suma+ 66
Febrero 2011, pp. 89-100

Historias de al-Khwārizmī (5ª entrega). La cosa

Cosa en el lenguaje natural

En el apartado 11 “Variables en el lenguaje vernáculo” del capítulo 16 de su *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas*, dedicado al análisis fenomenológico del lenguaje del álgebra, Hans Freudenthal cuenta la siguiente historia de su hija:

> Cuando mi hija estaba en la edad en que los niños juegan el juego de “esto qué quiere decir” y le pregunté qué quiere decir “cosa” contestó que cosa es si quieres decir algo y no sabes cuál es su nombre. (Freudenthal, 1983, p. 474)[1]

A menudo las matemáticas han elaborado sus conceptos a partir de la riqueza inmensa de la lengua vernácula, fijando el uso de alguno de sus términos en un sentido preciso, determinado, unívoco. El proyecto algebraico necesita poder calcular con lo desconocido. Ya vimos en la entrega anterior de estas historias (Puig, 2010) que la elaboración del concepto de especie de número hace posible referirse a los cálculos con cantidades que se desconocen por el intermedio de las especies, que son “formas de números”. Pero las especies de números, raíz, tesoro o simple número, son sólo esas formas que los números adoptan cuando se calcula con ellos. Cuando se trata de resolver un problema, también hace falta poder referirse directamente a números concretos que son desconocidos, no basta con decir si son de la especie raíz, o de la especie tesoro o de la especie simple número. Pero esos números son desconocidos, no sabemos cuál es su nombre, y, como dijo la hija de Freudenthal, “cosa” sirve para nombrar algo cuyo nombre se desconoce.

No sabemos quién ni cuándo usó por primera vez la palabra “cosa” para referirse a un número desconocido y así poder darle nombre. Lo que sí sabemos es que el libro de álgebra de al-Khwārizmī es el más antiguo que se conserva en el que la palabra aparece usada así. En el fragmento que queda del libro, casi contemporáneo, de Ibn Turk[2] (Sayili, 1962) la palabra “cosa” no aparece, aunque eso no significa que no pudiera estar también en este libro, ya que la pequeña parte que se ha conservado de él corresponde a las demostraciones de los algoritmos de solución de las formas canónicas compuestas, y al-Khwārizmī tampoco usa el término “cosa” en esa parte de su libro de álgebra.

Luis Puig
Universitat de València Estudi General

Es bastante plausible que el uso de la palabra "cosa" como término técnico para nombrar una cantidad desconocida con la que se quiere calcular, proceda de una tradición distinta de la tradición de la que proceden los términos con los que al-Khwārizmī designa las especies de números[3]. Venga de donde venga, la primera vez que aparece, lo hace en árabe, *shay'*, y será a partir de esa palabra árabe de la que pasará al latín como *res*, cuando se traduzca el libro de al-Khwārizmī al latín en el siglo XII. Luego aparecerá como "cosa" a principios del siglo XIV en el primer libro escrito en una lengua romance, el *Tractatus algorismi* de Jacopo da Firenze, y el término "cosa" hará tanta fortuna, que la "Regla de la cosa" acabará siendo otro nombre del álgebra.

Como la observación de la hija de Freudenthal muestra, no es de extrañar que una palabra como "cosa" se use para designar lo desconocido, y la palabra árabe *shay'*, según Rashed, es una palabra que pertenece al árabe clásico ya que aparece en el Corán, y

> se dice de todo cuerpo animado o inanimado, de todo lo que puede ser sujeto de atribución, sin ser, sin embargo, representado necesariamente por individuos [...] Designando un desconocido, la palabra necesita siempre una determinación o una explicación. Si por ejemplo se dice: "yo tengo una cosa", la afirmación no puede entenderse sin un comentario suplementario. (Rashed, 1984, p. 122).

El mismo Rashed nos dice que los gramáticos de la época de al-Khwārizmī decían que la palabra *shay'* era "lo más indefinido de los indefinidos" y que

> en teología, el término remite a una existencia cierta, pero de la que nuestro conocimiento todavía está indeterminado. Por ejemplo, se atribuye al lingüista al-Khalil en el siglo VIII esta expresión a propósito de Dios: "Es una cosa de una cosa, no cosa de no cosa, cosa de no cosa, no cosa de una cosa", que se conjuga también como una tabla de verdad. Se entiende que al-Khwārizmī haya elegido este término para bautizar la incógnita algebraica[4] (Rashed, 2007, p. 15).

هو شيء شيء، ولا شيء لاشيء، وشيء لاشيء، ولاشيء شيء

La fórmula "es una cosa de una cosa, no cosa de no cosa, cosa de no cosa, no cosa de una cosa", escrita en árabe

La cosa en el lenguaje del álgebra de al-Khwārizmī

La primera vez que aparece la palabra "cosa" con significado técnico en el libro de al-Khwārizmī es en el primero de los capítulos dedicados al cálculo literal, el que se titula "sobre la multiplicación". En él al-Khwārizmī comienza anunciando lo que va a hacer en ese capítulo y el siguiente:

> Yo te enseño cómo multiplicar unas por otras las cosas, que son las raíces; si están solas, si están con un número, si están disminuidas en un número o si están restadas de un número; y cómo sumarlas unas a otras y cómo restarlas unas de otras (Rashed, 2007, p. 122-123; Hughes, 1986, p. 241).

Sin embargo, no es en esta parte del libro de al-Khwārizmī donde puede verse por qué hace falta que al-Khwārizmī nos enseñe a "multiplicar unas por otras las cosas", menos aún por qué aparece ese nuevo término "cosa", del que al-Khwārizmī lo único que dice al introducirlo es "que son las raíces". Si "cosa" y "raíz" fueran la misma cosa, hubiera sido innecesario que apareciera la cosa en escena; podría al-Khwārizmī haber explicado en este capítulo "cómo multiplicar unas por otras las raíces" y ahorrarse un término primitivo, un concepto del cálculo de al-jabr y al-muqābala. Si al-Khwārizmī explica el cálculo con la cosa y no el cálculo con la raíz, es porque cosa y raíz no son conceptualmente iguales, aunque al mencionar por primera vez el término, al-Khwārizmī se limite a explicarlo diciendo "que son las raíces", o incluso, unas líneas más adelante diciendo "el significado de la cosa es la raíz" (Rashed, 2007, p. 124-125; Hughes, 1986, p. 242)

El significado de la cosa en el texto de al-Khwārizmī está en su uso (ésa es la definición pragmática de significado de Wittgenstein), más que en esa definición. Al-Khwārizmī no usa nunca "cosa" cuando introduce las especies de números que se usan en los cálculos: ahí usa "raíz". Las especies de números son raíz, tesoro y simples números. La raíz es raíz del tesoro, y el tesoro proviene de una raíz que se ha multiplicado por sí misma, el tesoro no es una cosa que se ha multiplicado por sí misma. Al-Khwārizmī no usa nunca "cosa" cuando establece las seis formas canónicas, ni cuando expone los algoritmos de solución de las formas canónicas, ni cuando expone las demostraciones de esos algoritmos. En las formas canónicas, al-Khwārizmī siempre usa raíz y tesoro, por ejemplo "tesoro y raíces igual a números", nunca dice al-Khwārizmī "tesoro y cosas igual a números".

En esto, sus sucesores inmediatos le son fieles. En el álgebra de Abū Kāmil (ca. 850-930) tampoco aparece la cosa en las formas canónicas, ni en los algoritmos, ni en las demostraciones. Más aún, en la lista de veinticinco formas canónicas de las ecuaciones hasta el tercer grado que ^{c}Umar al-Khayyām (1048-1131) estudia unos dos siglos más tarde en su *Tratado de álgebra y al-muqābala* (Rashed y Vahebzadeh, 1999) tampoco aparece la cosa, sino las especies cubos, tesoros, raíces y simples números[5].

Al-Khwārizmī introduce el término cosa en el capítulo dedicado al cálculo literal, pero donde al-Khwārizmī lo usa continuamente y cobra sentido es en los capítulos dedicados a resolver problemas. En efecto, al-Khwārizmī comienza la resolución de cualquier problema llamando a alguna de las cantidades desconocidas "cosa". Así, por ejemplo, el primer problema que al-Khwārizmī plantea para estudiar las seis formas canónicas es

> Es por ejemplo cuando dices: has dividido diez en dos partes; has multiplicado una de las dos partes por la otra; luego has multiplicado una por sí misma, de manera que la multiplicada por sí misma es igual al cuádruple del producto de una de las dos partes por la otra. (Rashed, 2007, p. 144-145; Hughes, 1986, p. 247)

y la solución, la regla para resolver problemas, comienza llamando "cosa" a una de las dos partes en que se ha dividido diez:

> tú pones una de las dos partes una cosa y la otra diez menos una cosa; multiplica una cosa por diez menos una cosa, y resulta diez cosas menos un tesoro (Rashed, 2007, p. 144-145; Hughes, 1986, p. 247).

Como esa cosa se multiplica por sí misma, es una raíz y el producto por sí misma es un tesoro. De esta manera, al-Khwārizmī traduce el enunciado del problema al lenguaje de su álgebra, que no tiene signos distintos de los del lenguaje vernáculo, pero sí un vocabulario propio y preciso. La palabra del lenguaje vernáculo "cosa", convertida en nombre de lo desconocido, permite desarrollar un cálculo con lo desconocido, y que la resolución de los problemas se desarrolle por la vía del análisis. En el libro de álgebra de al-Khwārizmī, la palabra "cosa" aparece arrebatada al lenguaje vernáculo para ser apropiada por el lenguaje del álgebra.

En efecto, si pensamos que el corazón de la resolución algebraica de problemas se puede decir que es esa lectura del enunciado del problema, que está en lenguaje vernáculo, para transformarlo en un nuevo texto que está en el lenguaje del álgebra, una de las señales en el texto de al-Khwārizmī de que se está pasando de un lenguaje a otro es que la palabra "cosa" nunca aparece en los enunciados de los problemas, donde aparece es en las soluciones.

Hay una excepción, que en realidad no lo es: el problema 28 (en la numeración de Rashed, 2007). En el enunciado de ese problema sí que aparece la palabra "cosa". Sin embargo, en la solución del problema, la cantidad que al-Khwārizmī designa con "cosa" no es la que en el enunciado ha sido llamada "cosa", sino otra cantidad desconocida. De hecho, la cantidad desconocida que en el enunciado se llama "cosa" no es necesaria para resolver el problema, el problema tiene la misma solución, valga esa cantidad lo que valga. El enunciado del problema es

> Si te dicen: repartes un dirham entre unos hombres y les toca una cosa; les añades un hombre, y repartes entre ellos un dirham, entonces les toca un sexto de dirham de menos que en el primer reparto (Rashed, 2007, p. 190-191; Hughes, 1986, p. 255)

y al-Khwārizmī llama "cosa" al número de hombres que había al principio, y calcula con esa cosa. La cantidad que en el enunciado se ha dicho que era una cosa no aparece para nada en la solución del problema, con lo que "cosa" en el transcurso de la solución es el nombre propio de la cantidad desconocida "número de hombres que había al principio", sin que quepa ambigüedad alguna sobre ello. En el lenguaje del álgebra de al-Khwārizmī "cosa" es un nombre común, cuyo significado tiene que ver con el hecho de que la cantidad que nombra es una cantidad determinada, pero cuyo valor se desconoce. De hecho, la mayor parte de las veces el término algebraico "cosa" aparece sin artículo, "cosa", o de forma indeterminada, "una cosa", y muy pocas veces con el artículo determinado, "la cosa".

En resumen, al-Khwārizmī *nunca* usa el término "cosa" en las primeras partes del libro en las que trata:

1. Introducción.
2. Las especies de números.
3. Las (seis) formas canónicas, simples y compuestas.
4. Los algoritmos de solución de las formas canónicas.
5. Las demostraciones de los algoritmos de solución de las formas canónicas compuestas.

Al-Khwārizmī introduce el término "cosa" en el primer capítulo dedicado al cálculo literal:

6. Sobre la multiplicación [de expresiones con especies].

Al-Khwārizmī *nunca* utiliza el término "cosa" en los otros dos capítulos dedicados al cálculo literal:

7. Sobre la adición y la substracción [de expresiones con especies y con radicales].
8. Sobre la división [de radicales].

Al-Khwārizmī usa sistemáticamente el término "cosa" en los capítulos dedicados a enseñar a resolver problemas algebraicos de segundo grado:

9. Los seis problemas [ejemplos de las seis formas canónicas].
10. Varios problemas.

Los cuatro capítulos restantes son especiales y no entraré a describir aquí cómo usa al-Khwārizmī el término "cosa" en ellos. Sólo diré que en el corto capítulo titulado "Transacciones mercantiles" no usa el término "cosa". Esto se debe a que el capítulo está dedicado a una clase de problemas en los que siempre están implicadas cuatro cantidades que tienen nombre. Al-Khwārizmī comienza el capítulo diciendo "Que sepas que todas las transacciones entre las gentes, de venta, compra […] se realizan […] según cuatro nombres pronunciados por el que pregunta, que son cantidad de evaluación, tasa, precio y cantidad evaluada" (Rashed, 2007, p. 196-

197; Hughes, 1986, p. 255[6]). Esas cuatro cantidades forman una proporción, y los problemas son problemas de hallar la cuarta proporcional dados los otros tres términos de la proporción. Al-Khwārizmī no usa el término "cosa" porque no necesita darle nombre a la cantidad desconocida, ya tiene nombre para referirse a ella, y los cálculos para resolver los problemas son los que establece la regla de tres, en los que no se calcula con lo desconocido.

La cosa y la raíz

He señalado que "cosa" y "raíz" son términos con significado distinto, que probablemente provienen de tradiciones anteriores a al-Khwārizmī distintas, y que él identifica, pero usa de manera diferenciada. Esa situación no podía dejar de causar dificultades, y la historia lo atestigua. El historiador tunecino Mohamed Souissi así lo afirma en uno de los capítulos de su libro *Feuilles d'automne* en que, ya jubilado quince años antes, repasa su trabajo. Trata ese capítulo del poema didáctico de Ibn al-Yāsamīn, del que hablaré más adelante, y Souissi cita un comentario a ese poema hecho en el año 1506 por un tal al-Māridini que

> señala una polémica que se había desatado en torno al uso de las dos palabras *shay'* (cosa, res) y *jidhr*[7] (raíz). Para ciertos algebristas son dos términos sinónimos. Otros, como Ibn al-Hā'im, piensan que es necesario reservar la palabra *shay'* para el número desconocido, y restringir *jidhr* al número conocido. Ibn al-Yāsamīn, así como su comentarista, optan por el primer punto de vista y se refieren a una cita de Abū Kāmil Shujā[c] ibn Aslam, en su obra *Al-Mabsūt fī-l-jabr wa-l-muqābala*: "La *shay'* no es sino la *jidhr*, y la *jidhr* no significa más que la *shay'*; son dos nombres que sirven, uno y otro, para expresar la misma noción". (Souissi, 2001, p. 120).

Rastraeré indicaciones del uso de cosa y raíz en algunos textos y autores posteriores a al-Khwārizmī en este apartado.

Abū Kāmil (ca. 850-930)

En el siglo XVI andaban pues los algebristas discutiendo sobre el uso de cosa y raíz, y quien mantenía que eran términos sinónimos usaba como autoridad las palabras de Abū Kāmil, conocido en su tiempo como el calculista egipcio, que nace cuando muere al-Khwārizmī. Sin embargo, si se recorre el libro de álgebra de Abū Kāmil[8], aunque afirme que cosa y raíz son lo mismo, igual que ya lo había hecho al-Khwārizmī, el uso que hace de los dos términos en su libro es prácticamente el mismo que el que hace al-Khwārizmī: no lo usa en los capítulos iniciales, lo introduce cuando comienza el cálculo literal, y lo usa en la resolución de problemas de forma similar a al-Khwārizmī.

[c]Umar al-Khayyām (1048-1131)

El caso del persa [c]Umar al-Khayyām es más interesante. La palabra "cosa" sólo aparece una vez en todo su libro de álgebra, muy al comienzo, cuando dice:

> Es la costumbre, entre los algebristas, nombrar en su arte la incógnita que se quiere determinar "cosa", su producto por sí misma, tesoro, su producto por su tesoro, cubo, el producto de su tesoro por su semejante, tesoro tesoro, el producto de su cubo por su tesoro, tesoro cubo, el producto de su cubo por su semejante, cubo cubo, y así sucesivamente hasta tan lejos como se quiera. Se sabe a partir del libro de los *Elementos* de Euclides que esos grados son todos proporcionales, quiero decir que la razón de la unidad a la raíz es igual a la razón de la raíz al tesoro y es igual a la razón del tesoro al cubo. La razón del número a las raíces es por tanto igual a la razón de las raíces a los tesoros, igual a la razón de los tesoros a los cubos, e igual a la razón de los cubos a los tesoro tesoro, y esto hasta tan lejos como se quiera (Rashed and Vahebzadeh, 1999, pp. 120-122).

En esa frase, "cosa" aparece como un término propio del lenguaje del álgebra ("es la costumbre, entre los algebristas") que se usa para designar la "incógnita que se quiere determinar". Al-Khayyām está pues dando a "cosa" el sentido en que hemos visto que al-Khwārizmī usa el término, pero, de inmediato, lo usa para generar las especies de número bastante más allá del tesoro, que es donde se queda al-Khwārizmī, mezclando pues el sentido en que al-Khwārizmī usa raíz.

Podría parecer que la raíz ya no va a ser para al-Khayyām un término necesario porque la ha substituido por la cosa en la lista de especies de número, pero, muy al contrario, cuando explica que "se sabe a partir del libro de los *Elementos* de Euclides que esos grados son todos proporcionales", la cosa desaparece y ya sólo habla de la raíz. Mucho más significativo aún es que la término "cosa" no vuelve a aparecer en todo el libro. Esto se debe claramente a que al-Khayyām no resuelve ni un solo problema en todo el libro; a lo que el libro está dedicado es a encontrar algoritmos de solución para las veinticinco formas canónicas, que son todas las posibilidades de combinar las especies números, raíces, tesoros y cubos, y, para las que no consigue encontrar un algoritmo, encontrar su solución geométrica mediante la intersección de cónicas. Las formas canónicas están enunciadas en términos de números, raíces, tesoros y cubos, nunca aparece el término "cosa" al enunciarlas, y nunca se usa el término "cosa" en las soluciones de las ecuaciones.

Sharaf al-Dīn al-Tūsī (1135-1213)

El libro fundamental que se conserva del persa al-Tūsī (nacido en el ciudad de Tūs) es su *Tratado de las ecuaciones* (Al-Tūsī, 1986). En él al-Tūsī aborda la resolución de las veinticinco formas canónicas de las ecuaciones de tercer grado, como lo había hecho al-Khayyām, pero, a diferencia de éste, lo que hace es desarrollar métodos aproximados para la resolución de las formas canónicas para las que no se había encontrado en la época ningún algoritmo de solución.

En su libro, el término "cosa" tampoco aparece cuando presenta las veinticinco formas canónicas, que están enunciadas en términos de números, raíces, tesoros y cubos:

> De la formación de las ecuaciones entre los números, las raíces, los tesoros y los cubos se engendran veinticinco problemas que son: una raíz igual a un número, un tesoro igual a un número [...] (Al-Tūsī, 1986, p. 16).

El término "cosa" tampoco aparece en los algoritmos, ni en las demostraciones de éstos, ni en los cálculos aproximados de las soluciones de las ecuaciones. Como además el libro sólo trata de la resolución de ecuaciones y no de la resolución de problemas de enunciado verbal, no hay lugar a que se use el término "cosa" para nombrar alguna cantidad desconocida y así traducir el enunciado del problema al lenguaje del álgebra.

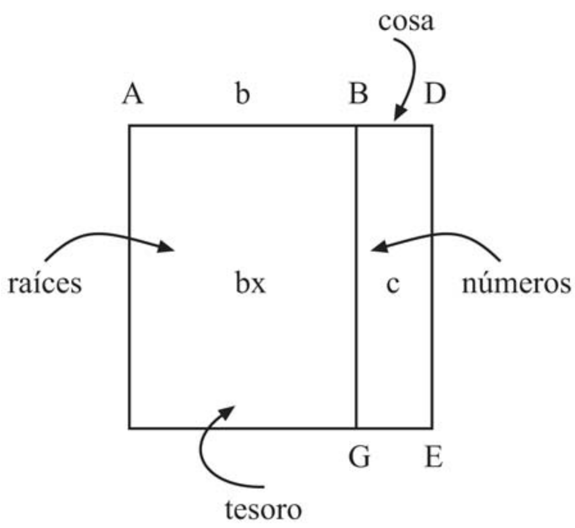

Figura 1

Sin embargo, el término "cosa" tiene una única aparición en todo el libro cuando al-Tūsī demuestra que la forma canónica tesoro igual a raíces y números se puede resolver transformándola en la forma canónica tesoro y raíces igual a números, para la que ya ha dado previamente un algoritmo de solución.

Veamos qué es lo que hace al-Tūsī exactamente. Se trata de resolver la ecuación "raíces y números igual a tesoros", que, en el lenguaje del álgebra simbólica actual, podemos escribir $x^2 = bx + c$. Al-Tūsī comienza demostrando que es posible tener efectivamente un tesoro que sea la suma de raíces y números. La demostración utiliza una figura similar a la que al-Khwārizmī usa para demostrar el algoritmo de esta forma canónica, pero al-Tūsī no ha dado ningún algoritmo y no está por tanto demostrando algoritmo alguno sino sólo la posibilidad de existencia de esa forma canónica. Tras hacer esto, continúa diciendo:

> Para determinar la raíz, sea *AE* el cuadrado [*muraba*ᶜ][9] de *AD*. Tracemos *BG* paralela a *DE* y pongamos *DB* una cosa, es decir, la raíz de un tesoro desconocido, y *AB* el número de raíces mencionado en el problema. (al-Tūsī, 1986, p. 31)

Al-Tūsī quiere determinar la raíz, que es lo que hemos representado por x en nuestro lenguaje algebraico en $x^2 = bx + c$, y designa con el nombre de "cosa" no a la raíz que tiene que determinar, sino a otra "raíz de un tesoro desconocido". En la figura, la raíz que hay que determinar es el lado del cuadrado *AE*, es decir, *AD*, la cosa es el segmento *DB*, de manera que como dice al-Tūsī

> *AD* es, por tanto, el número de raíces y una cosa.

es decir que la raíz que hay que determinar es el número de raíces más una cosa. La cosa no se identifica aquí con la raíz que hay que determinar, sino con otra raíz de otro tesoro. Si queremos expresar lo que al-Tūsī hace en nuestro lenguaje algebraico, tendremos que usar para representar la cosa una letra distinta de la x, ya que la x la hemos usado para representar la raíz; pongamos una y. Entonces, lo que acaba de decir al-Tūsī es que $x = b + y$.

Podríamos pensar que al-Tūsī está haciendo un cambio de variable. En efecto, si substituimos en la forma canónica x por $b + y$, obtenemos

$$(b + y)^2 = b(b + y) + c$$
$$b^2 + 2by + y^2 = b^2 + by + c$$
$$by + y^2 = c$$

es decir, que obtenemos la forma canónica "tesoro y raíces igual a números", que es lo que al-Tūsī quiere obtener. Sin embargo, al-Tūsī no desarrolla un cálculo algebraico con las expresiones hasta obtener la ecuación que quiere, sino que busca obtener esa ecuación en las relaciones que tienen las partes de la figura que ha construido. En efecto, al-Tūsī continúa su demostración así:

> el rectángulo *BE* proviene pues del producto del número de raíces y una cosa por una cosa, pero el producto de una cosa por una cosa es el tesoro desconocido y el producto del número de raíces por una cosa es cosas en número igual al número de raíces, pero esta suma es igual al rectángulo *BE*, que es el número mencionado en el problema. Se tiene pues un tesoro y raíces en número igual al número mencionado en el problema iguales al número mencionado en el problema. (al-Tūsī, 1986, p. 31).

Lo que ha hecho pues al-Tūsī es mostrar que el rectángulo *BE*, que representa el número (c), también representa el producto de sus lados, que son *BD*, que representa la cosa (y) y *DE*. Pero *DE* es igual a *AD*, ya que *AE* es un cuadrado, y *AD* representa la suma del número de raíces y una cosa ($b + y$). De manera que el único cálculo que ha hecho al-Tūsī es el equivalente a $(b + y)y = by + y^2$: “el producto de una cosa por una cosa es el tesoro desconocido y el producto del número de raíces por una cosa es cosas en número igual al número de raíces”.

En esta demostración de cómo una forma canónica puede transformarse en la otra está patente una de las deficiencias que tiene el sistema de signos del álgebra árabe medieval, que no se resolverá hasta Viète: sólo hay un nombre para lo desconocido y los términos raíz y tesoro no son potencias de una incógnita, sino especies de números. En el curso de esta demostración “raíz” y “tesoro” se han referido a dos raíces y dos tesoros distintos, que con nuestro lenguaje del álgebra actual hemos podido diferenciar: la primera raíz con x, la segunda con y; el primer tesoro con x^2, el segundo con y^2.

En términos de lo que ha hecho al-Tūsī no hay cambio de variable, no ha substituido una cantidad desconocida por otra, lo que ha probado ha sido más bien que si una ecuación tiene la forma “raíces y números igual a tesoros”, se puede transformar en otra que tiene la forma “tesoros y raíces iguales a números”. La primera está representada en la figura 1 por el hecho de que el cuadrado *AE* (que representa un tesoro) es el resultado de pegar los rectángulos *AG* (que representa raíces) y *BE* (que representa un número); la segunda está representada en la misma figura 1 por el hecho de que el rectángulo *BE* (que representa un número) es también el resultado de pegar un cuadrado de lado *BD* (que representa un tesoro) y un rectángulo (que representa raíces) de lado *BD* (que representa una raíz).

As-Samaw'al (ca. 1130- ca. 1175)

As-Samaw'al era hijo de un judío nacido en Fez en el Magreb, que emigró a Bagdad y allí se casó con una judía de Basora (Iraq). Según Djebbar (2005) su familia era de gran cultura y él publicó libros de medicina (“*El paseo de los compañeros*, que es esencialmente un tratado de sexología y de historias eróticas”, Djebbar, 2005, p. 54), de teología (“publicó, después de su conversión al islamismo, varios panfletos contra el judaísmo[10] y el cristianismo”, Djebbar, 2005, p. 54). Para lo que aquí nos interesa su libro fundamental de matemáticas es el *Kitāb al-bāhir fī l-jabr*, el *Libro resplandeciente sobre álgebra* (Ahmad & Rashed, 1972).

Ese libro de as-Samaw'al se sitúa en una línea de desarrollo del álgebra que es diferente a la que representan los libros de Abū Kāmil, al-Khayyām y al-Tūsī, en los que el objetivo principal del libro es lo que en la entrega anterior de estas historias (Puig, 2010) hemos llamado el proyecto algebraico de Viète, la resolución del problema de los problemas, y para ello se construye la teoría algebraica, su lenguaje, y se estudian las formas canónicas y sus soluciones. Lo que hace as-Samaw'al en este libro es estudiar lo que podríamos llamar ahora una teoría de polinomios, siguiendo los trabajos de al-Karajī, y facilitándolo gracias a la introducción de una representación de los polinomios en forma de tablas, encabezadas por los nombres de las especies, en las que se escriben sólo lo que llamamos ahora los coeficientes, de manera que en la tabla lo que aparece escrito es la sucesión de los coeficientes.

مرتبة كعب كعب	مرتبة مال كعب	مرتبة مال مال	مرتبة الكعب	مرتبة المال	مرتبة الشيء	مرتبة الاحاد	مرتبة جزء شيء	مرتبة جزء مال	مرتبة جزء كعب	مرتبة جزء مال مال
٢٠	٢	٥٨	٧٥	١٢٥	٩٦	٩٤	١٤٠	٥٠	٩٠	٢٠
٢	٠	٥	٥	١٠						

Figura 2

En la figura 2 (tomada de Ahmed & Rashed, 1972, p. 45 del texto árabe) puede verse un ejemplo de la disposición en una tabla de los coeficientes de los polinomios

$$20x^6 + 2x^5 + 58x^4 + 75x^3 + 125x^2 + 96x + 94 + \frac{140}{x} + \frac{50}{x^2} + \frac{99}{x^3} + \frac{20}{x^4}$$

y

$$2x^3 + 5x + 5 + \frac{10}{x}$$

preparados para ejecutar en la tabla un algoritmo para la división de polinomios (por lo que el divisor está desplazado ya tres lugares hacia la izquierda).

La primera palabra que aparece en todas las casillas de la tabla significa “rango”, “orden”, es decir que indica lo que ahora llamados el grado del monomio. Las palabras que aparecen debajo son los nombres de las especies. Como puede verse, no sólo se consideran lo que para nosotros son monomios de exponentes positivos, sino también monomios de exponentes negativos. Éstos no están expresados, sin embargo, como posiciones negativas en una serie ordenada, sino que están expresadas como fracciones: el nombre de esas especies se forma añadiendo la palabra “parte” a los nombres de las especies. Así, en esta tabla, debajo de la palabra que significa “rango” u “orden”, aparecen las especies “parte de tesoro tesoro”, “parte de cubo”, “parte de tesoro”, “parte de cosa”, “número”, “cosa”, “tesoro”, “cubo”, “tesoro tesoro”, “tesoro cubo” y “cubo cubo”.

مرتبة مال كعب كعب	مرتبة مال مال كعب	مرتبة كعب كعب	مرتبة مال كعب	مرتبة مال المال	مرتبة الكعب	مرتبة المال	مرتبة الاشياء
٦	٢٨	٦	إلا ٨٠	٣٨	٩٢	إلا ٢٠٠	٢٠
٢	٨	٠	إلا ٢٠				

Figura 3

En la figura 3 (tomada de Ahmed & Rashed, 1972, p. 48 del texto árabe) se puede ver la representación en la tabla de los polinomios

$$6x^8 + 28x^7 + 6x^6 - 80x^5 + 38x^4 + 92x^3 - 200x^2 + 20x$$

y

$$25x^5 + 8x^4 - 20x^2$$

también dispuestos ya para ejecutar el algoritmo de la división. Puede verse que los coeficientes negativos también están representados en la tabla escribiendo antes de los números la palabra que significa "menos" (que es la misma que significa "no").

En estas tablas, gracias a las cuales as-Samaw'al desarrolla su cálculo con polinomios, la raíz ha desaparecido de la lista de los nombres de las especies y ha sido reemplazada por la cosa. De esta manera, as-Samaw'al está usando "cosa" en el sentido en que al-Khwārizmī usaba "raíz", como una especie de número. Sin embargo, eso no quiere decir que as-Samaw'al identifique totalmente la cosa con la raíz, ya que parece querer diferenciar dos usos cuando afirma

> se dice que la cosa es un lado de cada una de sus potencias, pero no se dice que es raíz más que del tesoro (Ahmed & Rashed, 1972, p. 19)

Al-Karajī (ca. 953- ca. 1029)

Menciono a al-Karajī sin entrar en grandes detalles sobre su uso de los términos "cosa" y "raíz", ya que as-Samaw'al partió de sus trabajos. Se sabe poco de su vida, lo que ha hecho que los historiadores hayan discutido si nació en Bagdad o si era de Karaj, con lo que sería persa, e incluso a que también se haya discutido sobre cuál era exactamente su nombre. En cualquier caso, los libros más importantes que se conservan de él los escribió en Bagdad: el libro *al-Fakhrī*, que es un libro de álgebra que lleva ese nombre porque está dedicado al visir Fakhr al-Mulk, gobernante de la época en Bagdad, *al-Kitāb al-Badīᶜ*, el *Libro maravilloso*, otro tratado de álgebra, y el libro *al-Kāfī fī l-hisāb*, *El suficiente sobre cálculo*, un libro de cálculo mercantil en el que aparece también el álgebra aplicada[11].

Al comienzo de *al-Fakhrī*, si confiamos en el resumen de Woepcke (1853, p. 48) al-Karajī coloca sin más la cosa con la raíz, e incluso con el lado, cuando expone en una lista los nombres de las especies; y habla en especial de la cosa, en términos similares a como lo hace al-Khwārizmī en un capítulo titulado "Sobre los seis problemas":

> El autor explica que el objetivo del álgebra es la determinación de las incógnitas mediante las premisas conocidas; que se nombra al asunto del problema "cosa", y se la somete a las operaciones enseñadas en los capítulos precedentes de este tratado, de acuerdo con lo que aparece en el enunciado del problema. (Woepcke, 1853, p. 63).

Ibn al-Yāsamīn (muerto en 1204)

Al comienzo de este apartado ya he indicado que el historiador tunecino Mohamed Souissi dice que Ibn al-Yāsamīn era de los que identificaba "cosa" y "raíz". Según el historiador argelino Ahmed Djebbar,

> ᶜAbdallah Ibn al-Yāsamīn nació en el Magreb Extremo de madre negra y padre bereber de esa región. [...] Algunos biógrafos dejan entender que estudió las ciencias en Sevilla, que era en esa época la verdadera capital política y cultural de la España musulmana. Igualmente en esa ciudad y en Marrakech habría sido donde enseñó y donde habría publicado sus escritos matemáticos" (Djebbar, 2005, p. 132).

Souissi añade que murió degollado en Marrakech porque "su conducta dejaba que desear" (Souissi, 2001, p. 117).

Su nombre completo, según el historiador tunecino Mahdi Abdeljaouad era Abū M. ᶜAbd Allah b. M. b. Hajjāj Al-'Adrīnī, conocido como Ibn al-Yāsamīn.

El poema sobre álgebra ya mencionado antes es el texto que lo hizo más famoso. En la edición de Adbeljaouad (2005) tiene 54 versos y lleva el título de *al-Urjūza fi'l-jabr wa'l-muqābala*. El poema corresponde a un estilo de textos de enseñanza en los que se presentaban de forma sucinta las cuestiones fundamentales de alguna disciplina en verso para que el verso hiciera más sencilla su memorización.

Este poema sobre álgebra de Ibn al-Yāsamīn tuvo tanto éxito que se escribieron muchos comentarios sobre él, de los que se conservan veinte "incluyendo los de Ibn Qunfudh (muerto en 1404), Ibn Al-Hā'īm (muerto en 1412), Al-ᶜIrāqi (muerto en 1423), Al-Qalasādī (muerto en 1486), Al-Māradīnī (muerto en 1506) y Al-Ansāri (muerto en 1661)" (Adbeljaouad, 2005, p. 3), es decir, que aún en el siglo XVII se seguían escribiendo comentarios al poema, cuatro siglos después de su composición.

Cito la parte del poema en que introduce las especies de números y la cosa, y el comienzo de la lista de las formas canónicas, a partir del verso 11:

11. Sobre tres gira el álgebra:
los tesoros y los números y luego las raíces
12. El tesoro es cualquier número cuadrado
y la raíz uno de sus lados
13. El número absoluto no está relacionado
ni con los tesoros ni con las raíces. ¡Compréndelo!
14. Y la cosa y la raíz significan lo mismo,
igual que los términos padre y progenitor.
15. Pueden ser iguales a un número aislado
o añadidos a otras especies.
16. Hay seis ecuaciones bien ordenadas
la mitad compuestas, la mitad simples.
17. La primera, según la terminología actual, consiste
en igualar los tesoros y las raíces.

(Abdeljaouad, 2005, p. 5, en inglés, y p. 15, en árabe)

Efectivamente, como dice Souissi, Ibn al-Yāsamīn identifica cosa con raíz: el verso 14, para dejar claro que significan lo mismo, utiliza dos palabras sinónimas del lenguaje natural. Sin embargo, cuando Ibn al-Yāsamīn enumera las formas canónicas no usa "cosa" sino "raíz". De hecho la palabra "cosa" sólo aparece una vez más en el resto del poema en una de las reglas algorítmicas en la que dice que hay que "dividir por dos las cosas", en vez de decir "dividir por dos las raíces" como hace en las otras dos reglas algorítmicas en que hay que dividir por dos las raíces. Sin embargo, aunque sólo sea en una de tres, ya está el término "cosa" también en las reglas algorítmicas.

11. على ثلاثة يدور الجبر   المال و الأعداد ثم الجذر .
12. فالمال كل عدد مربع   وجذره واحد تلك الأضلع .
13. والعدد المطلق ما لم ينسب   للمال أو للجذر فافهم تصب .
14. والشيء والجذر بمعنى واحد   كالقول في لفظ أب و والد .
15. فبعضها يعدل بعضا عددا   مركبا مع غيره أو مفردا.
16. فتلك ست نصفها مركبة   ونصفها بسيطة مرتبة .
17. أولها في الاصطلاح الجاري   أن تعدل الأموال للأجذار .

Figura 4. Versos 11 a 17 del poema de Ibn al-Yāsamīn, en árabe.

Ibn Badr (s. XIII)

Según Djebbar, muy poco se sabe de Muhammad Ibn Badr, del que sólo se conoce el *Libro que contiene un resumen del álgebra*. "Como según los biobibliógrafos árabes, hubo, en el siglo X en Córdoba, un matemático llamado ᶜAbd ar-Rahmān Ibn Badr, es posible que nuestro algebrista del siglo XIII sea uno de sus descendientes. En ese caso sería originario de la España musulmana. Pero ningún otro elemento permite confirmar esta hipótesis" (Djebbar, 2005, p. 133).

Ese libro fue editado y traducido al castellano en 1916 por José A. Sánchez Pérez, con el titulo de *Compendio de álgebra de Abenbéder* (Sánchez Pérez, 1916), a partir de un manuscrito que se conserva en la biblioteca escurialense. Sánchez Pérez también fue muy cauto a la hora de afirmar si Ibn Badr, a quien él llamó Abendéder, era nacido en la península ibérica. En efecto, tras decir que Suter y Casiri indican que el autor del manuscrito del Escorial en cuestión era de Sevilla, continúa:

> Esta afirmación de Suter y Casiri acerca de la patria de Abenbéder, a quien hacen sevillano, fue, sin duda, el principal motivo que nos decidió a emprender el estudio de su compendio de Álgebra. Sinceramente debemos confesar, sin embargo, que no poseemos más datos que las noticias de Suter y Casiri, para suponer que Abenbéder fuera español (Sánchez Pérez, 1916, pp. xvii-xviii).

Figura 5. Primera página del manuscrito del Escorial del álgebra de Ibn Badr

Ibn Badr habla de las especies número, raíz y tesoro en el comienzo del libro, como ya hemos visto en otras ocasiones, y, en su caso, la cosa hace su aparición como en el libro de al-Khwārizmī en el capítulo de la multiplicación, sin que se moleste Ibn Badr siquiera en decir que cosa y raíz sean lo mismo; simplemente titula el capítulo "de la multiplicación de las cosas, los tesoros, los cubos y los números", y en la lista de lo que ahora va a enseñar a multiplicar las raíces han desaparecido y han sido substituidas por las cosas.

Al-Qalasādī (1412-1486)

Al-Qalasādī nació en Baza y, aunque después de pasar algún tiempo en Tlemcen en el Magreb se instaló a trabajar en Granada durante un buen número de años, abandonó el reino nazarí por su inestabilidad política y su debilidad ante los reinos cristianos, para acabar en Béja, en el actual Túnez. Al-Qalasādī es citado normalmente en las historias del álgebra por su uso de un simbolismo propio de la matemática árabe occidental, de al-Andalus y el Magreb, que durante tiempo se pensó que había desarrollado él, pero que ahora se sabe que ya se usaba siglos antes. Sin embargo, lo que me interesa aquí es el libro que escribe como comentario a un álgebra de Ibn al-Bannā (1256-1321), en el que la cosa ya toma el lugar de la especie raíz. El libro de Ibn al-Bannā se titula *Compendio de las operaciones del cálculo*, y se convirtió en el manual de base de la enseñanza de las matemáticas en el Magreb entre los siglos XIV y XVII, según Djebbar (2005, p. 130). En su comentario, al-Qalasādī presenta así las especies de números:

> Él dice: el álgebra gira en torno a tres especies: el número y las cosas y los tesoros. Las cosas son las raíces. El tesoro es el resultado de multiplicar la raíz por sí misma. (Bentaleb, 1999, p. 249 del árabe, 285 de la traducción francesa).

La cosa pues, en el texto que va a ser el más usado en el Magreb hasta el siglo XVII, ya ha pasado a ser una especie de número y ha substituido a la raíz. Y el comentario de al-Qalasādī continúa:

> Él ha comenzado por el número, porque es absoluto y no tiene relación con la raíz o el tesoro, no tiene exponente. Ha hablado luego de la cosa, ya que su exponente es uno. Ha hablado después del tesoro ya que es el producto de la cosa por sí misma y su exponente es dos. La cosa y la raíz son dos términos sinónimos, por eso él ha dicho: las cosas son las raíces. Dicho de otra manera, es lo esencial de lo que compone el tesoro, el cubo y los demás. (Bentaleb, 1999, pp. 249-250 del árabe, 286 de la traducción francesa).

La cosa se ha convertido pues en "lo esencial de los que compone el tesoro, el cubo y los demás", es decir, en el término central del álgebra.

La regla de la cosa

Al desplazar a la raíz, la cosa acaba convirtiéndose en el centro del álgebra, que se identifica como cálculo con la cosa o *Regla de la cosa*, y se incorpora al nombre de la disciplina, como alternativa al nombre bárbaro de álgebra. Incluso, en las primeras álgebras alemanas, el álgebra se llama simplemente *Die Coss*, por un curioso fenómeno de adopción de la palabra italiana, en su ortografía del norte de Italia "cossa", sin traducirla al alemán ("Ding", es la palabra alemana que traduce "cosa"). El libro de *Die Coss* de Christoff Rudolff de 1553 es el primer ejemplo. Pero esa es otra historia, de la que hablaré en una próxima entrega.

HISTORIAS ■

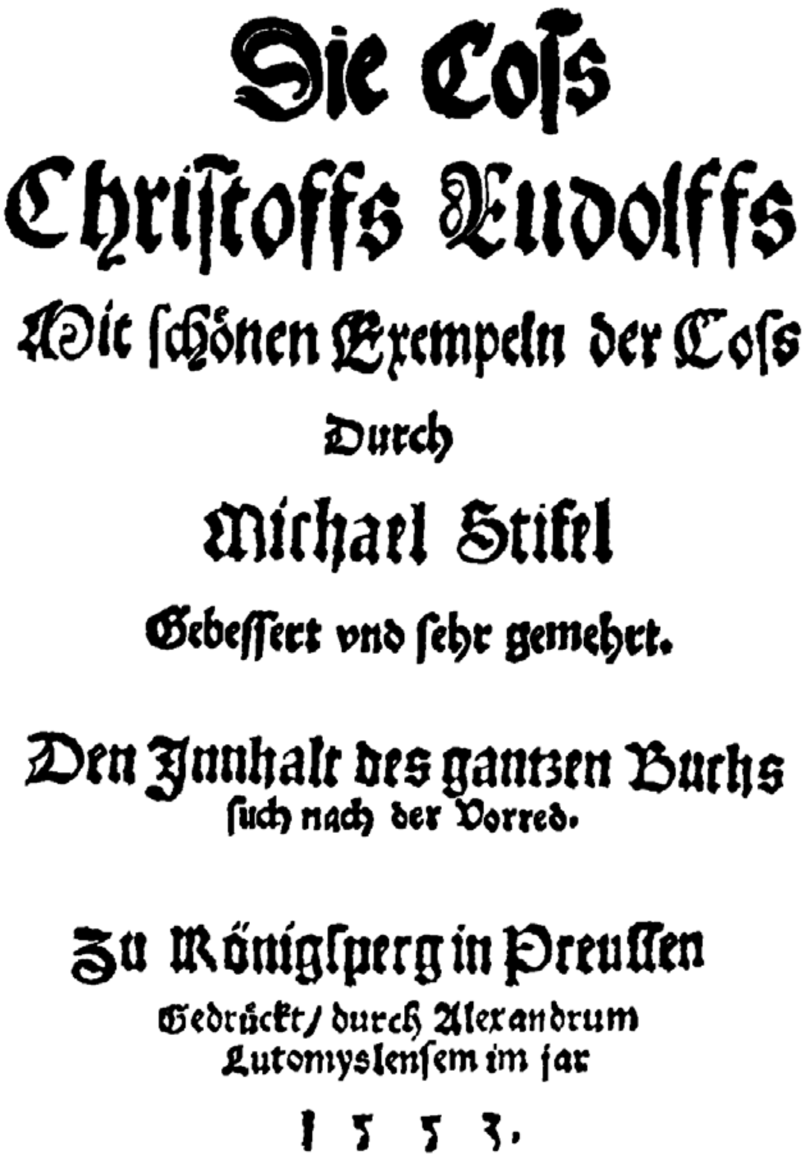
Die Coſs
Chriſtoffs Rudolffs
Mit ſchönen Exempeln der Coſs
Durch
Michael Stifel
Gebeſſert vnd ſehr gemehrt.
Den Innhalt des gantzen Buchs
ſuch nach der Vorred.
Zu Königſperg in Preuſſen
Gedrückt / durch Alexandrum
Lutomyslenſem im jar
1553.

Figura 6. Portada del libro *Die Coss* de Christoff Rudolff

NOTAS

[1] La referencia es a la página del original de Freudenthal publicado en inglés por Kluwer como primer volumen de la ya clásica colección *Mathematics Education Library*, dirigida por Alan Bishop. Yo traduje una selección de capítulos de este libro, que publicó en 1994 el *Centro de Investigación y de Estudios Avanzados* de México, en la que figuraba este capítulo sobre el lenguaje algebraico, junto a los capítulos "El método" y "Fracciones". En esa edición, el texto que cito aparece en la página 68 (Freudenthal, 1994, p. 68). Unos años después incluí también el capítulo "Razón y proporcionalidad" en una segunda edición ampliada de la selección de textos. En esa segunda edición, el texto aparece en la página 124 (Freudenthal, 2001, p. 124).

[2] Ver en la tercera entrega de estas historias la discusión sobre si el libro de Ibn Turk es anterior o no al de al-Khwārizmī (Puig, 2009).

[3] En Puig & Rojano (2004) presenté sucintamente, siguiendo una indicación que aparece en Høyrup (1994), cómo esta hipótesis puede apoyarse en el hecho de que esos términos aparecen en dos partes distintas, y separadas por doscientas páginas, del *Liber Abacci* de Leonardo de Pisa, sin que Leonardo de Pisa relacione ambas partes de forma alguna.

[4] Rashed no duda en atribuirle a al-Khwārizmī la paternidad del término. Høyrup por el contrario apunta que el término probablemente venga de una tradición anterior, que, hasta ahora, no ha dejado rastro escrito. El historiador egipcio Rashed suele ser muy contundente en sus afirmaciones, en particular cuando se trata de atribuir prioridades a los autores que edita.

[5] Ver la lista de las veinticinco formas canónicas en la anterior entrega de estas historias (Puig, 2010). Diré de paso que nada de esto puede observarse en el libro de Moreno dedicado a ^{c}Umar al-Khayyām, publicado por Nívola: en él, Moreno escribe la lista de formas canónicas con la cosa en vez de la raíz, cuando no aparece así en el texto árabe.

[6] En la traducción latina de Gerardo de Cremona, los nombres de las cantidades son "pretium et appretiatum secundum positionem, et pretium et appretiatum secundum querentem".

[7] Souissi no translitera estas dos palabras árabes así, porque usa la transliteración "centroeuropea", que es la habitual en los países del ámbito cultural francés, en vez de la transliteración que yo estoy usando. He preferido no ser fiel en la cita y mantener la misma transliteración que estoy usando en estas historias.

[8] El álgebra de Abū Kāmil está disponible en tres ediciones: una edición de la traducción hebrea del siglo XV del judío probablemente español Mordecai Finzi, con traducción al inglés del texto hebreo de Martin Levey (Levey, 1966); una edición de la traducción latina del siglo XIV (Sesiano, 1993), y una edición del texto árabe con traducción al alemán (Chalhoub, 2004).

[9] Obsérvese que al-Tūsī utiliza aquí la palabra *muraba*^{c} y no la palabra *māl*, porque se refiere al cuadrado figura geométrica y no al cuadrado algebraico, que como sabemos se denomina *māl*, "tesoro", en el lenguaje algebraico de la época.

[10] Su libro contra los judíos se titula *Ifhām al-Yahūd*, *Confundir a los judíos*, y fue muy popular en la Edad Media a raíz de su traducción al latín en el siglo XIV, por lo que ha sido traducido también al alemán, el italiano, el inglés, el español y el ruso (Ahmed & Rashed, 1972, p. 3).

[11] Del *al-Fakhrī* hay una edición resumida y comentada en francés por Franz Woepcke (Woepcke, 1853). Del *Libro maravilloso* hay una edición de Adel Anbouba del texto árabe con un comentario y un resumen en francés (Anbouba, 1964). De *El suficiente sobre cálculo* hay una traducción alemana de Adolf Hochheim (Hochheim, 1878).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abdeljaouad, M. (2005). *12th Century Algebra in an Arabic Poem : Ibn Al-Yāsamīn's Urjūza fi'l-jabr wa'l-muqābala*. Tunis. Descargable en enero de 2011 de: http://membres.multimania.fr/mahdiabdeljaouad/Urjuza.pdf

Ahmad, S. & Rashed, R. (Eds.) (1972). *Al-Bāhir en algèbre d'as-Samaw'al*. Damas: Université de Damas.

Al-Tūsī, S. (1986). *Œuvres mathématiques. Tome I et II.* Texte établi et traduit par R. Rashed. Paris: Les Belles Lettres.

Anbouba, A. (Ed.) (1964). *L'algèbre al-Badīᶜ d'al-Karagī.* Beyrouth: Publications de l'université libanaise.

Bentaleb, F. (Ed.) (1999). *Abū al Hasān al-Qalasādī. Sarh talhīs a'māl al hisāb. Œuvre mathématique en Espagne musulmane du XVᵉ siècle.* Beyrouth: Dar al-Gharb al-Islami.

Chalhoub, S. (Ed.) (2004). *Die Algebra Kitab al-Gabr wal-muqabala des Abu Kamil Soga ibn Aslam.* Aleppo: Aleppo University.

Djebbar, A. (2005). *L'algèbre arabe. Genèse d'un art.* Paris: Vuibert/ Adapt.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* Dordrecht: Kluwer.

Freudenthal, H. (1994). *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. Textos seleccionados.* (L. Puig, Introducción, traducción y notas.) México: CINVESTAV.

Freudenthal, H. (2001). *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. Textos seleccionados. (2ª edición ampliada).* (L. Puig, Introducción, traducción y notas.) México: CINVESTAV.

Hochheim, A. (ed., trans.), (1878). *Kâfî fîl Hisâb (Genügendes über Arithmetik) des Abu Bekr Muhammed ben Alhusein Alkarkhi. I-III.* Halle: Louis Nebert.

Høyrup, J. (1994). The Antecedents of Algebra, *Filosofi og videnskabsteori på Roskilde Universitetcenter. 3.* Række: Preprint og Reprints 1994 nr. 1.

Hughes, B. (1986). Gerard of Cremona's translation of al-Khwārizmī's al-jabr: A critical edition. *Mediaeval Studies 48,* pp. 211-263.

Levey, M. (ed.) (1966). *The Algebra of Abū Kāmil, in a Commentary by Mordecai Finzi. Hebrew text and translation, and commentary.* Madison, WI: The University of Wisconsin Press.

Puig, L. (2009). Historias de al-Khwārizmī (3ª entrega). Orígenes del álgebra. *Suma, 60,* pp. 103-108.

Puig, L. (2010). Historias de al-Khwārizmī (4ª entrega). El proyecto algebraico. *Suma, 65,* pp. 87-94.

Puig, L., y Rojano, T. (2004). The history of algebra in mathematics education. In K. Stacey, H. Chick, y M. Kendal (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra: The 12th ICMI study* (pp. 189-224). Boston / Dordrecht / New York / London: Kluwer Academic Publishers.

Rashed, R. (Ed.). 1984. *Diophante. Tome III. Les Arithmétiques. Livre IV, et Tome IV, Livres V, VI et VII.* Texte de la traduction arabe de Qustâ ibn Lûqâ établi et traduit par Roshdi Rashed. Paris: Les Belles Lettres.

Rashed, R. (Ed.). (2007). *Al-Khwārizmī. Le commencement de l'algèbre.* Paris: Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard.

Rashed, R., y Vahebzadeh, B. (1999). *Al-Khayyâm mathématicien.* Paris: Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard.

Sánchez Pérez, J. A. (1916). *Compendio de álgebra de Abenbéder.* Madrid: Junta para la ampliación de estudios e investigaciones científicas.

Sayili, A. (Ed.). (1962). *Abdülhamid ibn Türk'ün Katışık denklemlerde Mantıkî Zururetler adlı yazısı ve Zamanın Cebri (Logical necessities in mixed equations by ᶜAbd al-Hamîd Ibn Turk and the algebra of his time).* Ankara: Türk Tarih Kurumu Basımevi.

Sesiano, J. (1993). La version latine médiévale de l'Algèbre d'Abū Kāmil. In M. Folkerts, and J. P. Hogendijk (eds.) *Vestigia Mathematica. Studies in medieval and early modern mathematics in honour of H. L. L. Busard* (pp. 315-452). Amsterdam and Atlanta, GA: Editions Rodopi B. V.

Souissi, M. (2001). *Feuilles d'automne ou En souvenir des Congrès et Colloques du patrimoine scientifique Maghrébo-arabe.* Beyrouth: Dar al-Gharb al-Islami.

Woepcke, F. (1853). *Extrait du Fakhrî, traité d'algèbre par Aboû Bekr Mohammed ben Alhaçan Alkarkhî; precede d'un mémoire sur l'algèbre indéterminé chez les Arabes.* Paris: L'Imprimerie Impériale.

Este artículo fue solicitado por *Suma* en diciembre de 2010 y aceptado en enero de 2011 para su publicación