EL ESTUDIO TEÓRICO LOCAL DEL DESARROLLO DE COMPETENCIAS ALGEBRAICAS

Eugenio Filloy[1], Luis Puig[2] y Teresa Rojano[1]

(1) Departamento de Matemática Educativa
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, México

(2) Departamento de Didáctica de las Matemáticas / Departamento de Matemática Educativa
Universidad de Valencia / Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, México

Filloy, E., Puig, L., & Rojano, T. (2008). El estudio teórico local del desarrollo de competencias algebraicas. *Enseñanza de las Ciencias*, *25*(3), pp. 327-342.

El estudio teórico local del desarrollo de competencias algebraicas

Eugenio Filloy[1], Luis Puig[2] y Teresa Rojano[1]

(1) Departamento de Matemática Educativa
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, México

(2) Departamento de Didáctica de las Matemáticas / Departamento de Matemática Educativa
Universidad de Valencia / Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, México

Resumen

En este artículo presentamos las líneas maestras que han guiado nuestro trabajo en Álgebra Educativa en los últimos veinticinco años, hacemos hincapié en la perspectiva semiótica que lo informa, presentamos un ejemplo de análisis de la competencia en el terreno de la resolución algebraica de problemas de enunciado verbal, y relacionamos un conjunto de resultados sobre los procesos cognitivos de los alumnos a los que se les está enseñando esta resolución algebraica de problemas, que hemos obtenido a lo largo de estos años.

Abstract

In this paper we present the main guiding ideas of our work on Educational Algebra during the last twenty-five years, stressing the semiotic point of view that shapes it. We show also an analysis of competence in algebraic word problem solving, and list a set of results on pupils' cognitive processes that take place while they are being taught algebraic problem solving, results we have gotten throughout these years.

Palabras clave: Modelos Teóricos Locales, Sistemas Matemáticos de Signos, Modelos de competencia, Procesos cognitivos, Resolución algebraica de problemas, Álgebra educativa, Lectura y escritura del álgebra.

Keywords: Local Theoretical Models, Mathematical Sign Systems, Competence Models, Cognitive Processes, Algebraic Problem Solving, Educational Algebra, Algebra Reading and Writing.

El interés por conocer en profundidad el pensamiento de los estudiantes que se inician en el aprendizaje del álgebra ha llevado a muchos investigadores a analizar las interrelaciones del lenguaje algebraico con el lenguaje natural y con el de la aritmética. Lo anterior, en razón de que por lo general, en términos curriculares, la introducción al álgebra tiene como antecedentes más próximos a esos dos lenguajes, y también porque, desde los primeros estudios, se hizo evidente la enorme influencia que los mismos tienen en la construcción, por parte de los sujetos, de la sintaxis algebraica y en el uso que éstos hacen de dicha sintaxis en la resolución de problemas.

El acercamiento teórico de los *modelos locales* al estudio de la adquisición del lenguaje algebraico incorpora el elemento semiótico de los *sistemas matemáticos de signos* (Kieran & Filloy, 1989; Puig, 1994; Puig, 2003; Filloy, Rojano & Puig, 2008), lo cual permite el análisis de las interrelaciones antes mencionadas desde una perspectiva que concibe la aritmética, el álgebra y la lengua materna misma como sistemas de signos. Un buen número de investigaciones realizadas a partir de los años 1980 dan cuenta de las maneras en que el arraigo al pensamiento numérico y a los significados coloquiales de las palabras permea la interpretación y uso de las letras y de las expresiones algebraicas en las etapas iniciales del aprendizaje del álgebra. Tal es el caso de trabajos como el de Carolyn Kieran sobre la interpretación del signo = (Kieran, 1980); los estudios de Leslie Booth (1984) y Marilyn Matz (1982) sobre errores frecuentes en el álgebra; el análisis comparativo de la lengua materna con el lenguaje del álgebra de Hans Freudenthal (1983); y el estudio clínico sobre operación de la incógnita de Filloy y Rojano (1989) y Filloy, Rojano, Solares (2003), entre otros. En este último se reportan resultados que ponen de manifiesto que muchas de las producciones de los estudiantes en situaciones en que enfrentan, por primera vez, la resolución de ciertas tareas algebraicas no pertenecen necesariamente a alguno de los sistemas de signos ya mencionados, sino que tales producciones se ubican en niveles "intermedios", entre la aritmética o el lenguaje natural y el álgebra. La perspectiva semiótica adoptada en la teoría de los *modelos locales* engloba en el análisis de relaciones entre sistemas de signos a las producciones propias de los sujetos y ésa es una característica esencial de dicho acercamiento teórico.

Otra característica de la teoría de *modelos locales* es la propuesta de analizar, de manera localizada y específica, distintos aspectos o componentes de los fenómenos de la matemática educativa, como son los componentes de competencia formal, de enseñanza, de procesos cognitivos y de comunicación (Filloy, Rojano & Puig, 2008). En el presente artículo se exponen, en una primera sección y a manera de antecedentes de la formulación de la teoría de los *modelos locales*, un par de ejemplos de fenómenos observados en el estudio *Operación de la incógnita*, para los cuales, en el tiempo en que fueron identificados, no se contaba con explicaciones plausibles desde esquemas de análisis de las teorías generales dominantes. En una segunda sección, se hace referencia a trabajos que estudian al álgebra como lenguaje. En la tercera sección, se describen elementos del componente de competencia. En la cuarta, se exponen casos que ilustran el análisis desde el componente de los procesos cognitivos y que afloraron en el estudio *Operación de la incógnita* y en estudios posteriores, en el contexto de la resolución de problemas algebraicos verbales.

1. *Entre el lenguaje algebraico y el lenguaje natural: episodios del estudio* Operación de la Incógnita

El estudio *Operación de la Incógnita*, realizado a principios de los años 1980, comprende varias etapas o sub-estudios, en el primero de los cuales se analizan las respuestas espontáneas de estudiantes de secundaria ante tareas de resolución de ecuaciones lineales, en las que es necesario operar con lo desconocido (la incógnita). Los resultados de esa etapa se reportaron en una serie de artículos publicados a partir de 1984 (Filloy & Rojano, 1984, 1985a, 1985b, 1989). Un segundo sub-estudio, el de *La lecto-escritura algebraica*, se llevó a cabo con estudiantes de secundaria a quienes ya se les había enseñado la resolución de ecuaciones lineales, pero que aún no trabajaban con expresiones abiertas, equivalencia de expresiones algebraicas ni con sistemas de ecuaciones. Las formas básicas de notación del álgebra son esencialmente las mismas que las de la aritmética, es decir, números, signos de operación, signo de igualdad y letras. Sin embargo, los significados y modos de operación de tales notaciones difieren de un campo a otro. En esta etapa, se pudo observar que los sujetos tenían aún gran dificultad en la lectura y escritura de las expresiones algebraicas, la cual se manifestaba como una tensión entre el uso de los sistemas de signos de la aritmética (SMS_{ar}) y del lenguaje natural y la necesidad de darle significado a las oraciones y signos algebraicos (Filloy & Rojano, 1991). A fin de investigar los procesos de traducción del álgebra al lenguaje natural y viceversa, en situación de entrevista individual, se les pedía a los estudiantes que usaran símbolos algebraicos para expresar frases como "*a* aumentada de dos". A continuación se presenta un fragmento del diálogo entre un estudiante (S) y el entrevistador (I), a propósito de esta tarea:

S: No entiendo eso.
I: Te dan una oración y te piden que la escribas usando letras y signos de operación.
S: Es decir, simbolizando algo…
I: Sí, pero ¿qué quieres decir con simbolizando?
S: …
I: Dame una oración en español en la cual uses "aumentado".
S: Has aumentado la velocidad.
I: ¿Y eso qué significa?
S: Que la persona está ahora, bueno, yendo más rápido.
I: ¿Y otra oración en español que incluya también "dos"?
S: Bueno…, yo continuaba aumentando mi velocidad durante dos días.
[…]
S: En los últimos dos días, él aumentó de peso.
[…]
S: Su peso aumentó en dos kilos.

En este caso, el estudiante hace uso de significados tomados del lenguaje coloquial para responder a la pregunta del entrevistador. Es claro que se requiere asignarle significado a la frase "*a* aumentado de dos" antes de proceder a su simbolización y es en ese proceso de asignación de significados, en donde se observa una inconsistencia por parte del estudiante. Dicha inconsistencia se deriva del hecho de que en la frase original "a" y "dos" son medidas de cantidades de la misma materia o cuestión, y el estudiante se las asigna a cosas distintas (velocidad y días, en un caso, y peso y tiempo, en el otro), excepto en la oración "él aumentó su peso en dos kilos", en la cual se refiere a un peso inicial (*a*) y los *dos* kilos que aumentó.
En otro caso, un estudiante responde a la misma pregunta haciendo el dibujo que aparece en la Figura 1.

Figura 1

Aquí, la palabra "aumentado" claramente no se asocia a la acción de sumar y, en cambio, corresponde a la acción de agrandar o expandir, acción que afecta a la grafía de la letra "a".
Las respuestas espontáneas de los estudiantes a preguntas como la anterior revelan que los significados coloquiales de las palabras predominan en esas edades y ello inhibe la traducción al sistema matemático de signos del álgebra (SMS_{al}) de frases formadas por esas palabras.

En el caso inverso, cuando se les pedía a los estudiantes que leyeran en voz alta expresiones abiertas tales como:

$$\frac{a+b}{2},\ ab,\ 3ab,\ a^2,$$

además de producir lecturas textuales como:

"*a* más *b* sobre dos",

algunos estudiantes tendían a asignar significados geométricos (alejados del álgebra) a estas expresiones. El siguiente fragmento de entrevista ilustra lo anterior.

I: Lee en voz alta la siguiente expresión [apuntando a la primera de las expresiones enlistadas arriba].
S: El lado más ancho sobre dos.
I: Y ahora, si dejas de pensarla como una formula, ¿cómo la leerías, en qué situaciones te la has topado?
S: Bueno, es para encontrar un resultado.
I: ¿Como cuál?
S: Bueno…

Después de una larga pausa, el entrevistador interviene y hace la siguiente pregunta, ahora refiriéndose a la expresión $a + b$.

S: Como números…, por ejemplo, 50 + 20.
I: Así que si esto [señalando $a + b$] está ahí en el pizarrón, significa 50 + 20.
S: No, lo que quiero decir es, podría significar también algo más.
I: ¿Como qué?
S: Otra incognita.
I: ¿Qué incognita?
S: Por ejemplo, *a* igual a, no…, bueno, si *a* es igual a 20, ¿a qué es igual *b*?
I: Y ahí…
S: La incognita es *b*.

Lo que observamos en este diálogo es que el estudiante tiende a interpretar las expresiones abiertas como fórmulas geométricas (por ejemplo, "el lado más ancho sobre dos") o bien tiende a "cerrarlas", ya sea buscando un resultado por medio de asignarles valores numéricos particulares a las letras, o bien convirtiendo una de las letras en un dato y la otra en una incógnita. Esto último es característico de expresiones "cerradas" como las ecuaciones.

En ambos casos, las letras y los signos de operación son leídos con significados propios de la aritmética de la primaria, como son los de las fórmulas geométricas o los de las ecuaciones, a pesar de que el signo de igualdad está ausente. Es decir, el sujeto "completa" la expresión abierta, a fin de poder leerla en contextos que le son familiares.

El ejemplo anterior indica el tipo de antecedentes semánticos del Sistema Matemático de Signos de los estudiantes de entre 12 y 14 años de edad y que son la base sobre la que desarrollarán sus competencias algebraicas. Cuando éstas estén consolidadas, las expresiones abiertas (sin signo de igualdad) denotarán nuevos objetos matemáticos, los cuales se ubican en un nivel más abstracto e involucran conceptos más generales como el de número general (*a* y *b* en la expresión $\frac{a+b}{2}$) y el de operación suspendida (la suma en $a + b$). Pero mientras esto último sucede, los estudiantes transitarán de la espontaneidad de sus lecturas y producciones escritas de expresiones algebraicas hacia una lecto-escritura algebraica que opera según reglas (socialmente) establecidas. En ese camino, los sujetos habrán de remontar una serie de dificultades ya identificadas, relacionadas con, por ejemplo, la puesta en ecuación del enunciado de un problema, la cual presupone procesos de traducción del lenguaje natural al álgebra y es la base del método cartesiano de resolución de problemas.

2. Interacción álgebra-lenguaje natural: acercamientos teóricos

Por la importancia de conocer a fondo cómo se relacionen entre sí la lengua materna y el álgebra simbólica, en el aprendizaje y la enseñanza de esta última, se ha considerado conveniente estudiarla (el álgebra) en su condición de lenguaje. Una serie de investigaciones se han dedicado a ello desde distintas perspectivas (véase Rojano, 1994). Así, el trabajo de David Kirshner enfatiza el carácter de lengua escrita del álgebra y recurre a la lingüística y a la semiótica para analizar la sintaxis y la semántica algebraicas. Este autor hace uso de la gramática generativa y transformacional para producir expresiones algebraicas simples y transformarlas, con base en descripciones de sus *formas superficiales* y *profundas* (Kirshner, 1987, 1990, 2001). Por su parte, Jean-Philippe Drouhard desarrolla una noción de significación, con la cual relaciona los aspectos de *referencia, sentido, interpretación* y *connotación*, que son la base de su análisis de los significados o significaciones del álgebra escrita (Drouhard, 1992). Por otro lado, Luis Radford toma la idea de Vygotsky de que la cognición humana está atada al uso de signos, de tal manera que ya no se considera central lo que los signos representan sino lo que nos permiten hacer. Es más, Radford sostiene que los signos forman parte de sistemas de signos que son parte de una cultura y por lo tanto trascienden las cogniciones individuales (Radford, 2000). Desde esta perspectiva, el autor analiza la emergencia del pensamiento algebraico en los estudiantes y la emergencia del simbolismo algebraico en la historia (Radford, 2001).
Los tres acercamientos mencionados se nutren de disciplinas como la lingüística, la semiótica y la historia. De manera similar, el acercamiento de *modelos teóricos locales* incorpora elementos de la semiótica y la historia y adopta una perspectiva basada en la pragmática, favoreciendo así el estudio del significado en uso más que el del significado formal. De este modo, el foco de atención se desplaza hacia la actividad de los sujetos con el lenguaje del álgebra. La gramática como el sistema formal y la pragmática como el conjunto de principios de uso del lenguaje son concebidas como dominios complementarios, especialmente cuando se los relaciona con modelos de enseñanza del álgebra. Con este entretejido teórico, se abordan problemáticas de la interacción lenguaje natural – álgebra, formulando *modelos locales* para el análisis de fenómenos específicos (Filloy, Rojano y Puig, 2008). En las siguientes secciones, se ilustra este tipo de análisis para el caso de la resolución de problemas algebraicos verbales, enfatizando aspectos relacionados con los procesos cognitivos que tienen lugar en la traducción del enunciado de un problema verbal al lenguaje algebraico.

3. *El proceso de resolución algebraico de un problema verbal: el componente de competencia*.

3.1. *El método cartesiano como modelo de competencia*.

Como ya hemos indicado en la introducción, una de las características del enfoque de los modelos teóricos locales es la consideración de cuatro componentes de los modelos. Pero además, estos componentes están imbricados, así las observaciones que presentamos en la sección 5 sobre los procesos cognitivos forman parte del componente de actuación de los sujetos, pero ese componente de los procesos cognitivos se mira desde el punto de vista que da el componente de competencia. En esta sección presentamos algunos de los elementos que constituyen el componente de competencia de la resolución algebraica de problemas de enunciado verbal.

La competencia en la resolución algebraica de problemas de esa familia tiene elementos que provienen de varios ámbitos que están presentes en el proceso de resolución. El centro del proceso es el paso del enunciado del problema, que se presenta escrito en lenguaje natural, a una expresión del lenguaje del álgebra: una ecuación. Por tanto, en la resolución algebraica de problemas está implicada, por un lado, la competencia en ambos lenguajes, y, por otro, la competencia en el proceso de paso de un texto escrito en el lenguaje natural a un texto escrito en el lenguaje del álgebra. Esto es patente si se examina en la historia el método de resolución con contenido heurístico que es pertinente analizar en este caso, que es el método cartesiano (MC), ya en la propia formulación de Descartes, en sus *Regulæ ad directionem ingenii* y en su *Géometrie*, o en textos anteriores, como hemos hecho en Puig (2003b), Puig y Rojano (2004) y Puig (2006). En efecto, el método puede presentarse formalmente, desglosado en una serie de pasos, que el resolutor ideal recorre linealmente:

1) Una lectura analítica del enunciado del problema que lo reduce a una lista de cantidades y de relaciones entre cantidades.
2) Elección de una cantidad que se va a representar con una letra (o de unas cuantas cantidades que se van a representar con letras distintas).
3) Representación de otras cantidades mediante expresiones algebraicas que describen la relación (aritmética) que esas cantidades tienen con otras que ya han sido previamente representadas por una letra o una expresión algebraica.
4) Establecimiento de una ecuación (o tantas como letras distintas se haya decidido introducir en el segundo paso), igualando dos expresiones, de las que se han escrito en el tercer paso, que representen la misma cantidad.
5) Transformación de la ecuación en una forma canónica.
6) Aplicación de la fórmula o algoritmo de solución a la ecuación en forma canónica.
7) Interpretación del resultado de la ecuación en términos del problema.

El primer paso, la lectura analítica, reposa sobre la competencia en el lenguaje natural, pero en particular, sobre la competencia en ese tipo especial de textos matemáticos que son los problemas aritmético-algebraicos de enunciado verbal (cf. Puig y Cerdán, 1988), en los que no hay elipsis, y cuya lectura ha de ignorar cualquier significado que no tenga que ver con las cantidades y las relaciones de las que habla la historia del problema. En ese primer paso, el texto en lenguaje natural se prepara para su traducción al sistema de signos del álgebra, que sólo habla de cantidades y relaciones. La lectura analítica descompone el texto del problema explorando su campo semántico, convirtiéndolo en un nuevo texto en el que sólo están las cantidades y relaciones que permiten resolver el problema, con lo que el nuevo texto reduce y amplía el enunciado, ya que sólo tiene cantidades y relaciones, pero estas cantidades y relaciones pueden estar mencionadas explícitamente en el enunciado, o puede que haya que encontrarlas en su campo semántico.

En los pasos segundo, tercero y cuarto, están presentes tanto las competencias de proceso propias del MC como las competencias en el sistema de signos del álgebra que

tienen que ver con la designación biunívoca entre signos elementales (letras) y cantidades, el significado de las expresiones algebraicas compuestas y sus reglas de sintaxis y la forma como éstas se refieren a cantidades por el intermedio de las relaciones entre cantidades, y lo que Descartes llamaba "expresar una cantidad de dos maneras diferentes"[1] (Descartes, 1701, p. 66), que es lo que da sentido a la construcción de la ecuación, y constituye el significado algebraico del signo igual en una ecuación.
El paso quinto y el paso sexto contienen dos competencias estrictamente algebraicas: el quinto, en el cálculo literal, que, en este caso, consiste en la transformación de expresiones algebraicas para llevarlas a una forma canónica, y, por tanto, se ha de acompañar de la competencia de proceso en un tipo de análisis medios-fines; y el sexto, en la solución de ecuaciones (o sistemas) mediante algoritmos o fórmulas.
Finalmente, el último paso, en que se regresa al problema verbal, exige la competencia en el contenido del problema que permite evaluar la adecuación del resultado.
Ahora bien, esta descripción del MC como una serie de pasos ideales es una descripción macroscópica, que, por tanto, no agota el conjunto de las competencias necesarias para la resolución algebraica de problemas, aunque contenga sus rasgos más importantes. El resolutor tendrá que lidiar además con las peculiaridades propias del problema que se trate de resolver. Es decir, los problemas pueden tener estructuras distintas que hagan preciso desencadenar competencias distintas, en distinto grado o de forma distinta. El estudio pues de la estructura de los problemas aritmético-algebraicos de enunciado verbal, desde el punto de vista de su resolución por el MC, contribuye a ampliar los elementos de la competencia algebraica. Un esbozo de este estudio es lo que exponemos a continuación.

3.2. *Sobre estructura de los problemas aritmético-algebraicos de enunciado verbal*

Nuestro enfoque sobre la descripción de la estructura de esta clase de problemas tiene su origen en el estudio de los problemas aritméticos de enunciado verbal de varias etapas, realizado en Puig y Cerdán (1988). Ahí se elaboró una versión del método de análisis y síntesis, adaptada a la resolución de esa familia de problemas aritméticos, que se usó como herramienta metodológica para describir la estructura de una solución aritmética de un problema cualquiera de esa familia. A partir de ello, en Puig y Cerdán (1990) se comparó el proceso de resolución de problemas aritmético-algebraicos de enunciado verbal modelado por una versión del método de análisis y síntesis, adaptada a los problemas aritméticos, con el modelado por el método cartesiano. En el modelado por esa versión del método de análisis y síntesis, el análisis se realiza a partir de la incógnita del problema y se concluye cuando ya no se llega a otras cantidades desconocidas (incógnitas auxiliares) sino a cantidades conocidas (datos del problema), esto es, cuando la incógnita se ha reducido a datos. El producto del análisis es entonces un conjunto de relaciones entre las cantidades del problema enlazadas de tal manera que pueden representarse en forma de un diagrama con forma de árbol que conduce desde la incógnita a los datos del problema. La síntesis consiste en el recorrido de ese diagrama en sentido inverso, desde los datos a la incógnita, realizando las operaciones aritméticas correspondientes o, si se quiere, escribiendo la expresión aritmética que resuelve el problema. Esta versión del método de análisis y síntesis, por tanto, cuando se usa para resolver ese tipo de problemas y conduce a su solución, lo hace en el SMS_{ar} de la aritmética. Ilustramos lo dicho con el enunciado de un problema, la representación de su análisis en un diagrama y la expresión aritmética que resulta de la síntesis.

El problema:

El problema de la tela para trajes

Cuatro piezas de tela de 50m cada una se van a utilizar para hacer 20 trajes que necesitan 3 metros de tela cada uno. El resto de la tela se utilizará para hacer abrigos. Si para hacer cada abrigo se necesita 4m, ¿cuántos abrigos pueden hacerse?

El diagrama de solución:

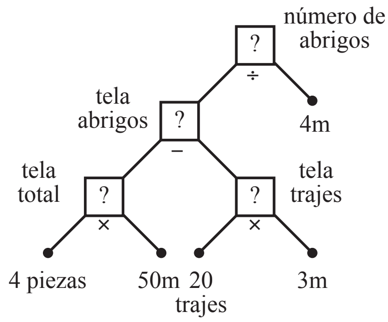

Figura 1

La expresión aritmética a la que se traduce el problema mediante ese análisis y síntesis:

$$\left(4\times 50-20\times 3\right)\div 4$$

Problemas como éste pueden resolverse también con el uso del SMS del álgebra, traduciendo el enunciado a una ecuación y luego resolviendo ésta. Así, si se decide en el paso segundo del MC designar con la letra x a la cantidad "número de abrigos" y, en el paso cuarto, expresar de dos maneras diferentes la cantidad "tela total", la ecuación que resulta será $4x + 20\cdot 3 = 4\cdot 50$, cuya solución es precisamente la expresión aritmética dada por la síntesis anterior. Lo que hace que la solución (indicada) de esta ecuación coincida con esa expresión aritmética es que la cadena de operaciones indicadas en la ecuación puede invertirse afectando las operaciones inversas sólo a cantidades conocidas. Dicho de otro modo, el conjunto de cantidades y relaciones expresadas en esa ecuación puede recorrerse yendo desde la incógnita a datos como se hace en el análisis y síntesis. Obsérvese que esta ecuación es de las que llamamos en Filloy y Rojano (1985b) "ecuaciones aritméticas".

No es difícil percatarse de que las ecuaciones que llamamos "algebraicas", es decir, aquellas en las que la incógnita aparece en ambos miembros de la ecuación, no pueden invertirse de la misma manera, ya que es preciso operar con la incógnita para resolverlas. Así que el conjunto de cantidades y relaciones expresadas en esa ecuación no puede recorrerse desde la incógnita a los datos como se hace en el análisis y síntesis.

Tomemos por ejemplo una ecuación como $\frac{x}{217}+171=\frac{x}{198}$. Si intentamos recorrer desde la incógnita el camino del análisis, utilizando las relaciones entre cantidades que están expresadas en esta ecuación, éste no consigue reducir la incógnita a datos, sino que se vuelve a la incógnita al usar la relación que corresponde a su segunda ocurrencia. Lo mostraremos recurriendo a un problema verbal en una de cuyas soluciones aparece esa ecuación. Así podremos nombrar las cantidades y relaciones expresadas en la ecuación por sus significados en el contexto de la historia que narra el enunciado del problema.

El problema proviene de Kalmykova (1975) y ya ha sido usado en (Puig y Cerdán, 1988; Puig, 1996). Lo llamaremos “el problema del heno”.

El problema del heno

En una granja colectiva se previó que una cierta cantidad de heno almacenado para el consumo del ganado duraría 198 días, pero el heno duró 217 días ya que era de la mejor calidad y el ganado consumió 171 kg menos por día de lo que se había previsto que gastaría. ¿Cuánto heno se había almacenado en la granja? (Kalmykova, 1975, pág. 90)

Si este problema se traduce a la ecuación $\frac{x}{217}+171=\frac{x}{198}$, es porque, de la historia que narra el enunciado, se han extraído las cantidades conocidas “días previstos”, D_p (198), “días reales”, D_r (217) y “heno ahorrado diario”, G_m (171), las cantidades desconocidas “gasto diario previsto”, G_p, “gasto diario real”, G_r, y “heno almacenado”, P, y las relaciones entre esas cantidades $D_p \times G_p = P$, $D_r \times G_r = P$ y $G_r + G_m = G_p$.

Ahora bien, el uso de esas cantidades y relaciones en el análisis de la incógnita conduce a uno de los dos diagramas siguientes, que no pueden acabar en datos porque de nuevo aparece la incógnita, con lo que el análisis no puede concluirse de forma que la solución del problema sea una expresión aritmética obtenida por la síntesis.

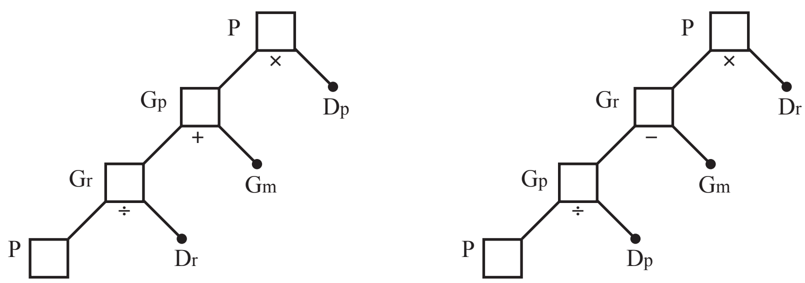

Figura 2

Los diagramas de la figura 2 se corresponden con los dos intentos posibles de despejar cada una de las ocurrencias de la x invirtiendo las operaciones indicadas en la ecuación, intentos que conducen a $\left(\frac{x}{217}+171\right)\cdot 198 = x$ y $\left(\frac{x}{198}-171\right)\cdot 217 = x$, pero no a la x igualada a una expresión aritmética. En efecto, en el caso de ecuaciones como ésta, no basta con invertir las operaciones indicadas para despejar la incógnita, sino que es preciso además operar con la incógnita.

Si el problema del heno, en vez de resolverse con el MC (y, por tanto, el SMS_{al} del álgebra), se hubiera intentado resolver con el método de análisis y síntesis (y el SMS_{ar} de la aritmética) y en el análisis se hubieran establecido precisamente las relaciones $D_p \times G_p = P$, $D_r \times G_r = P$ y $G_r + G_m = G_p$, entonces el problema no hubiera podido resolverse porque ese análisis no permite reducir la incógnita a datos. Los diagramas de la figura 2 lo muestran con claridad.

La diferencia fundamental entre el análisis del enunciado propio del método de análisis y síntesis y el del MC reside en que el esbozo lógico-semiótico que uno realiza cuando usa el MC prevé el uso del SMS_{al} del álgebra. Esto conlleva no sólo el uso de letras para designar las cantidades que se determinan en el análisis, sino los nuevos significados de las operaciones y las relaciones aritméticas y, en particular, del signo igual que son propios de ese SMS_{al}. Resulta entonces que ese análisis se hace considerando de la misma manera las cantidades conocidas y las desconocidas. Por el contrario, el análisis del enunciado propio del método de análisis y síntesis se desarrolla situándose en la incógnita del problema y considerando con qué datos habría que operar para obtenerla, y en el esbozo lógico-semiótico no se contempla la posibilidad de operar más que con cantidades conocidas.

Los diagramas anteriores, que reflejan una solución modelada por el método de análisis y síntesis, no son adecuados para dar cuenta de la lectura analítica propia del MC. Por ello, para describir la estructura de los problemas desde el punto de vista de su resolución algebraica vía el MC, hemos elaborado otro tipo de diagrama con forma de grafo, adaptado de Fridman (1990).

Esos grafos representan la lectura analítica del enunciado de un problema verbal aritmético-algebraico propia del MC porque sus vértices representan cantidades y sus aristas, relaciones entre cantidades, de modo que el grafo muestra la red de relaciones entre cantidades que se ha determinado en esa lectura analítica. Además, en el grafo se distinguen las cantidades conocidas de las desconocidas representando mediante círculos negros los vértices correspondientes a las cantidades conocidas (los llamaremos "vértices obscuros") y mediante cuadrados con el interior vacío los vértices correspondientes a las cantidades desconocidas (los llamaremos "vértices claros"). Como las cuatro operaciones aritméticas básicas son binarias, las relaciones correspondientes son ternarias, de manera que en los problemas aritmético-algebraicos más corrientes las aristas tienen tres vértices[2].

Así, la lectura analítica del problema del heno (tomado como espacio textual) que produce las cantidades conocidas D_p (198), D_r (217) y G_m (171), las cantidades desconocidas G_p, G_r, y P, y las relaciones entre esas cantidades $D_p \times G_p = P$, $D_r \times G_r = P$ y $G_r + G_m = G_p$ (un nuevo texto) se representa mediante el grafo de la figura 3.

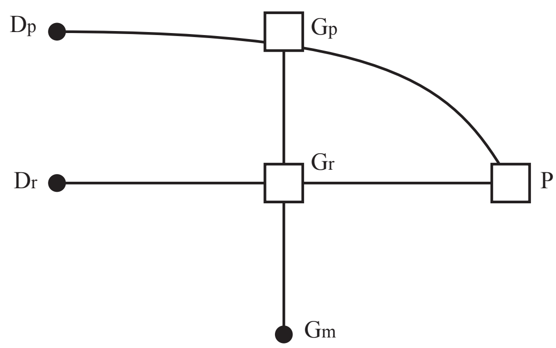

Figura 3

La lectura analítica del problema de la tela para trajes en la que se determinan las cantidades y relaciones que anteriormente hemos representado mediante un diagrama, puede representarse también mediante el grafo de la figura 4. En ella, las cantidades conocidas son "número de piezas de tela", N_p (4), "número de trajes", N_t (20), "tela por abrigo" G_a (4m), "tela por pieza", G_p (50m) y "tela por traje" G_t (3m); las cantidades desconocidas "número de abrigos", N_a, "tela de los abrigos", T_a, "tela de las piezas o tela total", T_p, y "tela de los trajes", T_t, y las relaciones $N_i \times G_i = T_i$, $i \in \{a, p, t\}$, $T_p = T_a + T_t$.

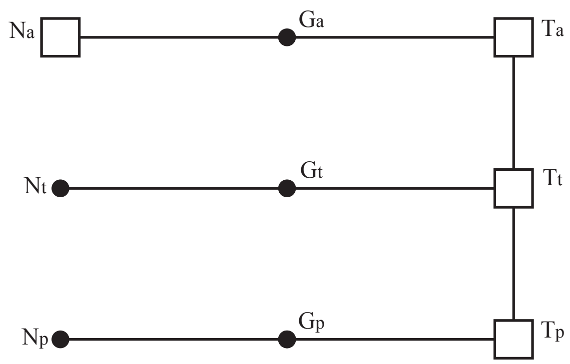

Figura 4

En estos grafos además es patente por qué una red de relaciones permite que se obtenga la solución del problema mediante el uso del SMS_{ar} de la aritmética y la otra no. En efecto, para que no haya que operar con cantidades desconocidas es preciso que en una arista ternaria dos de los vértices sean obscuros (sean cantidades conocidas), entonces el vértice claro se puede convertir en obscuro (la cantidad desconocida calcularse a partir de cantidades conocidas) realizando la operación aritmética correspondiente. La incógnita del problema se puede obtener a partir de los datos siempre que haya una manera de ir obscureciendo los vértices claros sucesivamente hasta llegar a él. En el grafo correspondiente a la lectura analítica del problema de la tela para trajes este camino existe, y coincide con el camino que describe el diagrama de análisis y síntesis de la figura 1. En el de la lectura del problema del heno, el camino no puede existir porque no hay ninguna arista que tenga dos vértices obscuros. Resulta coherente pues con la terminología anteriormente introducida, llamar "aritméticos" a los grafos que comparten con el de la figura 4 la propiedad que hemos explicado y "algebraicos" a los que no la tienen (como el de la figura 3).

Los grafos representan pues la lectura analítica de los enunciados de los problemas cuando se resuelven mediante el uso del MC, pero esta lectura analítica es sólo el primer paso del método. Para obtener la ecuación $4x + 20 \cdot 3 = 4 \cdot 50$ o la ecuación $\frac{x}{217} + 171 = \frac{x}{198}$, hay que recorrer otros tres pasos, los pasos segundo, tercero y cuarto del MC.

En las figuras 5, 6 y 7 mostramos cómo esos pasos también pueden representarse en los grafos.

Segundo paso

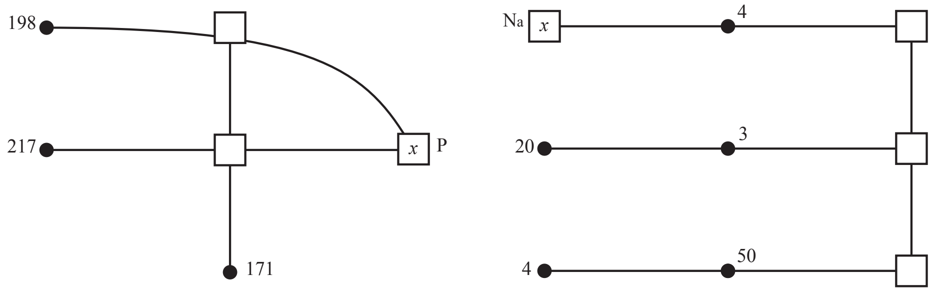

Figura 5

Tercer paso

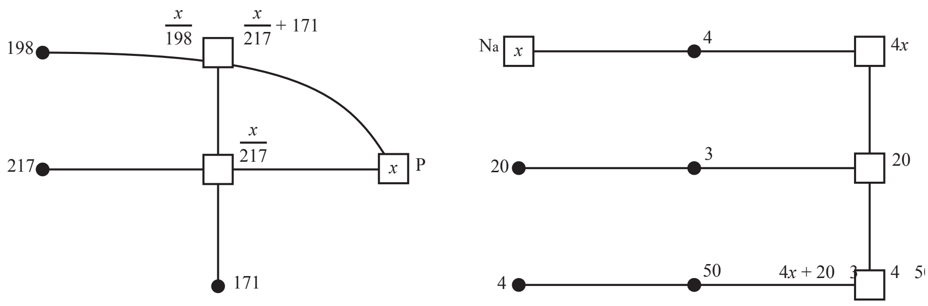

Figura 6

Cuarto paso

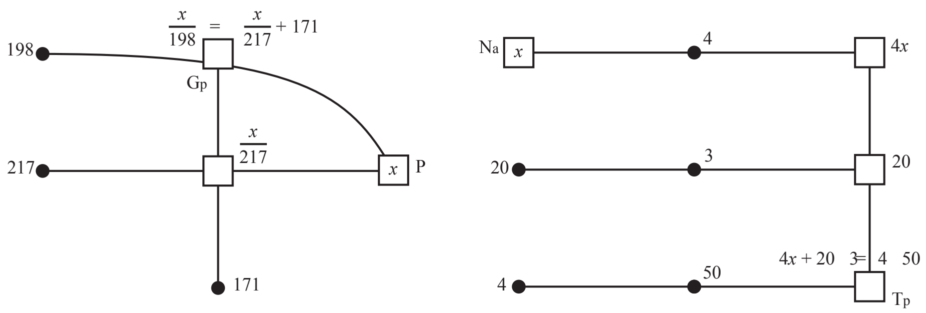

Figura 7

Obsérvese cómo, si el grafo es aritmético, la ecuación que se obtiene es aritmética y, si el grafo es algebraico, algebraica. También hemos mostrado que los diagramas de análisis y síntesis correspondientes producen una solución aritmética o no la producen. Ahora bien, esto no quiere decir que los problemas correspondientes podamos calificarlos de “aritmético” (el de la tela para trajes) y de “algebraico” (el del heno). En efecto, lo que en el caso del problema del heno no es aritmético es un proceso de resolución conducido por el método de análisis y síntesis (el que representa el diagrama de análisis y síntesis) y una lectura analítica que constituye el primer paso del MC (la que representa el grafo); pero puede caber que exista otro proceso de resolución u otra lectura analítica que determine otra red de relaciones entre cantidades que sí sea aritmética. Y no sólo cabe que sea así, sino que así es el caso: si la lectura analítica determina, además de las cantidades anteriores, las cantidades desconocidas “días de más”, D_m, “gasto en los días de más”, G_{Dm}, y “ahorro total”, A_t, y las relaciones nuevas $D_p \times G_m = A_t$, $D_m \times G_r = G_{Dm}$, $D_p + D_m = D_r$ y $G_{Dm} = A_t$, el grafo correspondiente es aritmético, como puede verse en la figura 8, y la incógnita se determina con la expresión aritmética $\left(\frac{198\cdot 171}{217-198}+171\right)\cdot 198$, que se obtiene al recorrer sucesivamente las aristas (D_p, D_r, D_m), (D_p, G_m, A_t), (A_t, G_{Dm}) (D_m, G_r, G_{Dm}), (G_p, G_r, G_m), y (D_p, G_p, P), calculando en cada paso una cantidad desconocida a partir de dos conocidas.

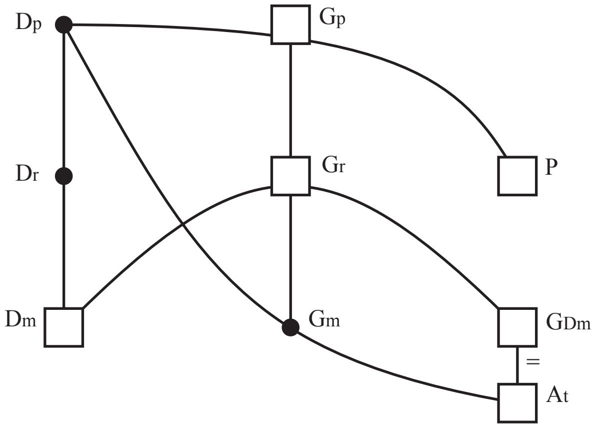

Figura 8

Lo que puede calificarse de aritmético o algebraico es, por tanto, el proceso de resolución (representado por el diagrama de análisis y síntesis), la lectura analítica (representada por el grafo) o la ecuación que traduce el enunciado, pero no el problema.

Pero además de permitir discutir de esta manera el carácter aritmético o algebraico de los problemas, el grafo representa una lectura analítica posible del problema, que, al consistir en una red de cantidades y relaciones, representa una estructura del problema. Desde ese punto de vista, las distintas estructuras que ilustran los grafos reflejan la complejidad de la competencia que hay que poner en juego para resolver los problemas mediante el Método Cartesiano. Cerdán (2008) ha utilizado una versión ligeramente distinta de estos grafos para estudiar los problemas de esta familia aritmético-algebraica, establecer isomorfismos entre ellos, describir la complejidad de la estructura de la red de relaciones y relacionar todo ello con las dificultades que los problemas tienen cuando los resuelven los alumnos y los errores que cometen.

3.3. *Sobre el proceso de traducción y el trabajo en el nivel de la expresión*

Es habitual referirse al método cartesiano como el proceso de poner un problema en ecuaciones o como un proceso de traducción del enunciado del problema en lenguaje natural al lenguaje del álgebra en que está la ecuación. Ya hemos visto que el MC no se limita a esa traducción, sino que también contiene, por un lado, la lectura analítica, que prepara el texto del problema elaborando otro texto que en cierta manera está preparado para ser traducido al lenguaje del álgebra, y, por otro, un trabajo en el nivel de la expresión en el lenguaje del algebra que transforma el texto traducido (la ecuación) a otro texto que se sabe resolver (la ecuación en forma canónica); con el añadido de la vuelta al mundo del enunciado del problema, con el resultado obtenido en el mundo del lenguaje algebraico.

En la resolución algebraica de problemas de enunciado verbal hay implicados, por tanto, dos tipos de producción de textos algebraicos. El primero es el que podemos seguir llamando “traducción” a condición de que tengamos presente que el proceso que aquí se realiza es el paso entre dos lenguajes que son distintos no sólo por la naturaleza de sus signos, sino porque el lenguaje del álgebra sólo tiene como contenido el mundo de las cantidades y las relaciones aritméticas entre ellas. Desde este punto de vista, la lectura analítica forma parte del proceso de traducción creando un texto intermedio en lenguaje natural, cuyo contenido es (casi) sólo una red de cantidades y relaciones. “Casi” porque la expresión de los nombres de las cantidades en lenguaje natural conlleva otros significados que las puras cantidades.

La traducción se realiza asignando nombres a las cantidades en el lenguaje del álgebra mediante signos individuales (letras), cuya relación con la cantidad a la que nombra se establece de forma arbitraria en el segundo paso del método, o mediante expresiones compuestas que traducen las relaciones entre cantidades a operaciones expresadas en el lenguaje del álgebra, en el tercer paso del MC. Las expresiones algebraicas simples y compuestas que resultan de la traducción se refieren pues a las cantidades concretas del problema, como consecuencia de ser el resultado de esa traducción, normalmente a través de un texto intermedio. Sin embargo, para que pueda desencadenarse la transformación de la ecuación en una forma canónica, es preciso que las expresiones algebraicas compuestas dejen de referirse a esas cantidades concretas. Mientras estén pegadas a ellas[3], las expresiones y las ecuaciones que se produzcan aplicando reglas de transformación no parecerán referirse a nada. Las expresiones algebraicas producto del proceso de traducción han de desprenderse de las cantidades y relaciones concretas del mundo del problema, no para convertirse en puros signos que se manejan sintácticamente siguiendo reglas, sino para referirse a las cantidades y relaciones abstractas del mundo del álgebra.

Esto es así porque una expresión algebraica, incluso si traduce el enunciado de un problema verbal, no tiene como contenido el estado de cosas del mundo al que se refiere el enunciado del problema verbal: ése es el contenido de la expresión que es el texto del enunciado del problema verbal. La expresión algebraica tiene como contenido el estado de cosas del mundo del álgebra al que se refiere, esto es, un conjunto de cantidades abstractas y un conjunto de relaciones (aritmético-algebraicas) entre ellas.

Además, entre la expresión algebraica y su contenido hay correspondencia biunívoca. Eso hace que sea un icono, en términos de Peirce (Peirce, C.P. 2279, p.158), y que, por tanto, “las operaciones que se llevan a cabo en la expresión modifican el contenido; y si estas operaciones se llevan a cabo conforme a ciertas reglas, el resultado proporciona nuevas informaciones sobre el contenido” (Eco, 1990, p. 24), en particular, en el caso que nos ocupa, nuevas relaciones entre las cantidades que eventualmente darán un valor numérico a la incógnita de la ecuación (o las incógnitas de las ecuaciones). Por el contrario, no hay correspondencia biunívoca entre la expresión en el lenguaje natural y su contenido, siendo las expresiones del lenguaje natural símbolos, en términos de Peirce. Ambas expresiones y ambos contenidos están relacionados por el proceso de traducción, y, como hemos dicho, a menudo a través de textos intermedios.

El segundo tipo de producción de textos algebraicos es el que se realiza entre un texto algebraico y otro texto algebraico mediante transformaciones algebraicas, que se realizan en el nivel de la expresión. En el caso de la resolución algebraica de problemas, esta producción de nuevos textos algebraicos es de lo que se ocupa el quinto paso del MC y tiene como objetivo poner la ecuación en forma canónica.

Para ello hace falta que las expresiones algebraicas ya no se refieran a las cantidades particulares del enunciado del problema, sino que adquieran nuevo significado en el mundo del álgebra de cantidades y relaciones. En ese mundo, las reglas de transformación de las expresiones y ecuaciones adquieren su significado como resultado de teoremas que establecen que, si ciertas relaciones entre cantidades están dadas, otras relaciones también están dadas.

Pero además, en el contexto de la resolución algebraica de problemas, las transformaciones se dotan de sentido como consecuencia de la constatación de que cualquier ecuación puede transformarse en un conjunto reducido de ecuaciones que se sabe resolver (las formas canónicas), y luego es posible volver a los significados del primer modo de producción de textos algebraicos (la traducción) para recuperar los del mundo del enunciado del problema (en el paso séptimo).

Las dificultades de los alumnos tienen que ver también con el paso entre los dos tipos de producción de textos algebraicos y los cambios de significado necesarios para ello. En la sección siguiente examinamos un conjunto de hechos que hemos encontrado en nuestras investigaciones, de cuya base empírica y fundamentación teórica hemos dado cuenta en Filloy, Rojano y Puig (2008).

4. *El proceso de resolución algebraico de un problema verbal: el componente de los procesos cognitivos*.

4.1. *Sobre la cognición.*

Los procesos cognoscitivos que se ponen en acción para llevar a cabo las formas del pensamiento matemático y su comunicación (con códigos socialmente establecidos) van afinando los elementos complejos como los que se utilizan a) en la percepción (por ejemplo, en el caso del manejo de las formas geométricas y sus transformaciones), b) en el direccionamiento de la atención y sus relaciones con los procesos de comprensión, c) en el uso cada vez más intensivo de la memoria, d) en el desencadenamiento de procesos de análisis y síntesis cada vez más entrelazados con el uso de la lógica, e) en las concepciones heurísticas utilizadas en la resolución de las situaciones problémicas, f) en el aprendizaje, muy ligado a los procesos de generalización y abstracción, y que requiere de usos novedosos de los SMS de la matemática escolar, etc.

4.2. *Sobre la resolución de problemas*.

Para ejemplificar, consideremos, entre muchos, tres métodos clásicos para resolver problemas.

MIAS: Concibiendo a los enunciados de los problemas como descripciones de “situaciones reales” o “estados posibles del mundo” y transformando tales textos a través de oraciones analíticas, esto es, utilizando “hechos” válidos en “todo mundo posible”: inferencias lógicas que actúan como descripciones de las transformaciones de las “situaciones posibles” hasta llegar a una que se reconoce como la solución del problema. A este método lo llamaremos Método de Inferencias Analíticas Sucesivas (MIAS). Éste es el Método Analítico Clásico para resolver problemas.

MAES: A través de este método de resolución se usan exploraciones con datos particulares para desencadenar el análisis del problema y con ello su solución, a él nos referiremos como Método Analítico de Exploraciones Sucesivas (MAES).

MC: A través de la representación de algunos de los elementos desconocidos del texto por medio de expresiones de un SMS más abstracto, traduciendo, después, el texto del problema a una serie de relaciones expresadas en ese SMS que conducen a uno o varios textos cuya descodificación, vía un regreso en la traducción al SMS original, arroja la solución del problema. Este acercamiento a la resolución de problemas es el usual en los textos actuales de álgebra y lo llamaremos Método Cartesiano (MC).

Interesa describir qué tipo de dificultades, obstáculos y facilidades produce la utilización de cualquiera de los tres métodos para resolver los problemas verbales que aparecen en los libros de texto. Interesa qué tipo de competencias genera el uso del MAES, para que el usuario pueda llegar a ser competente en el uso del MC, y cuáles, generadas por el MIAS, son necesarias para el uso competente del MC.

Algunos expertos y muchos principiantes, al utilizar un SMS, recurren espontáneamente al uso de valores particulares y a operar con ellos para explorar y así resolver algunos problemas, ya que el uso de datos particulares y su operación confiere,

espontáneamente, significados en un SMS más concreto a las relaciones que se encuentran inmersas en un problema, dando esto más posibilidades de que, en muchos casos, se pueda desencadenar el análisis lógico. Con el uso de un SMS más abstracto es más difícil captar el sentido de las representaciones simbólicas, al ser éstas más abstractas y, por ende, es más difícil encontrar estrategias de solución del problema.
Para resolver problemas más complejos es necesario avanzar en la competencia para hacer análisis lógicos de las situaciones problemáticas. Para poder desencadenar los razonamientos analíticos que se requieren para la resolución de problemas, se necesita que no haya ciertos obstructores, que no haya incertidumbre sobre las tácticas que se necesitan poner en uso al resolver el problema; y para progresar en lo anterior, es necesario avanzar en tácticas intermedias inmersas en los usos de los estratos de los SMS intermedios que se estén utilizando.

4.3. *Sobre el uso competente y las tendencias cognitivas*.

El uso competente del MC para resolver problemas, implica una evolución en el uso de la simbolización, en el que, al final, un usuario competente puede darle sentido a una representación simbólica de los problemas que esté desprendida de los ejemplos concretos particulares dados en el proceso de enseñanza, creando así Familias de Problemas, cuyos miembros son problemas que se identifican por un mismo esquema de resolución. Tendrá sentido el uso del Método Cartesiano cuando el usuario tenga conciencia de que, al aplicarlo, va a poder resolver tales Familias de Problemas. No se confiere un sentido al Método Cartesiano de resolución de problemas ejemplificándolo desgranado, desarticulado ejemplo tras ejemplo, como es propiciado por la tradicional didáctica usual. La concepción integral del método necesita la seguridad del usuario de que la aplicación general de sus pasos lleva necesariamente a la solución de tales Familias de Problemas.
Un uso competente impide que el usuario caiga en ciertas tendencias cognitivas, que obstruyen la posibilidad de hacer un uso adecuado del MC para resolver problemas. Ejemplo de esto serían a) la presencia de mecanismos apelativos que llevan al desencadenamiento de procesos erróneos de solución (por ejemplo, si en la resolución de un problema aparece un tipo de texto matemático que no se sabe descodificar), b) la presencia de obstrucciones provenientes de la semántica sobre la sintaxis y viceversa (por ejemplo, al resolver problemas y dotar de significados a los signos, predisponiendo esto al sujeto a una buena utilización de la sintaxis), c) la presencia de mecanismos inhibitorios (por ejemplo, cuando a un problema, de una Familia de Problemas, ya resuelto, se le cambia el valor de algunos datos).

4.4. *Sobre el dominio de las tácticas intermedias y las tendencias cognitivas*.

El dominio de las tácticas intermedias debe colaborar en el desarrollo de tendencias “positivas” cognitivas que se presentan en los procesos para aprender conceptos más abstractos, como son a) el retorno a situaciones más concretas, cuando se presenta una situación de análisis, una parte necesaria para avanzar en la competencia del MC; o b) la presencia de un proceso de abreviación de un texto concreto para poder producir reglas sintácticas nuevas (por ejemplo, en la resolución de problemas, cuando se está operando con los valores particulares que se le asignan a la incógnita de un problema en cada exploración del MAES, y luego, poco a poco, se va operando en el texto abstracto, con las reglas del SMS más abstracto, sin hacer referencia ya a la situación concreta).

4.5. *Sobre la sintaxis y la memoria*.

Para ciertos problemas, el embarcarse en un proyecto de resolución vía el Método Cartesiano o el MAES, no siempre es el mejor camino de solución, pudiendo ser, en cambio, una mejor estrategia de solución, la que se desencadena a partir de un análisis lógico directo (MIAS).
Las representaciones simbólicas de los problemas en el MC hacen más eficiente el uso de la memoria de trabajo. Cuando el sujeto logra hacer relaciones entre datos e incógnitas, se integra la información haciendo *chunks* de información más complejos. En el momento en que el sujeto logra hacer dichas relaciones, el uso de la sintaxis obvia la necesidad de recargar la memoria de trabajo con descripciones semánticas ligadas al planteamiento de los problemas.

4.6. *Sobre el problema de la transferencia*.

Algunos investigadores establecen, acerca de la diferencia que hay entre un experto y un novato, para resolver problemas, el que un usuario competente tiene ya formados esquemas mentales que le permiten reconocer un problema incluso ante las primeras palabras, y, al reconocerlo, se da cuenta de qué tipo de estrategia ha de seguir para resolverlo. Otros investigadores afirman que la formación de esquemas les permite a los usuarios clasificar problemas sobre la base de principios generales, desdeñando aspectos superficiales, en un proceso donde el esbozo que se obtiene del problema se pone en consonancia con el esquema mental que tiene guardado el usuario en su memoria a largo plazo.
Entonces, parecería que es debido a que hay tales esquemas por lo que se desencadena una forma de trabajo hacia adelante, en la que se realizaría una síntesis más que un análisis del problema. Sin embargo, aunque esto puede suceder en muchas situaciones problemáticas, en poco nos ayudaría para explicar procesos más complejos que nos permitan decir por qué ciertos sujetos pueden transferir la resolución que se da en un tipo de problema a otro no tratado. Esto es, la transferencia del uso de un método de un SMS a otro.

4.7. *Sobre el uso competente del esbozo lógico/semiótico*.

Los sujetos que, formalmente, son los más competentes, en general, usan el MC para resolver algunos tipos de problemas que se les presentan; sin embargo, en la resolución de ciertos problemas los sujetos pasan, primero, por un momento de reflexión, en el que ellos mismos evalúan si son capaces de anticipar los pasos de la resolución, esto es, en donde hacen un esbozo lógico/semiótico de la situación, en el que se realiza, entre otras cosas, la explicitación o la identificación de "lo desconocido", y en dónde se discrimina cuáles son las relaciones centrales que intervienen en el problema, utilizando para esto algún estrato de SMS, el cual, muchas veces no es propiamente el sistema de signos requerido por el MC, sino algún estrato de SMS más concreto que éste –por ejemplo el SMS del MIAS o un estrato de los SMS intermediarios, como los utilizados en las exploraciones del MAES.
Para hacer el esbozo mencionado, se puede partir de los datos y de ahí arribar al valor de la incógnita, o bien puede darse un análisis lógico que implique el establecimiento de relaciones en el que se opere con lo desconocido, ya sea en forma particular (como en el MAES), o bien que sea representado directamente mediante el SMS del MC.

4.8. *Sobre el uso pertinente de ciertos estratos intermedios*.

La competencia formal en la resolución de problemas no necesariamente se debe a la formación de una gran cantidad de esquemas mentales referentes a tipos de problemas. Esto es, aunque a un sujeto se le puede identificar como competente en la resolución de problemas porque emplee estratos del SMS del MC para resolverlos haciendo, aparentemente, un uso, automático, de esquemas mentales que ha adquirido, previamente, acerca de la resolución de distintas familias de problemas, si se quiere hacer una mejor caracterización de la competencia formal en la resolución de problemas, se debe considerar el progreso de un usuario en su capacidad para realizar el análisis lógico/semiótico de las situaciones problemáticas.
En resumen, un usuario competente de un SMS más abstracto, realmente lo va a ser, si también lo es en otros estratos de SMS más concretos, que le permitan tener mayor posibilidad para desencadenar el análisis lógico de una situación problemática, de abordar ésta, mediante el uso de estratos de SMS que no sean necesariamente los más abstractos, sino utilizando aquel estrato del SMS que le permita comprender el problema y con ello desencadenar el análisis lógico de éste.

4.9. *Sobre el esbozo lógico matemático, los estratos de SMS utilizados como representación*.

Mediante el uso de ciertos estratos del Sistema Matemático de Signos (SMS) necesitado por el método cartesiano, los usuarios generan sentidos intermedios vinculados únicamente a estos estratos, esto les permite simplificar la solución de ciertas Familias de Problemas. Una vez que estos sentidos se dominan, el uso de este nuevo Sistema de Signos, con únicamente estos estratos, trae la simplificación de ciertos problemas (cf., p. ej., en Krutetskii, 1976, el problema de los pollos y los conejos). Así, enseñando modelos tales como los métodos de exploraciones sucesivas se trata de usar estratos intermedios ad hoc (que pueden identificarse entre los más concretos (aunque, también, se presentan los más abstractos) necesitados por el método cartesiano) a fin de simplificar el análisis del problema. El objetivo está en, progresivamente, generar sentidos para tales representaciones que van a ser implementadas por el uso del método cartesiano. Cada Familia de Problemas determina los niveles de representación (estratos de los de SMS) requeridos para su solución.

4.10. *Sobre el nivel de representación y el uso de la memoria*.

A fin de resolver un problema, por ejemplo, el problema de pollos y conejos, con métodos primitivos la competencia requerida puede alcanzar casi el nivel de un experto. Por eso es que la tendencia natural es, por ejemplo, usar el método de prueba y error, tratando de dar una circunvolución a la serie de inferencias analíticas consecutivas requerida por el análisis lógico aritmético de la situación. Estas inferencias requieren de representaciones que permitan un análisis, y esto, a la vez, demanda un uso más avanzado de tales Sistemas de Signos. En otras palabras, la Matemática y el Lenguaje Natural están siendo entretejidos y puestos a trabajar, y, entonces, se necesitan competencias para hacer esbozos lógico/semióticos que hagan que la estrategia resolutiva sea significativa. Lo que hace tal análisis y esbozo lógico/semiótico complicado es el hecho de que, para algunos problemas, se requiere de un uso intenso de la memoria de trabajo, y esto implica un entrenamiento que sólo tienen los expertos resolutores de problemas.

4.11. *Sobre el uso de métodos primitivos y el uso de la memoria*.

Cuando se emplean métodos primitivos lo que se genera no es una representación única de un cierto estilo; más bien, cambia según cada Familia de Problemas. Por otra parte, con el uso de un nuevo SMS, se utilizan métodos más avanzados como medio para escribir, arreglar, trabajar, y la representación se hace mediante "formas canónicas". Esto constituye una parte del sentido del uso de tal SMS. Cuando se usa un método primitivo, deben inventarse representaciones para cada Familia de Problemas y esto requerirá un cierto uso competente de la memoria de trabajo a fin de seguir representando las acciones de solución propuestas en el esbozo lógico/semiótico, luego, dejando nuevas marcas y señales (o nuevos *chunks* en la memoria) por medio de los cuales los resultados previos pueden agruparse y no dejarse a la deriva. Otros métodos más avanzados requieren que los estudiantes aprendan a cómo dejar marcas que, progresivamente, liberen unidades de memoria, permitiendo así al usuario utilizar tales unidades en el desencadenamiento del análisis y la solución del problema.
Las representaciones intermedias arreglan la información en *chunks* de organización más compleja, aun cuando esto no se pueda distinguir a través de los signos producidos por el usuario. Así, durante las entrevistas, algunos estudiantes llegan a una representación del problema donde, muy probablemente, hicieron cálculos (por ejemplo, por medio de una calculadora o una computadora) y, al final, simplemente escriben la solución numérica del problema.

4.12. *Sobre los códigos personales*.

Un aspecto importante que considerar es el uso de grafías (códigos) personales para indicar las acciones ya realizadas y las acciones por realizar sobre los elementos del proceso de resolución. Esto sugiere la existencia de una etapa previa a la etapa operacional. En esta etapa, se presentan también obstrucciones, que dichas grafías imponen cuando la complejidad de la situación aumenta, generando lo que después, en estudios posteriores se *consideran errores naturales de sintaxis*: uso inadecuado de los signos de igualdad, ausencia de éstos, olvido de algunos términos, etc.

4.13. *Sobre la resolución de problemas y la sintaxis*.

Pueden encontrarse evidencias empíricas que muestran que el proceso de análisis de una situación problemática típica (expresada en el lenguaje usual), hace aflorar fenómenos de lectura de la situación que inhiben el desencadenamiento de algoritmos que momentos antes se realizaban de manera inmediata y correcta. Así, ante la presencia de una expresión escrita en el lenguaje algebraico usual de una ecuación de primer grado, el sujeto es incapaz de descodificar como tal y, por lo tanto, utilizar las habilidades operatorias brillantes, que momentos antes había exhibido con la misma ecuación. Se pueden citar ejemplos de situaciones problemáticas (en las partes en las que se realizan traducciones del lenguaje usual al SMS), que muestran la existencia de una tensión entre la interpretación de la expresión (descodificación del texto), dada por una lectura que proviene de un contexto propio del SMS y las prácticas de mecanización de las operaciones (la sintaxis), inhibiendo la lectura necesaria dada por la interpretación semántica que le confiere la situación concreta en el problema verbal. Nuevamente, una lectura sintáctica inhibe la lectura del contexto concreto en el que el problema está situado, no deja dar a esas expresiones una interpretación que permita continuar con la estrategia de resolución correcta (que llevará a la solución), y que incluiría, como una de sus tácticas, esa parte de la traducción.

4.14. *Sobre la mecanización y la práctica*.

En este momento de la discusión es cuando algunas de las preocupaciones teóricas de Thorndike (cf. Thorndike et al., 1923) y sus implicaciones en la enseñanza cobran una nueva presencia, pues la necesidad de automatización de ciertas operaciones, que provienen de la descodificación de una situación problemática concreta (problemas de edades, mezclas, aleaciones, monedas, trabajo, etc.) es perentoria, ya que ni el sentido de los algoritmos necesarios, ni la interpretación semántica en términos de los contextos en que esas operaciones fueron practicadas, ni los mecanismos de anticipación (sobre todo los inhibitorios) deben obstruir el desencadenamiento de una estrategia de resolución. Siendo necesario, además, que, al ser esta última trasladada a la memoria a corto plazo, el tiempo factible de permanencia en ella no obstruya la posibilidad de considerar todas las tácticas intermedias necesarias para la resolución propuesta y, posibilitar que la concatenación de todas las tácticas, aun sin realizar todos los pasos necesarios para la consecución de esas metas parciales, pueda llevarse a cabo en esa parte de la memoria (a corto plazo), la cual es difícil de mantenerse activada tanto tiempo. Puede decirse que esta habilidad de hacer permanecer largo tiempo cantidades importantes de información, para así poder salir de ese espacio de la memoria y traer nueva e importante información, es difícil de encontrar, por lo general, entre los alumnos de enseñanza media, pues se requiere de grandes recursos que no proporciona la enseñanza usual. Ante esto, la mecanización, surgida de una práctica intensa, permite un uso óptimo de las expresiones y las operaciones usuales en el SMS, y así se rompe con los mecanismos anticipadores que inhiben el desencadenamiento de las estrategias de resolución necesarias.

Referencias bibliográficas

Booth, L. (1984). *Algebra: Children's Strategies and Errors*. Windsor: NFER-Nelson.

Cerdán, F. (2008). *Estudios sobre la familia de problemas aritmético-algebraicos*. Tesis doctoral. Universidad de Valencia.

Descartes, R. (1701). *Regulæ ad directionem ingenii. Opuscula Posthuma Physica et Mathematica*. Amsterdam: Typographia P. and Blaev J.

Drouhard, J.-P. (1992). *Les Écritures Symboliques de l'Algèbre Elémentaire*. Unpublished doctoral disertation, Université Denis Diderot, Paris 7, France.

Eco, U. (1990). *Semiótica y filosofía del lenguaje*. Traducción castellana de R. P. Barcelona: Lumen. (Edición original, Eco, U. (1984). *Semiotica e filosofia del linguaggio.* Turin: Einaudi.)

Filloy, E. & Rojano, T. (1984). From an Arithmetical to an Algebraic Thought (A clinical study with 12-13 year olds). In J. Moser (Ed.) *Proceedings of the Sixth Annual Meeting for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter* (pp. 51-56). Madison, WI.

Filloy, E. & Rojano, T. (1985a). Obstructions to the acquisition of elemental algebraic concepts and teaching strategies. In L. Streefland (Ed.) *Proceedings of the Ninth Annual Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 154–158). Utrecht, Holanda.

Filloy, E. & Rojano, T. (1985b). Operating the unknown and models of teaching (a clinical study with 12-13 year olds with a high proficiency in Pre-Algebra). In S. K. Damarin and M. Shelton (eds.) *Proceedings of the Seventh Annual Meeting for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter* (pp. 75–79). Columbus, OH.

Filloy, E. & Rojano, T. (1989). Solving Equations: The trandition from Arithmetic to Algebra. *For the Learning of Mathematics*, 9 (2), 12-25.

Filloy, E. & Rojano, T. (1991). Translating from natural language to the mathematical system of algebraic signs and viceversa: a clinic study with children in the pre-algebraic stage. *Proceedings of the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter* (pp. 29-35). Virginia Tech, USA.

Filloy, E., Rojano, T. & Solares, A. (2003). Two Meanings of the Equal Sign and Senses of Substitution and Comparison Methods. In N. A. Pateman, B. Dogherty & J. Zilliox (Eds.) *Proceedings of the Twenty-seventh Annual Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4 (pp. 223-229). Honolulu, Hawaii, USA: CRDG, College of Education, University of Hawaii.

Filloy, E.; Rojano, T. & Puig, L. (2008). *Educational Algebra. A Theoretical and Empirical Approach*. New York: Springer.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel.

Fridman, L. M. (1990). Los grafos trinomiales como metalenguaje de los problemas. *Matemáticas*. *Revista del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora*, *17-18*, 51–59.

Kalmykova, Z. I. (1975). Processes of analysis and synthesis in the solution of arithmetic problems. In J. Kilpatrick, I. Wirszup, E. G. Begle, and J. W. Wilson, J. (eds.), *Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics. Vol. XI. Analysis and Synthesis as Problem Solving Methods* (pp. 1–171). Stanford, CA: NCTM.

Kieran, C. (1980). The interpretation of the equal sign: Symbol for an equivalence relation vs. an operator symbol. In R. Karplus (Ed.) *Proceedings of the Fourth Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 163-169). Berkeley, California, USA: University of California.

Kieran, C., & Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias, 7*, 229-240.

Kirshner, D. (1987) *The grammar of symbolic elementary algebra*. Unpublished doctoral dissertation, University of British Columbia, Vancouver, Canada.

Kirshner, D. (1990). Acquisition of algebraic grammar. In G. Booker; P. Cobb, & C. Kieran (Eds.) *Proceedings of the Fourteenth Annual Conference for the Psycology of Mathematics Education*, Morelos, México.

Kirshner, D. (2001). The Structural Algebra Option Revisited. In R. Sutherland; T. Rojano; R. Lins; & A. Bell (Eds.) *Perspectives on School Algebra* (pp. 83-98). Dordretch, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Krutetskii, V. D. (1976). *The Psychology of Mathematical Abilities in School Children*. Chicago: The University of Chicago Press.

Matz, M. (1982). Towards a process model for high school algebra errors. In D. Seeman and J. S. Brown (eds.), *Intelligent Tutoring Systems* (pp. 25-50). New York: Academic Press.

Nassar, A. (2001). *El Efecto de Enseñar Algunas Estrategias de Resolución de Problemas en la Actuación de los Alumnos del Nivel 3º de Secundaria al Resolver*

Problemas Verbales Algebraicos en Gaza (Palestina), Tesis doctoral. Universitat de València.
Peirce, C. S. (1931-58). *Collected Papers of Charles Sanders Peirce*. Edited by Charles Hartshorne and Paul Weiss (vols. 1–6) and by Arthur Burks (vols. 7–8). Cambridge, MA: The Belknap Press of Harvard University Press.
Puig, L. (1994). *Semiótica y matemáticas.* Valencia: Episteme, col. Eutopías.
Puig, L. (2003a). Signos, textos y sistemas matemáticos de signos. En E. Filloy (Ed.) *Matemática Educativa: aspectos de la investigación actual* (pp. 174-186). México, DF: Fondo de Cultura Económica / CINVESTAV.
Puig, L. (2003b). Historia de las ideas algebraicas: componentes y preguntas de investigación desde el punto de vista de la matemática educativa. En E. Castro, P. Flores, T. Ortega, L. Rico, y A. Vallecillos (Eds.) *Investigación en Educación Matemática. Actas del Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 97-108). Granada: Universidad de Granada.
Puig, L. (2006). La resolución de problemas en la historia de las matemáticas. En Aymerich, José V. y Macario, Sergio (Eds.) *Matemáticas para el siglo XXI* (pp. 39-57) Castellón: Publicacions de la Universitat Jaume I
Puig, L. & Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares.* Madrid: Síntesis.
Puig, L. & Cerdán, F. (1990). Acerca del carácter aritmético o algebraico de los problemas verbales. En E. Filloy y T. Rojano (Eds.) *Memorias del Segundo Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática* (pp. 35-48). Cuernavaca, Morelos: PNFAPM.
Puig, L. & Rojano, T. (2004). The history of algebra in mathematics education. In K. Stacey, H. Chick, & M. Kendal (Eds.) *The future of the teaching and learning of algebra: The 12th ICMI study* (pp. 189-224). Norwood, MA: Kluwer Academic Publishers.
Radford, L. (2000). Signs and Meanings in Student's Emergent Algebraic Thinking: A Semiotic Analysis, *Educational Studies in Mathematics*, *42,* 237-268.
Radford, L. (2001) The Historical Origins of Algebraic Thinking. In R. Sutherland; T. Rojano; R. Lins; & A. Bell (Eds.) *Perspectives on School Algebra* (pp. 13-36). Dordretch, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
Radford, L., & Puig, L. (2007). Syntax and Meaning as Sensuous, Visual, Historical Forms of Algebraic Thinking. *Educational Studies in Mathematics, 66* (2), 145-164.
Rojano, T. (1994). La matemática escolar como lenguaje. Nuevas perspectivas de investigación y enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias, 12*(1), 45-56.
Thorndike, E. L. et al. (1923). *The Psychology of Algebra*. New York: The Macmillan Company

---

NOTAS

[1] La regla XIX dice textualmente: “Per hanc ratiocinandi methodum quarenda sunt tot magnitudines duobus modis differentibus expressa, quot ad difficultatem directe percurrendam terminos incognitos pro cognitis supponimus: ita enim tot comparatioes inter duo æqualia habebuntur.” (“Por este método hay que buscar tantas cantidades expresadas de dos maneras diferentes como términos desconocidos hayamos supuesto conocidos para recorrer directamente la dificultad, ya que así se tendrá el mismo número de comparaciones entre dos cosas iguales”) (Descartes, 1701, p. 66). Descartes subraya que hay que construir tantas ecuaciones como cantidades se hayan designado con letras en el primer paso del método, ya que designar una cantidad con una letra es suponerla conocida, lo que es, según él, “todo el artificio del método” porque nos permite “recorrer directamente la dificultad”, en vez de tener que razonar hacia atrás, de lo desconocido a lo conocido.

[2] En Fridman (1990) se consideran de hecho sólo grafos trinomiales, es decir, con todas las aristas con tres vértices. Sin embargo, para dar cuenta de todos los problemas aritmético-algebraicos que se plantean en la escuela primaria y secundaria, hace falta considerar otros tipos de aristas: con cuatro vértices (por ejemplo, para las relaciones de proporcionalidad), con dos vértices (por ejemplo, para la relación de igualdad entre dos cantidades) y otros (por

ejemplo, para dar cuenta de las relaciones correspondientes a las operaciones de potenciación y radicación –cf. Nassar, 2001).

[3] En Radford y Puig (2007) puede verse cómo un alumno marca en una expresión algebraica compuesta dos expresiones que se refieren a dos cantidades del problema encerrándolas entre paréntesis (pese a que no lo pide la sintaxis algebraica) y las tensiones que le produce el tener las expresiones así firmemente ligadas al mundo del problema, que le llevan a aplicar inicialmente las transformaciones algebraicas que conoce en el interior de uno de los paréntesis, para actuar sobre lo que representa a una de las cantidades del problema, y acabar aplicando las reglas sin sentido.

LOCAL THEORETICAL STUDY OF THE DEVELOPMENT OF ALGEBRAIC COMPETENCE

This paper is based on an experience of ours in which the need to interpret unanticipated phenomena observed in empirical studies on the transition toward algebraic thought conducted in the 1980s, triggered a long-term research program that in turn led to a theoretical formulation that emphasizes local analyses.

To illustrate that experience, in the first section, we briefly examine a couple of examples of dialogues that took place during clinical interviews of the study *Operating on the unknown*, in which such unanticipated phenomena appeared in translating algebraic language to natural language and vice versa. We stress the fact that in these examples when students read algebraic expressions or they are told to write them, they tend to use meanings, which come from arithmetic or from natural language.

We present the two central terms, “mathematical sign systems” (MSS) and “local theoretical models” (LTM), of our theoretical construction to deal with such phenomena, which enable us to analyse the interrelations among algebraic, arithmetic and natural languages, treating the three of them as systems of signs.

In the second section of the paper, we also briefly analyse Kirshner’s, Drouhard’s and Radford’s approaches to the analysis of algebra as a language, which uses disciplines such as linguistics, semiotics and the history of mathematical ideas. We state that, similarly, LTM’s approach incorporates elements from semiotics and history, and stress pragmatics, leading to a study of meaning in use instead of formal meaning. Hence, our notion of MSS is broad enough to consider as MSS, sign systems or sign system strata produced by students in order to give meaning to what is presented to them within a teaching model, even when said systems are governed by correspondences that have not been socially established, but that are rather idiosyncratic.

The notion of MSS plays an essential role in (locally) defining the components that make up the LTM: 1) *teaching models*; 2) *models for cognitive processes*; 3) *formal competency models*, which simulates the performance of an ideal user’s of a MMS; and 4) *communication models*, in order to describe the rules of communicative competency, text formation and decodification, and contextual and circumstantial disambiguation.

In the third section, we present some elements of the competence model of the algebraic solving of word problems, elaborated by examining in the history of mathematics some versions of the Cartesian Method, and by breaking it down into steps, which consist in:

1) the analytic reading of the statements of the problem to reduce it to a list of quantities and relations among quantities.

2) choosing a quantity (or several quantities) which one designates with a letter (or several different letters).

3) writing algebraic expressions to designate the other quantities, using the letter (or letters) introduced in the second step and the relations found in the analytic reading made in the first step.

4) writing an equation (or as many independent equations as the number of letters introduced in the second step) based on the observation that two (non-equivalent) algebraic expressions written in the third step designate the same quantity.

5) transforming the equation into a canonical form.

6) the application of the formula or the algorithm of solution to the equation in canonical form.

7) the interpretation of the result in terms of the statement of the problem.

We discuss the interrelation of different language competences (natural language competence, arithmetic and algebraic language competence) involved in these steps, which are a macroscopic description of the algebraic process of solving problems. And we present an analysis of structure of arithmetic-algebraic word problems, which aims to represent the result of the first step of the Cartesian Method, i. e., the analytical reading, on the statement of an arithmetic-algebraic problem, being then a more microscopic description of the competence in solving this type of problems.

A discussion of the kind of translation process and the kind of work on the expression level specific of the Cartesian Method leads us to the analysis of two types of production of algebraic texts, and to the differences and relations among expression and content in the statement of the problem and in the algebraic expression which results of the translation, and the algebraic expressions produced when transforming it into a canonical form.

Finally, in section four, we present fourteen facts on the component of cognitive processes of the algebraic solving of word problems: 1) on cognition, 2) on problem solving, 3) on competent use and cognitive tendencies, 4) on mastery of intermediate tactics and cognitive tendencies, 5) on syntax and memory, 6) on the problem of transference, 7) on competent use of the logical/semiotic outline, 8) on the pertinent use of certain intermediate strata, 9) on the logical/semiotic outline, and the MSS strata used as representation, 10) on the level of representation and the use of memory, 11) on the use of primitive methods and the use of memory, 12) on personal codes, 13) on problem solving and syntax, and 14) on mechanization and practice.