerge como un parámetro extensivo. Y lo mismo sucede en el caso del hombre y su hijo, con tal que no caminen juntos sino que caminen para encontrarse.

Anoto los niveles siguientes:

decidir sobre la propiedad de conservar la razón de aplicaciones en contextos de hecho y situaciones problemáticas;

reformular contextos y problemas de manera que las propiedades de conservar la razón ganen prominencia;

decidir conflictos bajo estas circunstancias;

entender principios de tales decisiones y construcciones operativamente, y

describirlos.

Pueden requerirse actividades auxiliares en los niveles siguientes:

Con el fin de orientarse hacia la conservación de la razón

considerar pares de parámetros que son extensivos bajo la misma combinación, y

buscar tales parámetros;

captar la importancia de tales parámetros para la conservación de la razón, y explicarla.

En estas actividades auxiliares, se pueden distinguir estos niveles:

decidir respecto a parámetros de estados y procesos si son extensivos según una cierta manera de combinar,

encontrar parámetros extensivos para formas dadas de combinar,

encontrar formas de combinar que conviertan en extensivos unos parámetros dados;

encontrar parámetros y formas de combinar que encajen unos con otras;

entender lo que son los parámetros extensivos operativamente, y

describirlos.

6.17. *No linealidad*

Una gran variedad de fenómenos sugieren que la proporcionalidad, la conservación de la razón, la linealidad son modelos universales; la fe en estos modelos se refuerza por su uso frecuente. Al menos aproximadamente la relación lineal parece apropiada en muchos casos como una herramienta fenomenológica de descripción. Indicamos casos en los que esta fenomenología primitiva falla por razones teóricas:

el comportamiento no lineal de áreas y volúmenes bajo la multiplicación lineal;

la variabilidad no lineal de la precisión en las medidas y los datos aleatorios bajo la multiplicación del tamaño de la muestra.

Un ejemplo histórico notable:

la apuesta por al menos un seis en 4 lanzamientos de un dado se consideró equivalente a la de al menos una vez dos seises en 24 lanzamientos de dos dados.

Otro ejemplo histórico:

la idea de resolver el "problème des partis"[*] mediante un procedimiento lineal.

¡Fe, adquirida por una práctica prolongada, en la linealidad (o la regla de tres), cuando nuevos principios estaban en juego!

6.18. *El uso de razones y proporciones*

---

[*] *Mathematics as an Educational Task*, pág. 584.

El uso general es para predecir un cuarto término cuando se dan tres en

$a : b = c : d$.

Las razones en ambos lados pueden pensarse como

internas,

y relacionadas con

magnitudes iguales o diferentes,

por ejemplo

dos cintas a, b y dos valores monetarios c, d,

o

dos caminos en un mapa a, b y dos longitudes c, d.

O pueden pensarse como

externas,

por ejemplo

dos cintas a, c y dos valores monetarios b, d,

o

dos caminos en un mapa a, c y dos longitudes b, d.

También puede suceder que una de las razones esté

dada explícitamente como tal,

lo que significa realmente sólo dos datos, por ejemplo, en el caso de la razón externa

camino a tiempo, peso a volumen

explícitamente como

velocidad, densidad.

En la sección 4.19[9], analizamos una estrategia para comparar cardinales aproximadamente de lo que designamos entonces como

conjuntos *k*-homogéneos.

En nuestra terminología actual, la relación entre el cardinal # y el carácter *k* de un conjunto se denominaría conservación (aproximada) de la razón. Como ya anunciamos en esa sección, puede usarse para estimar cardinales y razones entre cardinales.

Un uso práctico de las proporciones en general incluye

cambiar los términos medios para sacar provecho de la relación entre razones internas y externas,

procesar los datos, independientemente de la posición de los datos,

explotar las propiedades que definen las razones internas y externas, usando modelos que las visualicen,

componer y descomponer proporciones,

estimar parámetros mediante parámetros aproximadamente linealmente dependientes.

6.19. *"Razón" en el proceso de aprendizaje*

Esta sección ha sido sugerida por experiencias en instituciones de formación de profesores, aunque están enraizadas en principios que se ilustrarán más adelante mediante ejemplos ulteriores.

En la sección 6.7 subrayé que en contextos visuales los niños —incluso en edad preescolar— pueden captar el punto de vista relativo y las razones (figuras 58 y 59).

insertar las figuras 58 y 59 de las páginas 207 y 208 del original

En el tema desarrollado en IOWO "Los saludos del gigante" los niños estiman el tamaño del gigante (y otros muchos tamaños relacionados) a partir de la huella de la mano del gigante en la pizarra. Este enfoque directo es posible porque el texto no introduce *ningún dato numérico*. El tema "terreno de camping", sin embargo, es mucho menos accesible de forma directa porque introduce *datos numéricos explícitamente* y se dirige a niños que han aprendido a identificar la medición con el uso de la regla.

---

[9] Esta sección del libro de Freudenthal no aparece en este selección. El capítulo 4 se titula "Números naturales", y su sección 19, "Comparar números naturales mediante estimaciones".

Un caso similar:

> Mónica (5; 8) construye torres con bloques congruentes. Es bastante buena comparando torres de alturas diferentes, incluso si están colocadas sobre bases diferentes. Ha colocado 11 bloques uno sobre otro. Le pido que me muestre la altura de una torre de 20. Señala una altura 2-3 bloques mayor. La dejo que continúe construyendo. A los 13, le repito la pregunta; su contestación es algo mejor. Le pregunto cuántos habría que añadir. Sus labios se mueven. Obviamente está contando de 14 a 20 y una y otra vez se lleva una decepción porque no sabe cuántos debe añadir. Le enseño a llevar la cuenta con los dedos mientras cuenta.

Cuento esta historia para desvelar mi comportamiento didáctico incompetente: la traducción prematura e innecesaria de una razón a un problema numérico. Esto es bastante característico del dominio tradicional de la aritmética sobre la instrucción matemática.

Para los profesores en formación a los que he observado, "razón" es o bien una relación imprecisa que no ha sido hecha consciente, o un fenómeno completamente algoritmizado o automatizado —en el caso más favorable, expresado mediante matrices de proporción. Los objetos mentales "relativamente" y "razón" han sido bloqueados por asociaciones numéricas. Los que estudian para profesor tienen grandes dificultades para crear modelos mediante los cuales puedan abrir a sus alumnos la entrada a los objetos mentales: ni siquiera captan la pertinencia de tales modelos. Obviamente esto es una consecuencia de sus propios procesos de aprendizaje de la razón que han sido dirigidos directamente hacia los algoritmos.

Con esto no quiero decir que estos estudiantes no han pasado nunca por un período de intuiciones con respecto a "relativamente" y "razón". No hace falta suponer —y probablemente no sea así— que han experimentado estas nociones desde el comienzo de forma algorítmica (para automatizarlas más tarde). Es más probable —y esto es típico de muchos procesos de aprendizaje— que las fuentes originales de intuición hayan sido embozadas y el camino de vuelta a la intuición esté bloqueado por los procesos de algoritmización y automatización. La autonomía de los algoritmos y los automatismos es una propensión fuerte que es comprensible: demasiada intuición puede ser un estorbo bajo ciertas circunstancias. De todas maneras, tenemos que mirar críticamente las malas consecuencias de tales bloqueos. ¿Qué podemos hacer contra ellos?

Contestaré esta pregunta en varias ocasiones. Muy a menudo es necesario, pero no suficiente, que los algoritmos se *adquieran* por intuición. El proceso de aprendizaje debe ser conducido de tal manera que las fuentes de la intuición no se embocen durante el proceso de algoritmización y esquematización. Esto puede conseguirse, en mi opinión, volviendo una y otra vez durante el proceso de algoritmización y esquematización e incluso después donde sea factible, a las fuentes de la intuición. Este proceso apunta a una conciencia cada vez mayor de lo que inicialmente era subsconsciente y una verbalización cada vez más precisa de lo que inicialmente no se verbalizaba en absoluto. Con respecto a "relativamente" y "razón", esto significa que los modelos visuales se invocan y se abstraen en modelos de pensamiento reiteradamente. Lo que es erróneo en muchos métodos es una satisfacción con la unicidad de ciertos pasos decisivos en el proceso de aprendizaje y con ejercicios repetidos de las *consecuencias* de tales pasos, en vez de repetir los propios pasos. Una medida correctiva: repetir el paso si algo va mal en el automatismo. Pero es más importante la prevención: repetir el paso de la intuición al automatismo antes de que las cosas se tuerzan, con el fin de garantizar la capacidad de repetir el paso.