suma+ 61
Junio 2009, pp. 93-98

Protoálgebra en Babilonia (1ª entrega)

Hago un paréntesis en las entregas de historias de al-Khwārizmī para cambiar de época, pero no de zona geográfica. Voy a presentar un ejercicio de análisis de un problema tomado del corpus del álgebra babilónica[1], en el que haré algunas hipótesis sobre lo que sabía quien escribió el texto que se conserva, comparándolo con estructuras conceptuales, procesos de resolución de problemas y sistemas de signos que pondríamos en juego actualmente ante problemas similares que se plantean en la enseñanza[2].

El problema lo he tomado de Høyrup (2002, pp. 206-209)[3], quien lo presenta en lo que él llama una "traducción conforme"[4], que traduzco a mi vez al castellano:

> 2 gur 2 pi 5 bán de aceite he comprado
>
> De la compra de 1 shekel de plata, 4 silà, de cada (shekel), de aceite he separado.
>
> 2/3 mina de plata como beneficio he visto.
>
> ¿Con qué equivalencia he comprado y con qué equivalencia he vendido?

En el enunciado aparecen una serie de unidades metrológicas que es preciso conocer para poder comprenderlo y para poder seguir los cálculos que se presentan en la tablilla. Hay unidades de capacidad (gur, pi, bán, silà), con las que se mide la cantidad de aceite, y unidades de peso (shekel, mina), con las que se mide la cantidad de plata. Como no vamos a examinar los problemas derivados de los cambios de unidades en los sistemas metrológicos de la época, voy a reescribir el enunciado pasando todas las unidades de capacidad a silàs y las de peso a shekels. Para hacer el texto más cercano, cambiaré silàs por litros (parece ser que el silà era aproximadamente un litro) y los shekels por gramos (aunque la equivalencia no fuera ésa).

Además, el sistema de numeración en que están escritos los números que aparecen en este problema es sexadecimal. Esto no se percibe apenas en el enunciado, pero sí en los cálculos subsiguientes. De hecho, 1 mina eran 60 shekel, de manera

Luis Puig
Universitat de València Estudi General
historias@revistasuma.es

que en las unidades de peso, 1 mina equivale a 1` shekel, si escribimos los números en el sistema sexadecimal[5]. El hecho de que los números se escribieran en el sistema sexadecimal tuvo consecuencias importantes en la forma en que se hacían los cálculos de las operaciones aritméticas, en particular en el hecho de que la división se realizara siempre multiplicando por el inverso, inverso que no se calculaba sino que se consultaba en tablas de inversos (se han encontrado muchos ejemplares de tablillas que consisten simplemente en listas de inversos). Como este asunto tampoco voy a examinarlo en esta ocasión, reescribiré todos los números en el sistema de numeración decimal. Mi traducción ahora será menos "conforme", pero continuará siendo conforme en los aspectos que voy a examinar.

> 770 litros de aceite he comprado.
>
> De la compra de 1 gramo de plata, 4 litros, de cada (gramo), de aceite he separado.
>
> 40 gramos de plata como beneficio he visto.
>
> ¿Con qué equivalencia he comprado y con qué equivalencia he vendido?

El problema es una compraventa, pero la pregunta nos resulta extraña. Para entenderla, hay que tener en cuenta que el concepto de precio unitario en una operación de compraventa, que actualmente concebimos como una razón entre una cantidad de dinero y una cantidad del objeto que se intercambia (o, mejor dicho, entre las medidas correspondientes) y, por tanto, la expresamos, por ejemplo, en euros por litro (o €/l), no se concebía así en Babilonia. La idea era la inversa: no cuánto cuesta una unidad de medida de la magnitud (o la cantidad) del objeto que se intercambia, sino cuánto se obtiene en la compraventa por una unidad monetaria. Si el aceite se vendiera en el mercado de esta manera, no hablaríamos de que está a 2 euros el litro, sino de que con un euro puedo comprar medio litro de aceite. Este "precio inverso", que Høyrup prefiere llamar *rate*, tasa, se expresa por tanto en l/€, y no en €/l.

Pero el asunto aún es más diferente porque en Babilonia aún no había moneda, no había dinero en el sentido de una mercancía en la que predomina el valor de cambio sobre el valor de uso, y menos aún el actual dinero, equivalente universal, sin valor material. Sí que había un protodinero, ya que algunas mercancías con valor de uso se empleaban en las transacciones mercantiles como medio de cambio. En un primer momento, este papel parece que lo desempeñó el grano, y en la época de esta tablilla, ya la plata y otros metales. Pero ese protodinero, como mercancía con valor de uso se medía con las unidades corrientes de peso, de modo si el aceite hoy en día se vendiera de esa manera ese precio inverso o tasa se expresaría en gramos (de plata) por litro.

La circulación de mercancías, no en su forma directa, sino en el ciclo que transforma el dinero en capital, el ciclo "comprar para vender más caro", se concibe en Babilonia también de otra manera, "dar menos por la misma cantidad de plata", lo que no sólo es distinto conceptualmente, sino que también conlleva una idea distinta de qué es la riqueza. En efecto, el ciclo D–M–D[6], "comprar para vender más caro", conduce a un aumento del dinero en manos del que compra y vende, la mercancía pasa a otras manos, y en la repetición del ciclo el dinero sigue acumulándose y la mercancía circulando. El ciclo "dar menos por la misma cantidad de plata" no conduce exactamente a aumentar la cantidad de plata, sino que se ve tanto desde el punto de vista de tener más plata, como desde el punto de vista de la mercancía equivalente a esa plata de más que obtiene, y en la repetición del ciclo se acumula mercancía. El beneficio no se concibe sólo como la plata que se consigue, sino como la mercancía que equivale a esa plata de más.

Tablilla protoelamita

Ese "dar menos mercancía por la misma cantidad de plata" como núcleo del ciclo nos permite dar sentido a la segunda frase del enunciado, "De la compra de 1 gramo de plata, 4 litros, de cada (gramo), de aceite he separado". Ahí se está indicando que en la venta se dan 4 litros de aceite menos por cada gramo de plata, de los litros de aceite por gramo de plata que se han obtenido en la compra: la relación entre cantidades que se expresa es una relación entre la tasa de compra, la tasa de venta y una tercera cantidad que es el beneficio en litros de aceite que se obtiene por cada gramo de plata. Ese beneficio unitario no está expresado, como lo hacemos actualmente en euros por litro, sino, inversamente, en litros por gramo (de plata).

La tercera frase del enunciado sí que expresa el beneficio, en este caso el beneficio total, en plata, similarmente a como actualmente lo expresaríamos en dinero. Veremos, sin embargo, que la resolución del problema no termina con la obtención de lo que el enunciado pregunta, sino que después de obtenerlo aún se calcula ese beneficio total en litros de aceite.

También podemos darle sentido a la pregunta del problema a partir del conocimiento de estas prácticas comerciales. Si en las compraventas en la época que nos ocupa no existía el precio unitario en el sentido en que lo concebimos y lo usamos actualmente, sino ese "precio inverso", que vamos a llamar tasa siguiendo a Høyrup, la frase final del enunciado pregunta por las tasas de compra y de venta[7].

Reescribo el enunciado ya no en una traducción conforme, sino en una versión más libre, pero que describe una situación similar y mantiene implícitamente las mismas cantidades y relaciones.

> Un comerciante compra 770 litros de aceite.
>
> Los vende dando 4 litros menos de los que ha recibido en la compra, por cada gramo de plata.
>
> Obtiene un beneficio de 40 gramos de plata.
>
> Averiguar a cuántos litros por gramo de plata compró el aceite y a cuántos litros por gramo de plata lo vendió.

La inversión del concepto de precio conduce pues a que las relaciones entre las cantidades de la estructura conceptual de una compra para vender sean distintas de las que son usuales para nosotros y complique la comprensión por nuestra parte del enunciado de este problema y de las operaciones que están indicadas en la tablilla que hay que hacer para resolverlo. Pero además, hacen el problema más difícil, en el sentido de que la red de cantidades y relaciones presentes en el problema tiene una estructura que hace más difícil su resolución. Veámoslo.

Las cantidades presentes en una situación similar, pero según nuestra manera de concebirla, son las siguientes:

cantidad comprada y vendida: m (€),
precio unitario de compra: p_c (€/l)
precio unitario de venta: p_v (€/l)
importe de la compra: i_c (€)
importe de la venta: i_v (€)
beneficio total expresado en dinero: b_{td} (€)
beneficio unitario expresado en dinero: b_{ud} (€/l).

Y las relaciones entre esas cantidades son:

$$i_c = p_c \times m$$

$$i_v = p_v \times m$$

$$b_{td} = i_v - i_c$$

$$b_{ud} = p_v - p_c$$

Estas cantidades y estas relaciones podemos representarlas entrelazadas mediante un grafo[8], que muestra la estructura de la red de relaciones entre cantidades que hemos determinado que son las propias de nuestra manera de concebir esa estructura conceptual, como se muestra en la figura 1.

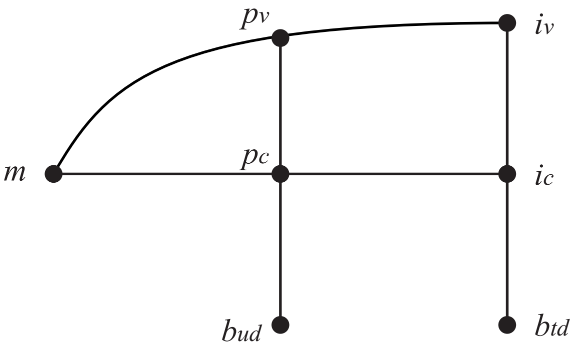

Figura 1

Ahora bien, gracias a que

$$b_{td} = i_v - i_c$$

e

$$i_c = p_c \times m$$

$$i_v = p_v \times m$$

podemos derivar

$$b_{td} = p_v \times m - p_c \times m = (p_v - p_c) \times m$$

y, gracias a

$$b_{ud} = p_v - p_c$$

obtenemos la relación

$$b_{td} = b_{ud} \times m$$

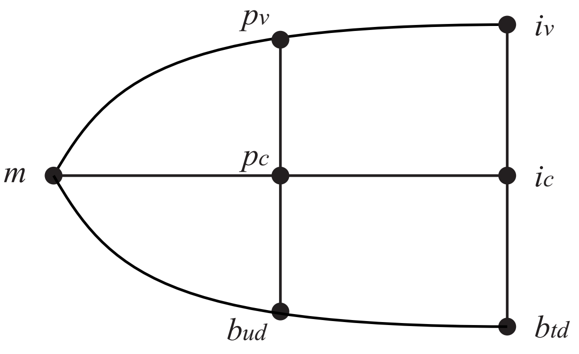

Figura 2

con la que podemos cerrar la red de relaciones del grafo con una nueva relación (ver figura 2) representada por el arco (m, b_{ud}, b_{td}), y observar que las tres relaciones, que en el grafo están representadas con la cantidad m en el vértice común, responden a las relaciones de proporcionalidad

$$\frac{b_{td}}{b_{ud}} = \frac{i_v}{p_v} = \frac{i_c}{p_c} (= m)$$

Ahora bien, en la situación de comprar para vender más caro correspondiente al problema babilónico, las cantidades que aparecen no son las mismas, ya que no están los precios unitarios sino las tasas de compra y de venta, y además el beneficio unitario que aparece no es el beneficio en dinero por unidad de mercancía, sino el beneficio en mercancía por unidad de plata (protodinero):

cantidad comprada y vendida: m (l),
tasa de compra: t_c (l/gr),
tasa de venta: t_v (l/gr),
importe de la compra: i_c (gr),
importe de la venta: i_v (gr),
beneficio total expresado en plata (protodinero): b_{td} (gr),
beneficio unitario expresado en mercancía por unidad de plata: b_{um} (l/gr).

Las tasas, como ya hemos visto, son inversas de los precios unitarios, y el beneficio unitario que aquí aparece es la diferencia entre las tasas, pero restadas en orden inverso a como se restan los precios unitarios para obtener el beneficio unitario. Todo ello conduce a que la mayor parte de las relaciones entre las cantidades sean inversas de las anteriores:

$$i_c = \frac{m}{t_c} \text{ o } i_c \times t_c = m$$

$$i_v = \frac{m}{t_v} \text{ o } i_v \times t_v = m$$

$$b_{td} = i_v - i_c$$

$$b_{um} = t_c - t_v$$

Y el beneficio total en plata ya no tiene una expresión simple en términos del beneficio en mercancía por unidad de plata, ya que de las relaciones anteriores se sigue

$$b_{td} = i_v - i_c = \frac{m}{t_v} - \frac{m}{t_c} = \frac{t_c - t_v}{t_v t_c} \times m$$

de donde

$$\frac{b_{td}}{b_{um}} = \frac{m}{t_v t_c}$$

Y, como los importes de la compra y la venta están relacionados con las tasas de compra y venta ahora por una proporcionalidad inversa en vez de por una proporcionalidad directa,

$i_c \times t_c = i_v \times t_v = m$,

entonces

$$\frac{b_{td}}{b_{um}} = \frac{i_c t_c}{t_v t_c} = \frac{i_v t_v}{t_v t_c}$$

y, en definitiva, las relaciones de proporcionalidad que existen son

$$\frac{b_{td}}{b_{um}} = \frac{i_c}{t_v} = \frac{i_v}{t_c},$$

a las que no es posible darles sentido en el contexto del enunciado del problema.

Por ello, la red de relaciones entre cantidades que tienen sentido en el contexto del problema se reduce a una red de relaciones similar a la primera de las dos que hemos representado antes, que además tiene casi todas las relaciones invertidas en algún sentido. (Ver figura 3, en la que he diferenciado las cantidades conocidas de las desconocidas, señalando éstas con cuadrados en blanco y aquéllas con puntos negros.)

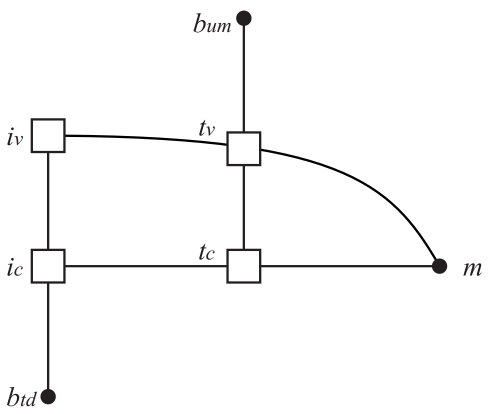

Figura 3

Con el sistema de signos del álgebra actual no hemos tenido, sin embargo, ningún problema para representar esas relaciones que carecen de sentido en el contexto del problema. Y no sólo para representarlas, sino también para encontrarlas, ya que podemos operar en el nivel de la expresión sin necesidad de recurrir continuamente al significado que esas cantidades y relaciones tienen en el contexto del problema, sino recurriendo sólo al significado que tienen en el contexto, más abstracto, aritmético-algebraico.

Los matemáticos babilónicos no disponían de un sistema de signos como el del álgebra actual, pero sí que disponían de otro sistema de signos al que traducir las enunciados de los problemas como éste para resolverlos, y en el que podían calcular sin recurrir a los significados del contexto del problema, sino usando los significados de ese otro sistema de signos, es decir, disponían de un sistema de signos protoalgebraico.

En Puig (2006)[9] presenté un esbozo del uso de ese sistema de signos en la resolución de problemas. Veamos ahora cómo aparece la solución del problema en la tablilla babilónica, siguiendo la traducción conforme de Høyrup (2002, pp. 207-208), traducida más o menos de forma conforme al español, eliminando las unidades babilónicas, pero sin pasar los números al sistema decimal.

> Tú coloca 4 litros de aceite y coloca el beneficio 40 gramos.
>
> Inverso de 40, 1´30´´, ves[10].
>
> 1´30´´ por 4 multiplica, 6´, ves.
>
> 6´ por 12`50, el aceite, multiplica, 1`17, ves.
>
> ½ de 4 rompe, 2, ves.
>
> 2 cuadra, 4, ves.
>
> 4 a 1`17 añade, 1`21, ves.
>
> ¿Cuál es el lado igual? 9 es el lado igual.
>
> 9 el equivalente coloca.
>
> ½ de 4, que has separado, rompe, 2, ves.
>
> 2 al primer 9 añade, 11, ves.
>
> Del segundo quítalo, 7, ves.
>
> 11 litros cada gramo has comprado, 7 litros cada gramo has vendido.

¿Plata equivalente a qué? ¿Qué a 11 litros [por gramo] puedo poner que 12`50 de aceite me dé?

1´10 coloco 1´10 gramos de plata.

¿Por 7 litros cada gramo de plata que vendes de aceite, los 40 gramos de plata a qué equivalen?

40 por 7 multiplica. 4`40, ves, 4`40 de aceite.

En la próxima entrega de estas historias contaré cómo le doy sentido a esta solución, mientras tanto queda como ejercicio para el lector[11].

HISTORIAS ■

NOTAS

1 La mejor referencia en estos momentos para el estudio del álgebra en la época babilónica es el libro reciente de Jens Høyrup *Lenths, Widths, Surfaces. A Portrait of Old Babylonian Algebra and Its Kin* (Høyrup, 2002), en el que Høyrup recoge y sistematiza sus investigaciones e interpretaciones desarrolladas a lo largo de más de veinte años. Gran parte de los textos que están recogidos y sistematizados en este libro están en su página web http://akira.ruc.dk/~jensh/, en versiones más cuidadas y con menos erratas que las publicadas. Una breve introducción al conjunto de las matemáticas babilónicas, escrita con humor por uno de los que analizaron las tablillas por primera vez a comienzos del siglo veinte, está contenida en el libro de Otto Neugebauer *The Exact Sciences in Antiquity*, del que hay una reedición accesible y económica en la editorial Dover (Neugebauer, 1969), reedición de la segunda edición que se publicó originalmente en Brown University Press en 1957. En esta misma revista apareció un artículo dedicado al asunto hace tres números (Illana, 2008), que también proporciona un panorama del conjunto de las matemáticas babilónicas.

2 El análisis está hecho, por tanto, más desde el punto de vista de la didáctica de las matemáticas que desde el punto de vista de un historiador de las matemáticas. De hecho, este análisis lo he propuesto como ejercicio a los alumnos del curso "Episodios de la historia de las matemáticas" del programa de doctorado de Didáctica de las Matemáticas de la Universitat de València.

3 El problema aparece en la tablilla TMS XIII. Las siglas TMS significan "Textos Matemáticos de Susa", lo que indica que procede de esa zona del actual Irán. Høyrup (2002, p. 206 y n. 234) indica que hay otras tablillas con el mismo problema que proceden del núcleo central del territorio de Babilonia. Ver también en Høyrup (2002, n. 233) las fuentes de la copia a mano en papel y la transliteración de la tablilla que ha utilizado.

4 En la página 41 y ss de Høyrup (2002) explica cómo está hecha esa traducción conforme intentando establecer una correspondencia con la estructura del texto original, a costa de forzar el idioma al que se traduce, con el fin de que se pueda hacer una lectura en ese idioma muy pegada al texto original. Desde mi punto de vista, sólo una traducción de este estilo permite hacer hipótesis sobre los conceptos, procesos y sistemas de signos que están en uso en el texto en cuestión.

5 Høyrup representa los números en el sistema sexadecimal indicando mediante el signo ` la posición 60, `` la posición 60^2, etc. y mediante el signo ´ la posición 60^{-1}, ´´ la posición 60^{-2}, etc., de modo que, por ejemplo 70'5 lo escribe 1` 10 30´.

6 Así designa al ciclo "Dinero–Mercancía–Dinero" Karl Marx en la Sección segunda del Libro Primero de *El Capital*, en que analiza la transformación del dinero en capital. En los ciclos del capital especulativo de nuestros días la M prácticamente ha desaparecido y la D es un signo sin referente en mercancía alguna. Algo de esto ya apuntaba el propio Marx en el Libro Tercero de *El Capital*.

7 Como bien señala Høyrup la dificultad de la traducción de un texto como éste escrito en un lenguaje tan distinto del inglés o el español reside en que no sólo es diferente el sistema de signos sino el juego de lenguaje, en el sentido wittgensteiniano del término, es decir, "el complejo irreducible de prácticas extralingüísticas, conceptos y uso" (Høyrup, 2002, p. 40). Nuestra lectura también tiene que lidiar con esa diferencia entre juegos de lenguaje para que el sentido que le demos al texto sea afortunado.

8 En Filloy, Rojano and Puig (2008) o en Filoy, Puig y Rojano (2008) describo el uso de esos grafos para la representación de la red de relaciones entre cantidades, que se obtienen al analizar el texto del problema con el fin de traducirlo al sistema de signos del álgebra.

9 En mi página web, http://www.uv.es/puigl/textos.htm, hay una versión en pdf de ese texto, que no tiene las erratas y defectos que aparecieron al pasar el texto que envié en formato electrónico a la imprenta.

10 Este "ves" se repite continuamente. Podemos imaginar que la tablilla recoge los pasos de la solución del problema, y que las acciones correspondientes se estaban haciendo dibujando en el suelo. "Ves" señala, es como si se indicara que se vea lo que está resultando de las acciones: "ves que resulta 1´30´´". Podría haber hecho una traducción menos conforme y haber escrito: "resulta 1´30´´", pero se habría perdido la huella de las acciones que probablemente acompañaban a lo recogido en la tablilla.

11 Ejercicio que quien quiera puede enviar a historias@revistasuma.es

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

FILLOY, E., ROJANO, T., AND PUIG, L. (2008). *Educational Algebra. A Theoretical and Empirical Approach*. New York: Springer.

FILLOY, E., PUIG, L., & ROJANO, T. (2008). El estudio teórico local del desarrollo de competencias algebraicas. *Enseñanza de las Ciencias*, *26*(3), pp. 327-342.

HØYRUP, J. (2002). *Lengths, Widths, Surfaces. A Portrait of Old Babylonian Algebra and Its Kin*. New York: Springer Verlag.

ILLANA, JOSÉ C. (2008). Matemáticas y astronomía en Mesopotamia, *Suma 58*, 49-61.

MARX, K. (1964). *El capital*. Traducción española de Wenceslao Roces. Tercera edición. México, Buenos Aires: Fondo de Cultura Económica.

NEUGEBAUER, O. (1969). *The Exact Sciences in Antiquity*. Second Edition. New York: Dover.

PUIG, L. (2006). La resolución de problemas en la historia de las matemáticas. En Aymerich, José V. y Macario, Sergio (Eds.) *Matemáticas para el siglo XXI* (pp. 39-57) Castellón: Publicacions de la Universitat Jaume I.