Resolución de Problemas

Ideas, tendencias e influencias en España

Enrique Castro Martínez
Dep. Didáctica de la Matemática
Universidad de Granada

1. Introducción

La ciencia es, en esencia, una actividad de resolución de problemas (Laudan, 1986). Esta consideración de que la investigación científica tiene como objetivo la resolución de problemas al margen de la verdad o falsedad de las teorías, la comparten investigadores de diversas disciplinas, filósofos e historiadores de la ciencia, y ocurre así porque la resolución de problemas forma parte de la actividad intrínseca al quehacer científico. Objetivo de la ciencia es la creación, desarrollo, crítica y transmisión del conocimiento. El investigador elabora intencionalmente conocimientos para dar respuestas fundadas y soluciones prácticas a las cuestiones planteadas, que se puedan instrumentar por medios tecnológicos. La orientación contemporánea de la ciencia estructura la investigación mediante proyectos, que establecen los problemas que se quieren indagar y el plan de trabajo que se proponen realizar para dar contestación a los interrogantes y encontrar las soluciones demandadas (Ziman, 2003, p. 25). La vinculación de la resolución de problemas con el conocimiento científico es indiscutible, cada disciplina aborda estas cuestiones desde una perspectiva propia y, por ello, hay aproximaciones variadas a la noción de problema y a las técnicas de resolución.

Debido a su especificidad, nuestro trabajo se centra en los valores educativos de la resolución de problemas, con especial consideración por los problemas matemáticos en el ámbito escolar. Para las Ciencias de la Educación la resolución de problemas es importante desde el punto de vista de su enseñanza y aprendizaje y también un tema prioritario de estudio e investigación, desde el momento en que la capacidad para resolver problemas se presenta como meta relevante para la educación de los estudiantes. La importancia de la resolución de problemas en el sistema educativo es una idea generalizada ya que

> "La enseñanza en las ramas de ciencia tiene generalmente como fin alcanzar dos objetivos: la adquisición de un cuerpo de conocimiento organizado en un dominio particular y la habilidad para resolver problemas en ese dominio" (Heyworth, 1999, p. 195).

Así pues, resolver problemas no es sólo una actividad científica, también constituye un tipo de tarea educativa que debe ocupar una posición destacada en los procesos de enseñanza y aprendizaje de los niños, adolescentes y estudiantes en general. Por ello, la resolución de problemas es un contenido escolar, que contribuye a la formación intelectual y científica de los estudiantes. A su vez, la consideración curricular de la resolución de problemas y los procesos de enseñanza y aprendizaje involucrados se configuran como tema de estudio e investigación para los especialistas en Ciencias de la Educación. De ahí que, su importancia en Educación Matemática, aunque no es nueva, ha experimentado desde mediados del siglo veinte un impulso creciente, hasta llegar a constituir un campo de investigación con características bien diferenciadas.

2. Resolución de Problemas en Educación Matemática

En el ámbito las Ciencias de la Educación, cada disciplina aborda el estudio de la resolución de problemas con una visión propia. Concretamente en Educación Matemática se pueden distinguir diversas aproximaciones. La resolución de problemas ha sido explícitamente estudiada, entre otros, por filósofos (Dewey, 1989), psicólogos (Bell, Fischbein y Greer, 1984; Mayer, 1986; Newell y Simon, 1972; Sternberg, 1994; Vergnaud, 1983), matemáticos profesionales (Hadamard, 1947; Poincaré, 1963; Polya, 1979), y especialistas en Educación y Didáctica de la Matemática (Carrillo, 1995; Cobo y Fortuny, 2000; Kilpatrick, 1967; Puig, 1996; Schoenfeld, 1985, 1987, 1994; Rico, 1988; Rico et al., 1994; Socas, 2001). Cada uno de estos profesionales ha dado un enfoque propio a la investigación en resolución de problemas, lo que hace que hoy día nos encontremos, como ya manifestaba Silver (1985), con una considerable masa de investigación en resolución de problemas, cuya completa sistematización está aún por concluir.

Kilpatrick (1992) revisa las principales corrientes de investigación en Educación Matemática que tuvieron lugar durante el siglo XX y destaca entre ellas las que se centraron en el estudio de la resolución de problemas. Considera que los trabajos de Wilson, Brueckner, Wertheimer y Brownell son antecedentes valiosos, previos a la segunda guerra mundial. Se considera el año 1956 como una fecha clave para el desarrollo de la investigación desde una perspectiva cognitiva, relacionada con la teoría del procesamiento de la información (Newell y Simón, 1972). Hay que resaltar también, en una perspectiva análoga, los análisis neuropsicológicos de los procesos intelectuales directamente implicados en la resolución de problemas realizados por Luria y sus colaboradores en la Unión Soviética desde la década de los cuarenta.

Romberg (1969), en una revisión de investigaciones, destaca la resolución de problemas como uno de los campos de investigación sistemáticos en educación matemática durante la década de los 60. Estos trabajos se incrementan a lo largo de la década de los 70. Beagle (1979) incluye en su revisión de investigaciones en Educación Matemática la resolución de problemas como una de sus categorías más productivas.

A partir de la década de los 80 se aprecia también en España la incidencia de la preocupación por la investigación en resolución de problemas en los trabajos del Grupo Cero de Valencia, en las investigaciones realizados por el grupo de Pensamiento Numérico de la Universidad de Granada (Castro, 1991, 1995; Fernández, 1997; Rico, 1988; Rico et al., 1994), de la Universidad de Valencia (Puig, 1996), de la Universidad de Barcelona (Cobo y Fortuna, 2000), de La Universidad de La Laguna (Socas, 2001) y de la Universidad de Huelva (Carrillo, 1995 y Contreras, 1998).

3. Líneas de investigación en resolución de problemas

La resolución de problemas es una extensa área de investigación. Una manera de describir y situar una investigación en resolución de problemas es considerar los distintos agentes que intervienen en la resolución de un problema y los componentes que lo articulan. Desde el punto de vista escolar en el que estamos interesados hay que tener en cuenta que en toda situación de resolución de los problemas de matemáticas se distinguen o intervienen tres componentes (Kilpatrick, 1978): el *problema*, interrogante o cuestión que se plantea, el *alumno* (o los alumnos) a quien se plantea el problema para que lo resuelva, y la *situación* en que resuelve el problema, que en el ámbito educativo es el aula, manejada por el *profesor*. La consideración de cada uno de ellos, por separado o conjuntamente, en interacción con los otros componentes, permite situar distintas líneas de investigación en resolución de problemas en Educación Matemática. Los tres componentes constituyen las dimensiones de un continuum que permite enmarcar las investigaciones sobre resolución de problemas escolares. En unos casos las investigaciones se centran en una de estas dimensiones, o en más de una, pero sin perder la perspectiva de las otras dimensiones de manera individual o en conjunto.

Lester (1983) completa la idea anterior con las investigaciones ligadas a la propia metodología de investigación. Para Lester (1983), la multitud de variables que inciden en la resolución de problemas, especialmente en matemáticas, hace que parezca casi imposible realizar análisis adecuados. Sin embargo, considera que se pueden utilizar algunas categorías de elementos claramente identificables como variables para clasificar las líneas prioritarias de las investigaciones en resolución de problemas matemáticos: *Factores de tarea*, relacionados con la naturaleza del problema; *factores del sujeto*, o características de la persona que resuelve el problema; *factores del proceso,* conductas individuales durante la resolución de problemas; *factores ambientales,* características externas al problema y al resolutor, y *factores de instrumentación y metodología de la investigación.*

Entre los aspectos que han merecido la atención y han estado incluidos en las agendas de investigación a nivel internacional sobre resolución de problemas se encuentran los incluidos en la tabla 2.

Tabla 2. Temas de investigación en resolución de problemas

• aislamiento de determinantes clave de la dificultad de los problemas, • esquemas en resolución de problemas (Marshall, 1995) • identificación de las características de buenos resolutores de problemas; • identificación de estrategias; entrenamiento en heurísticos y estrategias • comparación entre buenos y malos resolutores de problemas (expertos vs. novatos) • metacognición (Flavell, 1976; Garofalo y Lester, 1985; Schoenfeld, 1992). • afectos/creencias en resolución de problemas (DeBellis y Goldin,1997)	• interacciones sociales (Cobo y Fortuny, 2000; Goos, Galbraith y Renshauw, 2002). • resolución de problemas en contexto (resolución de problemas situada) (Greeno, 1991; Greeno, Collins y Resnick (1996) • invención de problemas (English, 1998; Silver y Cai, 1996; Tortosa y Castro, 1997) • evaluación de la resolución de problemas (Charles, Lester y O¨Daffer, 1987; Fernández, 1997) • representación y resolución de problemas (Castro, Morcillo, Castro, 1999; Goldin, 1998a; Lesh, 1997; Schwartz, 1981) • tecnología y resolución de problemas

Forzando la situación y con ánimos de simplificar la exposición, si nos atenemos a los motivos prácticos que nos conducen en Educación Matemática a investigar en resolución de problemas de matemáticas, considero que las investigaciones realizadas se pueden agrupar en dos grandes líneas: a) enseñar a resolver problemas y b) estudios sobre cómo pensamos cuando resolvemos problemas.

4. Enseñar a resolver problemas

Aprender a resolver problemas es la destreza más importante que los estudiantes pueden aprender en cualquier lugar del mundo (Jonassen, 2004). Pese a esta importancia, Jonassen pone de manifiesto que la resolución de problemas ha dejado de ser un centro de atención, y se pregunta por qué ha dejado de interesar la resolución de problemas en los ámbitos de investigación y no se realizan más esfuerzos en ayudar a los estudiantes a que aprendan a resolver problemas. En las primeras etapas (Lester, 1982), el énfasis se puso en si se podía enseñar a los alumnos a resolver problemas y la mejor estrategia metodológica para hacerlo. Durante mucho tiempo los educadores han creído que es posible enseñar a resolver problemas o, por lo menos enseñar a pensar matemáticamente. Han justificado su creencia en filósofos de la educación, como Dewey (1989), que integró la resolución de problemas en su teoría de cómo pensamos los humanos, o en educadores matemáticos como Polya (1979). Dewey en 1910 describió etapas del pensamiento en la resolución de problemas que son un preludio o al menos un antecedente, de las que propuso Polya posteriormente en 1945 en su How to solve it, un compendio para el profesor de cómo puede ayudar a sus alumnos de forma efectiva en la resolución de problemas.

Las ideas de Polya fueron previamente difundidas en conferencias. G. Polya dio, en 1931, una conferencia ante la Sociedad Suiza de Profesores de Matemáticas bajo el título “Cómo buscar la solución de un problema de Matemáticas”. Tres años después, en 1934 apareció una reseña de esta conferencia en Matemática Elemental, órgano de los círculos matemáticos de estudiantes, publicado bajo los auspicios de la sociedad matemática argentina y de la sociedad matemática española, en la que se subraya que el su fin era presentar “un nuevo método de enseñanza” y que se trata de “un vademécum que se contiene en una sola hoja de papel”. El vademécum es una versión preliminar al que apareció en 1945 (Polya, 1979) y contiene las cuatro fases de resolución de un problema, acompañada cada una de ellas por un listado de sugerencias heurísticas apropiadas, adaptado al fin y al nivel medio de las escuelas. Este pudo ser el inicio de la influencia importante que ha tenido la obra de Polya en España, sobre todo en los profesores de matemáticas de la Enseñanza Secundaria, y que ha llegado hasta las últimas propuestas curriculares que para matemáticas se han promulgado desde el Ministerio de Educación para este nivel educativo. Los grupos de renovación pedagógica, en su momento, también participaron de este "ideal" de la resolución de problemas, como es el caso del Grupo Cero Valencia, que propuso un diseño curricular para alumnos de 12 a 16 años (Grupo Cero, 1985) donde se enfatiza la importancia de las estrategias de resolución de problemas y las capacidades básicas que se consolidan mediante la actividad matemática: generalizar, abstraer, hacer hipótesis y someterlas- a pruebas, explorar, tomar decisiones, proponer ideas nuevas, hacer frente a situaciones problemáticas con la confianza que pueden ser comprendidas y resueltas. En este enfoque el papel del profesor es de ayuda en la consolidación del uso sistemático de las herramientas heurísticas, entre las que destacan las citadas por Polya.

4.1. La resolución de problemas en propuestas curriculares

Desde la década de los 60 se aprecia una preocupación creciente por incorporar la resolución de problemas en el currículo de las matemáticas escolares y un esfuerzo por sustentar las innovaciones curriculares sobre trabajos de investigación educativa. Las traducciones de trabajos de la escuela soviética de Educación Matemática (Kilpatrick y Wiszurp, 1969, 1972; Krutetskii, 1976) pusieron de manifiesto el enorme interés de este foco de investigación y los considerables avances que habían realizado.

Subrayamos algunas referencias que han sido documentos claves:

- El NCTM noteamericano publica An Agenda for Action, 1980, y sitúa como primer ítem en su lista de recomendaciones para la década de los 1980 la idea de que la resolución de problemas debe ser el eje de la matemática escolar, el principal objetivo de la enseñanza de las matemáticas y dedica el libro del año 1980 íntegramente al tema: Problem Solving in School Mathematics (NCTM, 1980).

- La ATM inglesa, en el párrafo 249 del informe Cockcroft establece que la habilidad en resolver problemas es el núcleo central de las matemáticas, y elabora un escueto documento en el que se afirma taxativamente que la resolución de problemas podría y debería reemplazar a la aritmética rutinaria como el tema principal en las clases de primaria.

- Los Estándares Curriculares del NCTM (1989, 2000) incluyen la resolución de problemas como uno de los estándares que hay que desarrollar en el currículum escolar de matemáticas.

En España se incluyen recomendaciones explícitas en la propuesta curricular que propugna el MEC en el Decreto Curricular Base de 1989.

> "La resolución de problemas dentro del curricula de Matemáticas es un contenido prioritario, porque es un medio de aprendizaje y refuerzo de contenidos, da sentido aplicativo al área y permite la interrelación entre los distintos bloques y las restantes áreas " (MEC, 1989).

Entre las múltiples sugerencias que aporta el DCB, destacamos:

> "En los planteamientos metodológicos se ha de tener en cuenta que el alumno ha de desarrollar y perfeccionar sus propias estrategias, a la vez que adquiere otras generales y específicas que le permitan enfrentarse a las nuevas situaciones con probabilidad de éxito. En este sentido, se brindará a los niños la oportunidad de familiarizarse con procesos que facilitan la exploración y resolución de problemas como: comprensión y expresión de la situación matemática (verbalización, dramatización, discusión en equipo), extracción de datos y análisis de los mismos, representación en forma gráfica del problema o situación, formulación de conjeturas y verificación de su validez o no, exploración mediante ensayo y error, formulaciones nuevas del problema, comprobación de resultados y comunicación de los mismos. Se hace necesario, asimismo, desarrollar la capacidad de persistir en la exploración de un problema" (MEC, 1989).

En los programas para la Educación Secundaria Obligatoria el MEC (2000) establece en el Real Decreto 3473/2000, para la modificación de las Enseñanzas Mínimas para la ESO, que

> "La resolución de problemas debe contemplarse como una práctica habitual, que no puede tratarse de forma aislada, sino integrada en todas y cada una de las facetas que conforman el proceso de enseñanza y aprendizaje" (p. 1843).

El objetivo 5 de este Real Decreto dice que se deben resolver problemas matemáticos utilizando diferentes estrategias, procedimientos y recursos, desde la intuición hasta los algoritmos.

Actualmente, la modificación de las enseñanzas mínimas realizada por el MEC (2007) orientada al desarrollo de competencias contempla la puesta en práctica de procesos de razonamiento que llevan a la solución de los problemas y la aplicación de estrategias de resolución de problemas. En todos los cursos se ha incluido un bloque de contenidos comunes que constituye el eje transversal vertebrador de los conocimientos matemáticos que abarca. Este bloque hace referencia expresa, entre otros, a un tema básico del currículo: la resolución de problemas, con el que se pretende:

- Utilización de estrategias y técnicas simples en la resolución de problemas tales como el análisis del enunciado, el ensayo y error o la resolución de un problema más simple, y comprobación de la solución obtenida.
- Expresión verbal del procedimiento que se ha seguido en la resolución de problemas.

- Confianza en las propias capacidades para afrontar problemas, comprender las relaciones matemáticas y tomar decisiones a partir de ellas.
- Perseverancia y flexibilidad en la búsqueda de soluciones a los problemas.

Visto lo anterior, la presencia e importancia de la resolución de problemas se ha mantenido e incluso acrecentado en las propuestas curriculares, tanto a nivel nacional como internacional, lo que no concuerda con la pérdida de interés por parte de los investigadores.

4.2. Críticas al modelo

Las críticas al enfoque de enseñar a resolver problemas basado en el trabajo de Polya (1979) no se dejaron esperar. Puig Adam no fue ajeno a esta corriente. Ya en 1959, al plantear su punto de vista cibernético sobre el problema de los problemas (Puig Adam, 1985), criticó la insuficiencia y generalidad de los consejos de Polya:

> *"todo cuanto se llega a sacar de esta metodología clásica de los problemas es una cierta costumbre de trazar, de tender caminos que enlacen la solución buscada a las premisas establecidas en la red más* o *menos vasta de implicaciones lógicas en que están inmersas. Pero a medida que el campo se ensancha y los puntos de partida y de llegada se alejan de las perspectivas corrientes, estos sabios consejos metodológicos muestran una insuficiencia pareja a su generalidad"* (p. 40).

Puig Adam, valora más las aportaciones de Polya relativas al razonamiento plausible en matemáticas (Polya, 1966) fundado en la inducción, en la analogía, en la inferencia, …

Beagle (1979) incluye la resolución de problemas en su revisión de investigaciones en Educación Matemática y la considera una de sus categorías más productivas. Sin embargo, concluye que:

> "*De los hallazgos de estos estudios no se han obtenido directrices claras para la educación matemática. De hecho hay bastantes indicadores de que las estrategias de resolución de problemas dependen tanto del estudiante como del problema, por lo que es demasiado simplista tratar de determinar una (o varias) estrategias que deberían ser enseñadas a todos (o a la mayoría) de los estudiantes.*" (p. 145).

Schoenfeld (1979) estaba en un principio en la línea de instruir a los estudiantes en heurísticos para la resolución de problemas; pero en su revisión de 1992 reconoce que los intentos realizados para enseñar a los alumnos estrategias generales de resolución de problemas no han tenido éxito, y considera que quizás sea mejor enseñar estrategias especícas ligadas a clases de problemas. Además de las estrategias, Schoenfeld (1992) centra su atención en la incorporación de nuevos componentes de la resolución de problemas que puedan explicar las actuaciones de los resolutores: conocimiento base, aspectos metacognitivos, aspectos afectivos y el sistema de creencias y prácticas.

Como alternativa al modelo de actuación clásico de enseñar estrategias de resolución de problema, surgieron modelos de competencias: unos centrados en el aspecto representacional (Golding, 1987), otros basados en competencias formales (Socas, 2001; Socas, Hernández y Noda, 1998), y otros resaltando la componente heurística dentro de un modelo teórico local que incorpora el análisis de las tareas (Puig, 1996). Así mismo, recibieron atención aspectos que podían darle sentido al problema, como es el enfoque de invención de problemas, el conocimiento situado o la modelización. En esta etapa se produce también una deriva de la atención hacia aspectos no cognitivos del resolutor (afectos, creencias) o metacognitivos.

4.1. Invención de problemas

La invención de problemas es una actividad consustancial con la resolución de problemas, que aparece recogida en algunas de las propuestas de fases o etapas que se han dado para la resolución de problemas (Castro, 1991, p. 39). La invención de problemas se refiere a la creación de nuevos problemas a partir de una situación dada o bien a la formulación o reformulación de un problema durante el proceso de su resolución. La actividad de inventar problemas se puede dar antes, durante y después de resolver un problema dado, de ahí que aparezca con distintos nombres: plantear problemas, reformular un problema dado, variaciones de un problema, identificar problemas.

Es un hecho que los estudiantes resuelven problemas en sus clases de matemáticas. Habitualmente los problemas los propone el profesor o están recogidos en los libros de texto. Raramente los estudiantes resuelven problemas que hayan sido propuestos por ellos mismos. A este respecto subraya Kilpatrick (1987) que "la idea de que los propios estudiantes puedan ser la fuente de buenos problemas matemáticos probablemente no se le ha ocurrido a muchos estudiantes, ni a muchos de sus profesores" (p. 123). Sin embargo, los investigadores en educación matemática han enfatizado a lo largo del tiempo el valor educativo que tiene el que los estudiantes inventen problemas y han sugerido que se incorporen a las clases de matemáticas actividades de invención de problemas (Brown & Walter, 1990; Ellerton, 1986; Kilpatrick 1987; Mason, 2000; NCTM, 2000; Polya, 1979; Silver, 1994).

Silver (1994) subraya seis propósitos para los que se emplea la invención de problemas en la investigación en educación matemática:

a) La invención de problemas como característica de la actividad creativa o de la capacidad matemática
b) La invención de problemas como característica de una enseñanza orientada a la indagación (¿Qué pasaría si no?)
c) La invención de problemas como una característica de la actividad matemática
d) La invención de problemas como un medio de mejorar la capacidad de los estudiantes para resolver problemas
e) La invención de problemas como una ventana para observar la comprensión matemática de los estudiantes
f) La invención de problemas como medio para mejorar la disposición de los estudiantes hacia las matemáticas (intereses, actitudes, motivación,…).

Una idea central en la invención o planteamiento de problemas es la concepción de que el aprendizaje lo realiza el estudiante de un modo socializado e interactivo implicado en un proyecto de creación de conocimiento en la línea de la pedagogía de Freire, por lo que "puede ser utilizado para cambiar las rígidas jerarquías asociadas con concepciones convencionales acerca de las matemáticas, el currículo de matemáticas y la capacidad matemática (Silver, 1994, p. 21).

En España son pocos los trabajos que atañen a la invención de problemas, bien directa o indirectamente. El grupo de investigación sobre Pensamiento Numérico de la Universidad de Granada, ha incorporado la invención de problemas en algunos de sus trabajos de investigación, bien como parte de una metodología de resolución de problemas en el aula (Cázares, 2007; Rico (1988); Tortosa y Castro, 1997) o como una técnica para elucidar aspectos cognitivos de los sujetos (Castro y Castro, 1996).

La estrategia de enseñar a resolver problemas estableciendo distintas etapas similares a las de Polya ha tenido diversas variantes (Castro, 1991). Una de las más difundidas ha sido el método IDEAL para resolver problemas de Bransford y Stein (1986), que considera la resolución de problemas como un proceso uniforme de Identificar problemas, Definir y representar el problema, Explorar posibles estrategias, Actuar según las estrategias, y evaluar y examinar los Logros. Este esquema formó parte de la investigación "Didáctica activa para la resolución de problemas" dirigida por Rico (1988) y que tuvo una buena acogida por el profesorado que participó en la experiencia y que la llevó a cabo en el aula. Uno de los aspectos a destacar es su componente de invención de problemas.

También cabe citar el estudio de Maza (2000), en la Universidad de Sevilla, que utilizó la formulación de problemas para analizar la relación entre las características estructurales de los problemas formulados por estudiantes de magisterio y la designación de estos problemas como fáciles o difíciles. Como se puede ver el bagaje de investigaciones en España sobre invención o planteamiento de problemas es escaso.

4.2. Afectos/concepciones

Las investigaciones sobre resolución de problemas se han centrado más en los aspectos cognitivos que los sujetos ponen en juego durante la resolución de problemas que en los afectivos. No obstante, la importancia de estos últimos ha sido resaltada en trabajos pioneros como el de Polya (1979): "Seria un error el creer que la solución de un problema es un "asunto puramente intelectual"; la determinación, las emociones, juegan un papel importante" (pp. 80-81). Si en una primera fase la ciencia cognitiva no los toma en consideración, Norman (1980) incluye ya los sistemas de creencias y las emociones como dos de los doce tópicos importantes de la ciencia cognitiva, y Silver (1985) contempla la relación entre los aspectos afectivos y la resolución de problemas.

La publicación de *Affect and mathematical problem solving* (McLeod y Adams, 1989), representa un punto de inflexión en la investigación sobre afectos y resolución de problemas. Los trabajos de McLeod han tenido gran influencia sobre prácticamente todas las investigaciones realizadas al respecto en España. McLeod (1992) hace un aporte importante a la conceptualización del campo y clasifica el domino afectivo en tres apartados: *emociones, actitudes y creencias*. De forma paralela, Goldin (1992), dentro de su modelo de competencia para la resolución de problemas, interpreta los afectos como un sistema representacional paralelo al sistema de representación cognitivo, al que añade un cuarto aspecto, *valores*. Este modelo ha sido desarrollado en trabajos posteriores (DeBellis, 1996; DeBellis y Golding, 2006). La influencia de McLeod, pero especialmente la de Goldin, se observa en el trabajo de Hernández (1996), sobre la las habilidades y actitudes que adquieren los alumnos en resolución de problemas aritméticos cuando se les instruye bajo un modelo de competencia basado en dos sistemas de representación yuxtapuestos. También aparecen reflejos de la obra de McLeod y de Goldin, en el trabajo sobre las emociones de Gómez-Chacón (2003).

Las actitudes hacia la resolución de problemas han sido consideradas como una componente de peso en las actitudes hacia las matemáticas. Una de las técnicas clásicas para estudiar las actitudes y los afectos en general es la de encuesta. En los cuestionarios, escalas y protocolos construidos y utilizados para estudiar las actitudes en el aprendizaje de las matemáticas, una buena parte de los ítems hacen referencia a la resolución de problemas. La escala de actitudes de Fennema y Sherman (1976), una de las más utilizadas, y sus sucesivas adaptaciones, son una buena prueba al respecto, que ha tenido su repercusión en investigaciones realizadas en España (Pérez-Tyteca, 2007). Otro ejemplo importante es el "cuestionario sobre creencias y actitudes acerca de las matemáticas" de Gil, Guerrero y Blanco (2006), que utilizan para estudiar el dominio afectivo en el aprendizaje de las matemáticas, 24 de los 52 ítems se refieren a la resolución de problemas, es decir, el 46% de los ítems del cuestionario. También las actitudes hacia la resolución de problemas han sido objeto directo de estudio en conjunción con modelos de instrucción en resolución de problemas, como es el caso de Hernández (1996), que utiliza un cuestionario de actitud hacia la resolución de problemas.

Si bien en sus primeros trabajos Schoenfeld estudió cómo enseñar a resolver problemas centrándose sólo en los heurísticos, en trabajos posteriores consideró aspectos metacognitivos, fundamentalmente el control y la autorregulación, y subrayó el papel importante que pueden tener los sistemas de creencias en las soluciones de los problemas (Schoenfeld, 1992). En Educación Matemática, los términos creencia y concepción son ambiguos y se utilizan a veces como sinónimos, a veces como inclusivos y otras veces con significados distintos (Callejo y Vila, 2003).

Con respecto a las concepciones señalar dos líneas de trabajo en las investigaciones. Una de ellas se refiere a la presencia de concepciones equivocadas que conducen a errores en la resolución de problemas de matemáticas y, una segunda línea, que estudia concepciones del profesor y su relación con la resolución de problemas. En esta línea, mediante estudio de casos, tanto en el trabajo de Carrillo (1995) como en el de Contreras (1998) desde un punto de vista de desarrollo profesional del profesor de matemáticas, investigan la relación entre las concepciones sobre la matemática y su enseñanza que tienen profesores de matemáticas de educación secundaria y bachillerato y sus modos de resolver problemas.

Son varias las razones que hacen difícil conciliar los afectos y las creencias o las concepciones con otros aspectos cognitivos en una teoría de resolución de problemas. Como ha mostrado la literatura, tanto los aspectos afectivos, como las creencias y concepciones, son persistentes, se van formando durante un periodo muy largo de tiempo y son difíciles de modificar. A veces, incluso cuando se intenta modificarlas, el resultado es que se empeora aún más la situación (Ortiz, 2002). Son muchos los estudios que han mostrado una correlación bastante alta entre las actitudes hacia la matemática en general (y la resolución de problemas en particular) y el rendimiento en esta disciplina; pero a pesar de esta correlación no ha sido posible encontrar una relación de causalidad que muestre que el fracaso en resolver problemas se deba a una mala actitud, así que puede ser a la inversa: que las actitudes desfavorables se han ido conformando durante un largo periodo de tiempo, a partir de una determinada edad, como rechazo a las experiencias vividas en el aprendizaje escolar de la matemática. Esta hipótesis, la avalan quienes afirman que los niños pequeños no tienen ningún tipo de actitud negativa hacia las matemáticas, y es en el sistema educativo escolar donde adquieren una actitud negativa hacia ellas.

5. Estudios centrados en el pensamiento

El énfasis de la resolución de problemas en la educación matemática se inició de forma paralela con el movimiento general en Psicología en la década de 1960 desde el conductismo hacia teorías cognitivas del aprendizaje. Mayer (1996) sintetiza el cambio que se produjo en esta época con el empleo de tres metáforas del aprendizaje: a) el aprendizaje como fortalecimiento de respuestas; b) el aprendizaje como procesamiento de la información, y c) el aprendizaje como construcción del conocimiento (véase tabla 1).

Tabla 1. Tres metáforas del aprendizaje (adaptado de Mayer, 1996)

Aprendizaje	Periodo	Sujetos y tareas de investigación	Papel del estudiante
Fortalecer respuestas	1900 - 1960	Animales en laboratorio. Tareas artificiales.	Receptor de premios y castigos
Procesar información	1960 - 1980	Humanos Tareas artificiales	Receptor de información
Construir conocimiento	1980- 2000	Humanos Tareas reales	Crear o darle sentido

De una manera u otra la investigación sobre cómo pensamos cuando resolvemos problemas se inicia con la segunda de estas metáforas, y sufre de las limitaciones que ella conlleva y la evolución que se produjo hacia la tercera.

La investigación en resolución de problemas tuvo un gran impulso con el surgimiento de la teoría del procesamiento de la información (Newell y Simon, 1972). De acuerdo con el enfoque del procesamiento de la información hay dos procesos mentales básicos implicados en la resolución de problemas: El primer proceso es la *construcción de una representación del problema* por parte del resolutor basadas en la comprensión de la información dada en el enunciado del problema. El segundo proceso implica el *empleo de una estrategia para guiar la búsqueda de solución* que vaya desde el estado inicial del problema (la información y los datos) hasta el estado final (la respuesta requerida). Estos dos procesos han sido identificados como dos grandes fases generales en la resolución de problemas: la *comprensión* del problema y la *solución* del problema (Kintsch y Greeno, 1985; Mayer, 1986; Newell y Simon, 1972; Riley, Greeno y Heller, 1983). Y constituyen dos grandes focos de atención en las primeras investigaciones sobre resolución de problemas. Para el caso particular de los problemas de enunciado verbal la comprensión del problema ha sido caracterizada mediante dos subetapas:

(a) traducción del problema a una representación interna, e
(b) integración del problema en una estructura coherente.

5.1. Comprensión y representación

Las investigaciones sobre problemas de estructura aditiva realizadas en la década de 1980 mostraron que la dificultad de un problema enunciado verbalmente es una función del tipo de esquema semántico necesario para representar el problema y de la identidad de la cantidad desconocida. Estos factores relacionados con la dificultad del problema son componentes del procesamiento semántico que Heller y Greeno (1979) identifican como el componente más importante del proceso de comprensión. Según Heller y Greeno, resolver un problema con comprensión conlleva construir una representación cognitiva de los elementos de la situación y las relaciones entre estos elementos. En la medida en que esta representación es coherente, se conecta con otras componentes del conocimiento de una persona y se corresponde con la situación problema, el problema se dice que está resuelto con comprensión.

Vergnaud (1981) se plantea inquietudes similares con respecto a la resolución de los problemas aritméticos escolares. Analiza las nociones desde una perspectiva cognitiva y su orden de complejidad creciente. Considera que hay diferencia entre el orden en que el matemático las expone y el orden en el que el niño las adquiere

> "las matemáticas forman un conjunto de nociones, relaciones, sistemas relacionales que se apoyan unos en otros. Pero el orden en el que el matemático expone estas nociones no es evidentemente el mismo que el orden en el que el niño los adquiere." (p. 7)

El segundo aspecto que tiene en cuenta es el análisis de las tareas escolares

> "El análisis de las nociones que tiene que adquirir el niño y su orden de adquisición no es suficiente. En efecto, esta adquisición se hace a través de tareas escolares diversas" (p. 8).

El tercer aspecto es el análisis de los éxitos y de los errores, es decir, el análisis de procesos

> "El análisis de las tareas y el estudio de las conductas de los niños cuando están enfrentados a estas tareas permite hacer un análisis de los éxitos y de los errores" (p. 9).

Por último, Vergnaud considera esencial el análisis de las representaciones

> "El análisis de los procesos no es suficiente por sí mismo para conducirnos hasta el final del análisis científico de los problemas que plantea la enseñanza de las matemáticas. En efecto, los medios utilizados por el niño, los caminos que sigue para resolver un problema o alcanzar el objetivo requerido en una tarea escolar dada, están profundamente enraizadas en la representación que se hace de la situación. Según que perciba o no las relaciones, las transformaciones y las nociones en juego, con todas sus propiedades o solamente con una parte de ellas, o con una visión falsa de estas propiedades llegado el caso, el niño utiliza tal proceso o tal otro, y eventualmente se desinteresa de la tarea a la que se enfrenta. La noción de representación está, como la noción de proceso, en el centro de la psicología científica moderna" (p. 9).

Hiebert y Carpenter (1992) reflexionan sobre la relación entre comprensión y representación interna. Afirman que la comprensión puede describirse en términos de las estructuras internas de conocimiento.

> "Una idea, un procedimiento o un hecho matemático se comprende si es parte de una red interna. Más específicamente, las matemáticas se comprenden si su representación mental es la parte de una red de representaciones. El grado de comprensión está determinado por el número y la fortaleza de las conexiones. Una idea matemática, un procedimiento, o un hecho se comprenden completamente si se vincula a redes existentes con conexiones fuertes y numerosas" (Hiebert y Carpenter, 1992, p. 67).

Partiendo de esta definición de comprensión, Porzio (1999) añade que una de las metas principales de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas es dotar de herramientas y oportunidades a los estudiantes con el fin de que puedan desarrollar amplias y bien conectadas redes de representaciones.

La dualidad formada por las representaciones y la comprensión, salieron reforzadas en los Estándares 2000 (NCTM, 2000). Sobre este tópico, Goldin y Shteingold (2001) afirman que *la comprensión conceptual consiste en la potencialidad y flexibilidad de las representaciones internas, incluyendo la riqueza de las relaciones entre tipos diferentes de* *representación* (p. 8), lo que otros autores expresan como esquemas semánticos (Marshall, 1995).

Nuestra línea de investigación se incardina dentro del marco de estudios sobre pensamiento numérico, que es una parte del pensamiento matemático. Desde una perspectiva general el pensamiento se ha identificado con la resolución de problemas y la cognición (Mayer, 1986), por lo que nuestros estudios tienen que ver con el pensamiento matemático, concretamente con el pensamiento numérico, y en muchos casos, se centran en la resolución de problemas aritméticos vistos desde una perspectiva cognitiva. A este respecto Ginsburg (1981), señala que

> "La investigación en pensamiento matemático tiene tres fines básicos: el descubrimiento de los procesos cognitivos, la identificación de los procesos cognitivos y la evaluación de la competencia" (p. 10).

5.2. Enfoques en la resolución sobre problemas enunciados verbalmente

Durante la segunda mitad del siglo veinte, el estudio del pensamiento de los niños cuando resuelven problemas aritméticos de enunciado verbal ha sido un tópico de interés tanto para psicólogos como para educadores matemáticos. Carpenter y Moser (1983) consideran este tipo de estudio útil para establecer principios psicológicos generales y para mejorar la instrucción en matemáticas.

Un aspecto importante en el procesamiento de los problemas enunciados verbalmente es el lenguaje (Fernández, Castro, Segovia y Rico, 1996). La investigación ha mostrado que un cambio en el lenguaje de problemas semánticamente equivalentes puede afectar a su resolución (Carpenter, 1985; Hudson, 1983). Numerosas investigaciones han prestado especial interés al papel que juega el lenguaje y las cuestiones asociadas en la resolución de problemas enunciados verbalmente. En las investigaciones que han tratado las dificultades de resolución de problemas en función del lenguaje, podemos distinguir (Castro, 1991; Castro, Rico y Gil, 1992) las que se han centrado en: a) la habilidad lectora, b) la legibilidad de textos, c) factores lingüísticos, y d) la estructura semántica. Durante la década de 1980 numerosos investigadores han estudiado la representación de problemas de estructura aditiva y han establecido categorías semánticas de problemas aditivos. Buen número de éstas estudian el nivel de dificultad y las estrategias de resolución en función de las categorías semánticas y en función de la identidad de la cantidad desconocida en el problema. Como en el caso de la estructura aditiva, en el periodo de 1980 a 1990 hubo inquietud en establecer categorías semánticas de problemas de estructura multiplicativa.

La clasificación semántica de los problemas de estructura multiplicativa no ha tenido tanto consenso como la de los problemas de estructura aditiva y se han propuesto varias clasificaciones (Castro, 1995; Puig y Cerdán, 1988) que, aunque difieren en su terminología, poseen categorías básicas comunes. Una atención especial dentro de los problemas de estructura multiplicativa han recibido los problemas de comparación de los que se considera que tienen una especial dificultad de comprensión. Lewis y Mayer (1987) enuncian la hipótesis de consistencia: “el resolutor posee un conjunto de esquemas o preferencias en relación a la forma de los enunciados de los problemas de comparación que coincide con los enunciados consistentes”. Cuando el enunciado es inconsistente el resolutor debe transformarlo mentalmente en enunciado consistente, lo que provoca mayor dificultad.

Las investigaciones sobre problemas de estructura aditiva realizados en la década de 1980 mostraron que la comprensión de un problema es función del esquema semántico necesario para representar el problema y de la identidad de la cantidad desconocida. Estos factores relacionados con la dificultad del problema son componentes del procesamiento semántico que Heller y Greeno (1979) identifican como el componente más importante del proceso de comprensión. Concretamente y con respecto a un mismo esquema semántico en un problema simple con dos datos y una incógnita hay tres posibilidades de problemas según cual sea la cantidad que actúe de incógnita. Estas tres posibilidades las hemos estudiamos en problemas de comparación para ver su incidencia por separado y en conjunción con una variable que se refiere a la forma de expresar al relación comparativa (Castro, 1991, 1995; Castro, Rico y Castro, 1992).

Aún sin haberse cerrado el estudio de los problemas simples de estructura multiplicativa y quedando cuestiones pendientes por investigar, en los inicios de la década de 1990 empieza a perder interés el estudio de los problemas aritméticos enunciados verbalmente, tanto los de estructura aditiva como los de estructura multiplicativa. Los problemas aritméticos de estructura aditiva habían sido trabajados con exhaustividad con lo cual comenzó a decaer su interés por parte de los investigadores. Esta inercia arrastró también a los de estructura multiplicativa que se encontraban en una fase menos avanzada de investigación. Surgieron o se propusieron nuevos focos de atención, entre ellos los problemas compuestos y el paso de la aritmética al álgebra.

5.3. Problemas compuestos

Un problema aritmético compuesto es aquel entre cuyos datos hay, al menos, dos relaciones cuantitativas y, por tanto, requiere de más de una operación para obtener la solución numérica del problema. Un caso particular son los problemas compuestos de dos relaciones, que necesitan de dos operaciones para alcanzar la solución, conocidos como problemas de dos pasos. No hay muchos trabajos previos de investigación sobre los problemas compuestos. Los primeros trabajos categorización los problemas según las operaciones que intervienen en su solución e investigaron cuestiones relacionadas con el efecto de invertir la secuencia de operaciones sobre la dificultad del problema, o el tipo de operaciones implicadas.

Estudios relativamente recientes de los problemas aritméticos de dos relaciones (Marchand y Bednarz, 1999, 2000; Nesher, 1991, 1999; Nesher y Herskovitz, 1994; Nesher, Hershkovitz y Novotna, 2003), centran su análisis en los "esquemas" subyacentes a los problemas compuestos. Consideran que los esquemas de los problemas de dos etapas son esquemas compuestos por dos esquemas simples: el aditivo y el multiplicativo. Parten del hecho de que la definición de problema compuesto no se basa en las cuatro operaciones aritméticas sino en los esquemas simples constituidos por una relación entre tres cantidades. Consideran tres esquemas básicos de problemas de dos etapas:

Esquema (A) (*Jerárquico*) - El todo de un esquema es una parte del otro esquema.

Esquema (B) (*Compartir el todo*) - Los dos esquemas comparten un todo.

Esquema (C) (*Compartir una parte*) - Los dos esquemas comparten una parte.

Estos autores investigan la influencia que tienen los tres esquemas sobre el índice de dificultad de los problemas compuestos y los proponen como modelos gráficos para representar la estructura de los problemas complejos en tareas de aprendizaje de lápiz y papel y en formato electrónico empleando ordenadores.

En los estudios que hemos realizado sobre problemas compuestos hemos partido del supuesto teórico de que, en cada relación, está presente una de estas estructuras semánticas y que, por tanto, al tratarse de problemas de dos relaciones hemos de tener en cuenta la influencia que ejerce la categoría semántica que se utiliza en cada una de ellas sobre las representaciones que se forma el estudiante. Cada una de estas relaciones por separado las encontramos en los problemas aritméticos verbales de una etapa, en consonancia con ello, en un problema verbal de dos etapas, la estructura semántica se encuentra tanto en la primera relación como en la segunda y, nuestro objetivo ha sido detectar si, en los problemas aritméticos compuestos, el tipo de categoría semántica de los problemas simples que corresponden a cada una de las relaciones es un factor que influye sobre su comprensión. Hemos encontrado que en los problemas compuestos persiste la influencia de la estructura semántica de los problemas simples y aparecen factores nuevos que influyen en la obtención de una representación correcta: la duplicación semántica y la influencia decisiva de la primera relación enunciada sobre la segunda para formular una representación correcta.

Una forma alternativa para estudiar los problemas de enunciado compuestos es la que se está llevando a cabo en la Universidad de Valencia, en la que una línea de investigación ha estudiado familias de problemas: problemas de regla y compás, de probabilidad condicional y problemas aritmético-algebraicos (Cerdán, 2008). Bajo un modelo de competencia, una de las premisas que sustenta esta línea de investigación es que "previo a la investigación de las resoluciones de los estudiantes es necesario estudiar con cierto detalle los problemas y los métodos de resolución de los mismos". Concretamente el trabajo de Cerdán (2008) construye una teoría local en la que utiliza los grafos trinomiales para representar la estructura de relaciones en la familia de problemas aritmético-algebraicos. Esta representación mediante grafos la utiliza también como espacio del problema que le permite explicar las distintas estrategias de solución posibles de los resolutores y la comlejidad de los problemas.

6. Atención a la diversidad. Niños con talento

La atención a la diversidad es una llamada de atención (una prioridad) en documentos curriculares actuales, informes de sociedades de profesores y organismos internacionales (Benavides, Maz, Castro y Blanco, 2004; MEC, 2007; NCTM, 2000). La atención diversificada en el aula se está imponiendo como un derecho de los ciudadanos. Tradicionalmente se ha prestado atención diferenciada sólo a los alumnos deficientes, pero actualmente se considera que los alumnos con talento y los superdotados son una de las clases de alumnos que están reclamando una atención especializada dentro de un aula que preste atención a la diversidad. La identificación y estímulo del talento matemático en los alumnos se ha convertido en una corriente de trabajo e investigación actual (Benavides, 2008; Niederer & Irwin, 2001; Rotigel y Lupkowski, 1999; Sheffield, 1999).

El interés por el tema de la inteligencia, la superdotación y el talento no es una novedad, estos constructos han sido estudiados sistemáticamente a partir de comienzos del siglo veinte. Pero no así los aspectos relacionados específicamente con el talento matemático, estos tienen un desarrollo más reciente. En 1980, el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) en su documento *An Agenda for Action* en el que afirmaba que la destreza básica más importante era la resolución de problemas, también recogía el creciente reconocimiento de la importancia del desarrollo de los estudiantes con talento en matemáticas

> Los estudiantes más olvidados en términos de alcanzar su desarrollo potencial, son los estudiantes con talento en matemáticas. La habilidad matemática resultante es un recurso valioso para la sociedad, tan necesario para mantener el liderazgo en un mundo tecnológico (NCTM, 1980, p. 18).

Ha habido más interés por fomentar el desarrollo del talento matemático en propuestas de carácter curricular o en agendas, como la anterior, que en realizar investigaciones orientadas a tal fin. Los estudios sistemáticos de niños con talento matemático no son muy numerosos, tienen un desarrollo relativamente reciente y, la mayoría de ellas, se centran en tareas de resolución de problemas (Benavides, 2008; Ellerton, 1986; Heinze, 2005; Krutetskii, 1969, 1976; Marjoran y Nelson, 1988; Niederer e Irwin, 2001; Span y Overtoom-Corsmit, 1986; Villarraga, 2002). Los temas de estudio se agrupan en tres grandes focos: la caracterización del talento matemático, establecer mecanismos de identificación y ofrecer alternativas de intervención dentro de programas especiales dentro y fuera de la escuela.

Buen número de los estudios sobre el talento matemático llevados a cabo proporcionan un listado de características de los niños con talento matemático. Parte de ellas descritas por Krutetskii (1969, 1976), quién observó los procesos cognitivos de los niños mientras trabajaban con una serie de problemas especialmente preparados. Krutetskii detectó la tendencia de los superdotados a preferir formas de pensamiento visuales-espaciales o una forma lógicaanalítica. Descubrió que los alumnos con talento parecen pensar sobre las matemáticas de forma cualitativamente diferente y ya poseen algunas destrezas de resolución de problemas de los matemáticos adultos.

Ellerton (1986) dentro de un estudio a gran escala, propuso a estudiantes de 11 a 13 años de edad, que inventaran problemas que fuesen difíciles de resolver por un compañero. Les pidió además que resolvieran los problemas que ellos mismos habían planteado. Comparó las características de los problemas matemáticos planteados por ocho niños más capaces con los planteados por otros ocho niños menos capaces. Obtuvo como resultados que los niños más capaces plantean problemas de mayor complejidad de cálculo, con sistemas de números más complejos y con mayor número de operaciones que sus compañeros menos capaces. Afirma que el planteamiento de problemas es una herramienta útil para estudiar el talento matemático.

Heinze (2005) compara las estrategias que emplean los estudiantes superdotados en la resolución de un problema con las que emplearon estudiantes de una clase normal. Concluye que los estudiantes superdotados emplean macroestrategias con mayor frecuencia que los estudiantes normales; es decir, que reconocen con mayor rapidez las estructuras y trabajan de manera más sistemática y estructurada los problemas. Además destaca en los niños superdotados las explicaciones que dan de sus soluciones. Los niños superdotados pueden explicar y verificar sus procedimientos sistemáticos de solución más a menudo que los estudiantes "normales". Heinze (2005) concluye que en comparación con los estudiantes "normales", los alumnos con talento matemático necesitan, de manera significativa, menos tiempo en solucionar los problemas, tienen una gran habilidad para verbalizar, explicar y verificar sus soluciones y habilidad para utilizar su intuición de la estructura matemática del problema con el fin de obtener la solución.

Los estudios sobre resolución de problemas deben aportar información y soluciones a los dos grandes retos que tiene planteada la atención a los niños con talento: la identificación y la intervención. La intervención orientada a niños con talento matemático requiere de una fase previa de identificación o detección de estos niños. En este proceso el enfoque más generalizado consiste en aplicar tests de inteligencia general, así como las nominaciones de los profesores, las nominaciones de los padres o las de sus propios compañeros. Un aspecto importante en relación con la identificación del talento matemático es, ¿qué se mide en los tests y de qué tipo son los ítems que constituyen los tests con los que se trata de identificar el talento y más concretamente el talento matemático? En los inicios se aplicaban test de rendimiento cuyos ítems eran de cálculo aritmético. De lo que se desprende que se primaba en la identificación del talento matemático la capacidad de cálculo matemático frente a otras formas de pensar matemáticamente. En las pruebas de rendimiento se decidía sobre el talento matemático en función del número de ítems acertados y se le concedía poca atención a los procesos de pensamiento del estudiante o a cómo razonaba en matemáticas. Como consecuencia de la aportación desde el enfoque cognitivo y, sobre todo, en el ámbito de la resolución de problemas, se ha ido produciendo un cambio de mentalidad. Así lo expresa Johnson (1983): "los que trabajamos con niños de la escuela primaria sabemos la dificultad que conlleva valorar únicamente la cualidad del pensamiento de un niño en función del número de respuestas en las tareas matemáticas que les proponemos" (p. 26). Para Johnson (1983) lo que diferencia a un niño con talento matemático de otro que no lo es, reside en la calidad del pensamiento del niño, que para él reside en la forma de razonar matemáticamente. Y propone que este criterio se tenga en cuenta en los procesos de identificación de niños con talento matemático. En esta misma línea Niederer & Irwin (2001) proponen que entre los criterios para identificar a los estudiantes con talento matemático debe estar la habilidad para resolver problemas.

Otro de los grandes retos que tiene planteada la atención de los niños con talento es la intervención. Se han propuesto varias estrategias de intervención para ser aplicadas a niños con talento. Unas son de carácter organizativo, y se refieren al modo de ubicar a los sujetos con talento respecto a sus compañeros: integración, agrupamiento, individualización; otras son estrategias relativas a los contenidos del currículo: enriquecimiento, aceleración y profundización. Todas estas fórmulas son válidas y se aplican con fines distintos. El enriquecimiento es la fórmula usual cuando a los alumnos se les dan clases al margen de la enseñanza oficial, con el ánimo de potenciar sus dotes excepcionales. Los problemas y las actividades que se les proponen suelen evitar excesiva dependencia con los conocimientos matemáticos, a veces incluso no tienen conexión con el contenido matemático del currículo escolar. La aceleración es otra de las modalidades que se han adoptado en la intervención de niños con talento, en la que a los niños se les evalúa y se les ubica en un curso más avanzado del que les corresponde por su edad. Por último la profundización (Sheffield, 1999) contempla el empleo de problemas complejos y cuestiones abiertas que actúen como retos para los estudiantes con talento.

En cuanto a la organización de los estudiantes cabe destacar el trabajo de Span y Overtoom-Corsmit (1986), que dentro de la teoría del procesamiento de la información, estudian las diferencias que puede haber entre alumnos de educación secundaria con talento y alumnos promedio en la resolución de problemas matemáticos. Intentan responder a cuál sería la instrucción que más se ajusta a los niños con talento, dando como sugerencia el aprendizaje cooperativo entre niños con talento y niños normales.

Las investigaciones sobre el talento matemático en niños identificados como superdotados se han realizado con la finalidad de conocer las características innatas o genéticas de este tipo de niños. Pero hay escasa investigación que ponga de manifiesto las dificultades y los obstáculos que tienen cuando resuelven problemas del currículo escolar de matemáticas. En este sentido cabe citar los trabajos realizados en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Los trabajos se han centrado en alumnos con talento de Educación Secundaria cuando resuelven problemas de estructura multiplicativa. Villarraga (2002) ha descrito características asociadas a los niños con talento en el campo específico de conocimiento de la estructura multiplicativa para ello diseña un instrumento con ocho problemas que pueden ser representados en términos de relaciones multiplicativas. Observa que hay una diversidad de esquemas de conocimiento presentes en la muestra de sujetos con talento, a pesar de las características homogéneas del grupo de estudio, y describe los conocimientos de elaboración y ejecución presentes en los esquemas de los niños. En esta misma línea, Maryorie (2008) investiga las posibilidades de un cuestionario de problemas de estructura multiplicativa como instrumento de identificación de sujetos con talento, para ello construye y valida un cuestionario de problemas, y obtiene que es un excelente instrumento para detectar el talento, mejor que la calificación final de matemáticas. El instrumento lo utiliza como un instrumento de evaluación que permite detectar las estrategias especiales que utilizan los niños y para realizar una predicción diagnóstica de los sujetos con talento orientada a la intervención es el campo de conocimiento de la estructura multiplicativa.

Como conclusión, decir que la resolución de problemas, tanto desde una perspectiva general, como específica ligada a un campo de conocimiento, es un enfoque que ofrece bastantes posibilidades en los tres grandes focos de investigación de niños con talento matemático: a) la conceptualización del término talento matemático, la identificación de niños con talento matemático y la intervención centrada en niños con talento (Sheffield, 1999) y merecería ser contemplada y tenida más en cuenta en el abordaje de este tipo de investigaciones.

5. Reflexión final

1. La atención a la diversidad es una llamada de atención (una prioridad) en los documentos curriculares actuales (NCTM, 2000). La atención diversificada en el aula se está imponiendo como un derecho de los ciudadanos, y no sólo para los alumnos con deficiencias. Los alumnos con talento y los superdotados son una de las clases de alumnos que están reclamando una atención diversificada (Sheffield, 1999). La identificación y detección de los alumnos con talento se ha convertido en una corriente de intervención e investigación actual (Rotigel y Lupkowski, 1999). La identificación de las capacidades de los superdotados para resolver problemas se remonta a los estudios de Krutetskii (1969), pero la identificación y la intervención son dos campos de trabajo abiertos en los que la investigación en resolución de problemas puede aportar bastente.

2. Los trabajos previos sobre resolución de problemas enunciados verbalmente de estructura multiplicativa se cerraron en falso. Por otro lado, la continuación natural de estudiar problemas compuestos apenas inició su arranque. Por un lado, es natural pensar que hay factores nuevos propios de una estructura compleja que influyen en la elección de la estrategia de resolución. Por otro lado, es útil ensayar formas alternativas de analizar la complejidad de los problemas en aras de establecer propuestas teóricas.

3. Las nuevas tecnologías conllevan un fuerte potencial representacional tanto gráfico como simbólico, y añaden nuevas posibilidades de manipulación de las representaciones que no era posible realizar sin ellas. El aporte de las potencialidades de las representaciones computacionales a la educación ha sido una inquietud desde la popularización de la informática. Las posibilidades de interacción actuales entre el alumno y las representaciones de ordenador creadas mediante módulos interactivos, constituyen una parcela de estudio en la que estamos interesados, en la que hemos iniciado unas primeras exploraciones y en la que vemos posibilidad de avances significativos.

4. Otro aspecto que pensamos que es importante son las actitudes de los resolutores hacia los aspectos de resolución de problemas. Investigadores en resolución de problemas como Golding y Shteingold (2001) consideran las actitudes como un elemento imprescindible en toda teoría sobre resolución de problemas. En el trabajo de Ortiz

(2002) hicimos un primer acercamiento hacia las actitudes en relación con las nuevas tecnologías y la resolución de problemas en aspectos de modelización. Consideramos que este enfoque es también prometedor.

Referencias

Begle, E. (1979). *Critical variables in mathematics education.* Washington DC: Mathematical Association of America. NCTM.

Bell, A.W, Fischbein, E. y Greer, B. (1984). Choice of operation in verbal arithmetic problems: The effects of number size, problem structure and context. *Educational Studies in Mathematics, 15*(2), 129-147.

Benavides, M. (2008). *Caracterizacion de sujetos con talento en resolucion de problemas de estructura multiplicativa*. Tesis doctoral. Granada: Universidad de Granada.

Benavides, M, Maz, A., Castro, E. y Blanco, R. (Eds.) (2004). *La educación de niños con talento en Iberoamérica*. Santiago (Chile): OREALC/UNESCO.

Bransford, J. D. y Stein, B. S. (1986). *Solución IDEAL de problemas*. Barcelona: Labor.

Brown, S. I. y Walter, M. I. (1983). *The art of problem posing*. Hillsdale, NJ: LEA.

Callejo, M. L. y Vila, A. (2003). Origen y formación de creencias sobre la resolución de problemas. Estudio de un grupo de alumnos que comienzan la Educación Secundaria. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, Vol. X, No. 2*, 173-194.

Carpenter, T.C.(1985). Learning to add and subtract: An exercise in problem solving. En E. A. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: multiple research perspectives*. Hillsdale, New Jersey: LEA.

Carpenter, T. P. y Moser, J. M. (1983). The acquisition of addition and subtraction concepts. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisitions of Mathematics Concepts and Processes* (pp. 7-44). Orlando, Florida: Academic Press.

Carrillo, J. (1995). *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza de profesores de matemáticas de alumnos de más de 14 años. Algunas aportaciones a la metodología de la investigación y estudio de posibles relaciones*. Tesis doctoral. Universidad de Sevilla.

Castro, E. (1991). *Resolución de problemas aritméticos de comparación multiplicativa.* Granada: Universidad de Granada.

Castro, E. (1995). *Niveles de comprensión en problemas verbales de comparación multiplicativa.* Tesis doctoral. Granada: Comares.

Castro, E. y Castro, E. (1996). Conocimiento de contenido pedagógico de los estudiantes de magisterio sobre la estructura multiplicativa. En J. Giménez, S. Llinares y V. Sánchez (Eds.), *El proceso de llegar a ser un profesor de primaria. Cuestiones desde la educación matemática* (pp. 119-141). Granada: Comares.

Castro, E., Morcillo, N., y Castro, E. (1999). Representations produced by secondary education pupils in mathematical problem solving. En F. Hitt, y M. Santos (Eds.), *Proceedings of the Twenty*

First Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Vol 2. (pp. 547-558). Columbus, OH: ERIC Clearinghouse.

Castro, E., Rico, L., y Castro, E. (1992). Choice of structure and interpretation of relation in multiplicative compare problems. En W. Geeslin y K. Grahan, *Proceedings of the sixteenth PME Conference.* Vol. 1, (pp. 113-120. Durham, NH (USA): University of New Hampshire.

Castro, E., Rico, L., y Gil, F. (1992). Enfoques de investigación en problemas verbales aritméticos aditivos. *Enseñanza de las Ciencias, 10*(3), 243-253.

Cazares, J. A. (2007). El desarrollo de la competencia aritmética en estudiantes de primaria en la formulación de problemas. En E. Castro y J. L. Lupiáñez (Eds.), *Investigaciones en Educación Matemática: Pensamiento Numérico* (pp. 29-49). Granada: Editorial de la Universidad de Granada.

Cerdán, F. (2008). *Estudio sobre la familia de problemas aritmético-algebraicos*. Tesis doctoral. Universidad de Valencia.

Charles, R., Lester, F. y O'Daffer, P. (1987). *How to evaluate progress in problem solving*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Cobo, P. y Fortuny, J. M. (2000). Social interactions and cognitive effects in contexts of area-comparison problem solving. *Educational Studies in Mathematics, 42*(2), 115-140.

Cockcroft, W. H. (1985). *Las matemáticas sí cuentan*. Madrid: MEC.

Contreras, L. C. (1998). *Resolución de problemas. Un análisis exploratorio de las concepciones de los profesores acerca de su papel en el aula*. Tesis doctoral. Universidad de Huelva.

DeBellis, V. (1996*) Interactions between affect and cognition during mathematical problem solving: A two-year case study of four elementary school children*. Doctoral Dissertation. New Brunswick, NJ: Rutgers University.

DeBellis, V. A. y Goldin, G. A. (1997). The affective domain in mathematical problem solving. En E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Vol. 2 (pp. 209-216). Helsinki: University of Helsinki Department of Teacher Education.

DeBellis, V. A. y Goldin, G. A. (2006) Affect and meta-affect in mathematical problem solving: a representational perspective. *Educational Studies in Mathematics, 6*(2)*,* 131–147.

Descartes, R. (1984). *Reglas para la dirección del espíritu*. Madrid: Alianza.

Dewey, J. (1989). *Cómo pensamos*. Barcelona: Paidós. (Versión original 1933).

Ellerton, N. (1986). Children’s made-up mathematics problems - A new perspective on talented mathematicians. *Educational Studies in Mathematics, 17*(3), 261-271.

English, L. D. (1998). Childrens problem posing within formal and informal contexts. *Journal for Research in Mathematics Education, 29*(1), 83-106

Fennema, E. & Sherman, J.A. 1976. Fennema-Sherman mathematics attitudes scales. *JSAS Catalog of Selected Documents in Psychology, 6*, 31 (Ms. No. 1225).

Fernández, F. (1997). *Evaluación de competencias en álgebra elemental a través de problemas verbales*. Granada: Universidad de Granada.

Fernández, F., Castro, E., Segovia, A. y Rico, L. (1996). El lenguaje matemático. En A. Romero (Coord.), *Lenguaje y enseñanza* (pp.317-344). Granada: Fundación Educación y Futuro.

Flavell, J. H. (1976). Metacognitive aspects of problem solving. En L.R. Resnick (Ed.), *The Nature of Intelligence* (pp. 231–235) .Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Garofalo, J. y Lester, F.K., Jr. (1985). Metacognition, cognitive monitoring, and mathematical performance. *Journal for Research in Mathematics Education, 16*(3), 163–176.

Gil, N., Guerrero, E. y Blanco, L. (2006). El dominio afectivo en el aprendizaje de las matemáticas. *Revista Electrónica de Investigación Psicoeducativa, 4*(1), 47-72.

Ginsburg, H. (1981). The clinical interview in psychological research on mathematical thinking: Aims, rationales, techniques. *For the Learning of Mathematics,* 1(3), 4-11.

Goldin, G. A. (1987). Cognitive representational systems for mathematical problem solving. En C. Janvier (Ed.), *Problems of representations in the teaching and learning of mathematics* (pp.125-145). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Golding, G. A. (1992). On developing a unified model for the psychology of mathematical learning and problem solving. En W. Geeslin y K. Graham (Eds), *Proceedings of the sixteenth PME Conference.* Volume III (pp.235-261). University of New Hampshire, Durham, NH (USA).

Golding, G. y Shteingold, N. (2001). Systems of representations and the development of mathematical conceptos. En A.A. Cuoco & F. R. Curcio (Eds.), *The roles of representation in School Mathematics.* 2001 Yearbook. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.

Gómez-Chacón, I. (2003). La tarea intelectual en matemáticas. Afecto, meta-afecto y los sistemas de creencias. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, X* (2), 225-247.

Goos, M., Galbraith, P. y Renshauw, P. (2002). Socially mediated metacognition: creating collaborative zones of proximal development in small group problem solving. *Educational Studies in Mathematics, 49*(2)**,** 193–223.

Greeno, J. G. (1991). Number sense as situated knowing in a conceptual domain. *Journal for Research in Mathematics Education, 22*(3), 170-218.

Greeno, J. G., Collins, A. M. y Resnick, L. B. (1996). *Cognition and learning*. En D. C. Berliner y R. C. Calfee (Eds.), *Handbook of Educational Psychology* (pp. 15-45). New York: Simon & Schuster Macmillan.

Grupo Cero (1984). *De 12 a 16. Un proyecto de curriculum de matemáticas.* Valencia: Nau Libres.

Hadamard, J. (1947). *Psicología de la invención en el campo matemático*. Buenos Aires: Espasa Calpe. [Versión original de 1945]

Heinze, A. (2005). Differences in problem solving strategies of mathematically gifted and non-gifted elementary students. *International Education Journal, 6*(2), 175-183.

Heller, J. I. y Greeno, J. G. (1978). *Semantic processing in arithmetic word problem solving.* Paper presentado en Midwestern Psychological Association Convention. Chicago.

Hernández, J. (1996). *Sobre habilidades en la resolución de problemas aritméticos verbales, mediante el uso de dos sistemas de representación yuxtapuestos*. Tesis doctoral. Universidad de La Laguna.

Heyworth, R. M. (1999). Procedural and conceptual knowledge of expert and novice students for the solving of a basic problem in chemistry. *International Journal Science Education, 21*(2), 195-211.

Hiebert, J. y Carpenter, T. (1992). Learning and teaching with understanding. En D. Grows (Ed.), *Handbook of Research* on *Mathematics Teaching and Learning* (pp.65-97). New York: Macmillan.

Hudson, T. (1983). Correspondences and numerical differences between disjoint sets. *Child Development*, 54, 84-90.

Johnson, M. L. (1983). Identifying and teaching mathematically gifted elementary school students. *Arithmetic Teacher, 30*(5), 25-26, 55-56.

Jonassen, D. H. (2004). *Learning to solve problems. An instructional design guide*. San Francisco, CA: Pfeiffer.

Kilpatrick, J. (1967). *Analyzing the solution of word problems in mathematics: An exploratory study.* Unpublished doctoral dissertation, Stanford University.

Kilpatrick, J. (1978). Variables and methodologies in research on problem solving. En L. L. Hatfield y D. A. Bradbard (Eds.), *Mathematical problem solving: papers from a research workshop*. Columbus, Ohio: ERIC/SMEAC.

Kilpatrick, J. (1987). Problem formulating: Where do good problems come from? En A. H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive Science and Mathematics Education. Hillsdale.* NJ: LEA..

Kilpatrick, J. (1992). A history of research in mathematics education. En D. J. Grouws: *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* New York: MacMillan.

Kilpatrick J. y Wirszup I. (1969). Soviet studies in the psychology of learning and teaching mathematics. Volume III: Problem Solving in Arithmetic and Algebra. Reston (VA): National Council of Teachers of Mathematics.

Kilpatrick J., y Wirszup I. (1972). Soviet studies in the psychology of learning and teaching mathematics. Volume VI: Instruction in Problem Solving. Reston (VA): National Council of Teachers of Mathematics.

Kintsch, W. y Greeno, J. G. (1985). Understanding and solving word arithmetic problems. *Psychological Review, 92*(1), 109-129.

Krutetskii, V.A. (1969). An analysis of the individual structure of mathematical abilities in schoolchildren. En J. Kilpatrick & I. Wirszup (Eds.), *Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics,* Vol. II(pp.59-104). Chicago: University of Chicago..

Krutetskii, V.A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in school children.* Chicago: University of Chicago Press.

Laudan, L. (1986). *El Progreso y sus Problemas*. Madrid: Encuentro Ediciones.

Lester, F. K. (1982). Building bridges between psychological and mathematics education research on problem solving. En F. K. Lester & J. Garofalo (Ed.), *Mathematical problem solving: Issues in research*. Philadelphia, Pennsylvania: The Franklin Institute Press.

Lester, F. K. (1983). Trends and issues in mathematical problem solving research. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisitions of mathematics concepts and processes*. London: Academy Press.

Lester, F. K. Jr. (1994). Musings about mathematical problem-solving research: 1970–1994. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(6), 660–675.

Lewis, A. B. y Mayer, R. E. (1987). Students' miscomprehension of relational statements in arithmetic word problems. *Journal of Educational Psychology, 79*(4), 363-371.

Marchand, P. y N. Bednarz (1999). L'enseignement de l'algèbre au secondaire : Une analyse des problèmes présentés aux élèves. *Bulletin AMQ,* 39(4), 30–42.

Marchand, P. y Bednarz, N. (2000). Development de l´algebre dans un contexte de resolutions des problemes. *Bulletin AMQ*, *40*(4), 15-25.

Marjoram, D. y Nelson, R. (1988). Talentos matemáticos. En J. Freeman (Ed.), *Los niños superdotados. Aspectos Psicológicos y Pedagógicos*. Bilbao: Santillana.

Marshall, S. (1995). *Schemas in problem solving.* New York: Cambridge University Press.

Mason, J. (2000). Asking mathematical questions mathematically. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *31*(1), 97–111.

Mayer, R. E. (1986). *Pensamiento, resolución de problemas y cognición*. Barcelona: Paidós.

Mayer, R. E. (1996). Learners as information processors: Legacies and limitations of educational psychology´s second metaphor. *Educational Psychologist, 31*(3/4), 151-161.

Maza, C. (2000). *Análisis de la formulación y resolución de problemas porcentuales de Cambio en estudiantes para maestro*. Tesis Doctoral. Universidad de Sevilla.

McLeod, D. B. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Learning and Teaching* (pp. 575–596). New York: Macmillan.

McLeod, D. B. & Adams, V. M. (Eds.) (1989). *Affect and mathematical problem solving. A new perspective.* New York: Springer-Verlag.

Ministerio de Educación y Ciencia (MEC). (1989). *Diseño curricular base. Educación Secundaria Obligatoria*. Madrid: El autor.

Ministerio de Educación y Ciencia (MEC). (2000). REAL DECRETO 3473/2000, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la educación secundaria obligatoria. *BOE, 14*, 1810-1858.

Ministerio de Educación y Ciencia (MEC) (2007). REAL DECRETO 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. *BOE, 5,* 677-773.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1980). *An agenda for action: Recommendations for school mathematics of the 1980s*. Reston, VA: El autor.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematcs.* Reston, VA: El autor.

National Council of Mathematics Teachers (NCTM) (2000). *Principles and standars for school mathematics*. Reston, VA: El autor.

Nesher, P. (1991). Two-steps problems, research finding. En F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings Fifteenth PME Conference,* Vol. III. (pp. 65-71). Assissi, Italia.

Nesher, P. (1999). El papel de los esquemas en la resolución de problemas de enunciado verbal. *Suma 31*, 19-26.

Nesher, P. y Hershkovitz, S. (1994). The role of schemes in two-step problems: Analysis and research findings. *Educational Studies in Mathematics, 26(*1), 1-23.

Nesher, P., Hershkovitz, S. y Novotna, J. (2003). Situation model, text base and what else? Factors affecting problem solving. *Educational Studies in Mathematics, 52*(2), 151-176.

Newell, A. y Simon, H. A. (1972). *Human problem solving*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Niederer, K. e Irwin, K. (2001). Using problem solving to identify mathematically gifted students. En M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceeding of the 25 th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Utrecht, Vol. 3, 431-438.

Ortíz, J. (2002). *Modelización y calculadora gráfica en la enseñanza del álgebra. Estudio evaluativo de un programa de formación*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Pérez-Tyteca, P. (2007). *Actitudes hacia las matemáticas de alumnos de primer curso de la Universidad de Granada*. Granada: El autor.

Poincaré, H. (1963). *Ciencia y método*. Madrid: Espasa Calpe. [Versión original 1908].

Polya, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible*. Madrid: Tecnos. [Versión original 1954].

Polya, G. (1979). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas. [Versión original 1945].

Porzio, D. (1999). Effects of differing emphases in th use of multiple representations and technology on students´ understanding of calculus concepts. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 21*(3), 1-29.

Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas.* Granada: Comares.

Puig, L. y Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares*. Madrid: Síntesis.

Puig Adam, P. (1985). Un punto de vista cibernético sobre el problema de los problemas. *Nueva Revista de Enseñanzas Medias, 7*, 38-41.

Rico, L. (1988) (Coord.). *Didáctica activa para la resolución de problemas.* Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Rico, L., Castro, E., González, E. y Castro, E. (1994). Two-step addition problems with duplicated semantic structure. En J. P. Da Ponte y J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the Eighteenth Inter-*

national Conference for the Psychology of Mathematics Education (pp.121-128). Lisboa, Portugal: University of Lisboa.

Riley, M. S., Greeno, J. G. y Heller, J. I. (1983). Development of children's problem-solving ability in arithmetic. En H.P. Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking (pp. 153-192)*. New York: Academic Press.

Romberg, T. (1969). Current research in Mathematics Education. *Review of Educational Research, 39*(4), 473-491.

Rotigel, J. y Lupkowski, A. (1999). Using talent searches to identify and meet the educational needs of mathematically talented youngsters. *School Science and Mathematics, 99*(6), 330-337.

Schoenfeld, A. H. (1979). Explicit heuristic training as a variable in problem-solving performance. *Journal for Research in Mathematics Education, 10*(3), 173-187.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solvin*g. Orlando, VA: Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Leaming.* Reston, VA: NCTM.

Schoenfeld, A. H. (Ed.) (1987). *Cognitive science and mathematics education*. Hillsdale, NJ: LEA.

Schoenfeld, A. (1994). *Mathematical thinking and problem solving.* Hillsdale (NJ): LEA.

Sheffield, L. (Ed.). (1999). *Developing mathematically promising students*. Reston (Virginia): NCTM.

Silver, E. A. (Ed.) (1985). *Teaching and leaming mathematical problem solving: Múltiple research perspectives.* Hillsdale, NJ: LEA.

Silver, E. A. (1994) On mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics, 14*(1) 19–28.

Silver, E. y Cai, J. F. (1996). An analysis of arithmetic problem posing by middle school students *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(5), 521-539.

Simon, H. A. (1984). La teoría del procesamiento de la información sobre la solución de problemas. En M. Carretero y J.A. García Madruga (Compiladores), *Lecturas de psicología del pensamiento*. Madrid: Alianza.

Socas, M. M. (2001). *Investigación en Didáctica de la Matemática vía Modelos de Competencia. Un estudio en relación con el Lenguaje Algebraico*. Dpto Análisis Matemático. Universidad de La Laguna.

Socas, M. M., Hernández, J. y Noda, A. (1998). Modelo de competencias para el campo conceptual aditivo de las magnitudes discretas relativas. *Enseñanza de las Ciencias, 16* (2), 261-269.

Span, P. y Overtoom-Corsmit, R.(1986). Information Processing by Intellectually Gifted Pupils Solving Mathematical Problems. *Educational Studies in Mathematics, 17*(3), 273-295.

Sternberg, R (comp.) (1994). *Thinking and Problem Solving*. San Diego, CA: Academic Press.

Tortosa, A. y Castro, E. (1997). Invención de problemas a través de situaciones ambientales. En J. Gutiérrez, J. Perales, J. Benayas y S. Calvo (Eds), *Líneas de Investigación en Educación Ambiental* (pp. 81-85). Granada: Proyecto Sur de Ediciones.

Vergnaud, G. (1981). Quelques orientations theoriques et des recherches franÇaises en Didactique des Mathematiques. *Recherches en Didactique des Mathematiques, 2*.2, 215-232.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisitions of mathematics concepts and processes* (pp. 127-174). London: Academy Press.

Villarraga, M. (2002). *Estudio de los esquemas empleados por alumnos de 14-15 años al resolver problemas de estructura multiplicativa*. Memoria de Investigación. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática.

Ziman, J. (2003). *¿Qué es la ciencia?* Madrid: Cambridge University Press.