suma+ 67
Junio 2011, pp. 101-110

Historias de al-Khwārizmī (6ª entrega). El cálculo con la cosa

Cálculo literal, cálculo con especies, cálculo con la cosa

Como ya vimos en una entrega anterior de estas historias que subtitulé “El proyecto algebraico” (Puig, 2010), François Viète, en su libro *Introducción al arte analítica* (*In artem analyticem Isagoge*), presenta lo que él llama “Logística especiosa”, un cálculo que no se hace con números, sino con especies, con “formas de números”. También vimos que esto es lo que le permite efectuar el análisis para resolver los problemas. La logística especiosa, en el caso de Viète, y esto le hace ser considerado el iniciador del álgebra simbólica, se acompaña de un cálculo con letras. Así lo dice explícitamente Viète en el recto del folio 5 de la *Introducción al arte analítica*:

> Logistice numerosa est quæ per numeros, Speciosa quæ per species seu rerum formas exhibetur, ut pote per Alphabetica elementa.
> [La Logística numerosa es la que se presenta mediante números, la Especiosa la que se presenta mediante especies o formas de las cosas, como, por ejemplo, mediante elementos alfabéticos] (Viète, 1591, p. 5r).

El álgebra de al-Khwārizmī no es simbólica en este sentido: ni las especies ni las cantidades desconocidas ni las cantidades conocidas están representadas mediante letras, ni mediante ningún signo distinto de las palabras del lenguaje vernáculo. No hay pues en el libro de al-Khwārizmī, estrictamente hablando, lo que nosotros llamamos cálculo literal, en el sentido de cálculo con letras. Sin embargo, sí que hay desarrollado un cálculo con la cosa y un cálculo con especies, hay pues una “logística especiosa”. Además, al-Khwārizmī le dedica a ese cálculo una parte específica del libro situada antes de que aborde el procedimiento para resolver los problemas y después de haber expuesto cuáles son los objetos de los que va a tratar el cálculo, es decir, las especies de números, y haber establecido el conjunto completo de formas canónicas, sus algoritmos de solución y las demostraciones de esos algoritmos.

Los capítulos del libro en que al-Khwārizmī desarrolla ese cálculo con la cosa y con especies son (con la numeración que les di en Puig, 2010) los siguientes:

6. Sobre la multiplicación.
7. Sobre la adición y la substracción.
8. Sobre la división.

Luis Puig
Universitat de València Estudi General

En el capítulo "Sobre la multiplicación" al-Khwārizmī calcula con la cosa y en los cálculos aparecen las especies. En los otros dos capítulos calcula con especies y con radicales, sin que aparezca el término "cosa". Además, al final del capítulo "Sobre la división" vuelve sobre tres de los cálculos expuestos en el capítulo "Sobre la adición y la substracción" para demostrarlos. Veamos, en primer lugar, cómo explica al-Khwārizmī el cálculo con la cosa.

El cálculo con la cosa

Al-Khwārizmī comienza manifestando explícitamente que escribe con intención pedagógica:

> Yo te enseño cómo multiplicar unas por otras las cosas, que son las raíces; si están solas, si están con un número, si están disminuidas en un número o si están restadas de un número; y cómo sumarlas unas a otras y cómo restarlas unas de otras (Rashed, 2007, p. 122-123; Hughes, 1986, p. 241).

Los tipos de expresiones que al-Khwārizmī va a enseñar cómo se multiplican los podemos escribir en el lenguaje actual del álgebra así:

las cosas solas:	ax
las cosas con un número:	$ax + b$
las cosas disminuidas en un número:	$ax - b$
las cosas restadas de un número	$b - ax$

Como para al-Khwārizmī los números son positivos, tiene que haber dos tipos de expresiones con la substracción, las cosas disminuidas en un número y las cosas restadas de un número, mientras que sólo hay un tipo de expresión cuando se suman cosas y números. Veremos más adelante que en uno de los ejemplos al-Khwārizmī dice explícitamente que diez más cosa y cosa más diez es lo mismo, y por qué necesita decirlo.

Para enseñar a multiplicar esas expresiones con la cosa al-Khwārizmī recuerda qué significa multiplicar:

> Que sepas que para cualquier número multiplicado por otro número es necesario sumar uno de los números tantas veces como las unidades que contiene el otro (Rashed, 2007, p. 122-123; Hughes, 1986, p. 241).

Al-Khwārizmī no continúa, como podría esperarse, dando ahora una regla para multiplicar las expresiones con números y cosas, sino que presenta una situación puramente aritmética que utiliza como un modelo más concreto a partir del cual dar sentido a los cálculos (algebraicos) con la cosa. La situación en cuestión es la multiplicación de números cuando están representados en el sistema de numeración posicional decimal, es decir, lo que al-Khwārizmī explicará en su *Libro del cálculo con los números hindúes* (Allard, 1992)[1]. En efecto, lo que hace al-Khwārizmī es explicar que para multiplicar decenas más unidades por decenas más unidades hay que hacer cuatro multiplicaciones. Pero no sólo explica eso, sino que extiende el modelo concreto del cálculo aritmético hindú a la situación en que las unidades no se añaden a las decenas (como en la representación hindú de los números) sino que se substraen:

> Si se tiene decenas a las que se ha añadido unidades o de las que se ha quitado unidades, es necesario multiplicar cuatro veces: las decenas por las decenas, las decenas por las unidades, las unidades por las decenas y las unidades por las unidades. (Rashed, 2007, p. 122-123; Hughes, 1986, p. 241).

Vale la pena observar que, como al-Khwārizmī tiene disponibles los nombres "decenas" y "unidades", puede enunciar la regla en general sin verse obligado a enunciarla mediante un ejemplo numérico concreto. "Decenas" y "unidades" desempeñan, en los cálculos aritméticos en el sistema de numeración posicional decimal, un papel similar al que van a desempeñar las especies de números en los cálculos algebraicos, por eso al-Khwārizmī puede usar ese cálculo como modelo (más concreto) para enseñar el cálculo (más abstracto) algebraico.

Además, al extender el modelo de la situación propia del sistema de numeración (la adición de decenas y unidades) a una situación similar a la anterior, pero nueva (la substracción de unidades a decenas), da paso también a un modelo para la regla de los signos:

> Entonces, si las unidades que están con las decenas son ambas añadidas, la cuarta multiplicación es aditiva, y si son ambas substraídas, la cuarta multiplicación es también aditiva. Pero si unas están añadidas y otras substraídas, la cuarta multiplicación es substractiva (Rashed, 2007, p. 122-123; Hughes, 1986, p. 241).

Vale la pena detenerse un momento en el detalle de los términos que acompañan este modelo aritmético de la regla de los signos: al-Khwārizmī no multiplica los signos más y menos a la manera de la moderna formulación de la regla de los signos ($+ \times + = +$; $+ \times - = -$; $- \times - = +$). Al-Khwārizmī no dice siquiera en lenguaje vernáculo: "más por más, más; más por menos, menos; menos por menos, más". Al-Khwārizmī no habla de esos signos sueltos, sino de las cantidades que se suman o se restan.

Pero además, al-Khwārizmī no habla de cantidades positivas o cantidades negativas, esto último es simplemente impensable, sino de cantidades que se suman y cantidades que se restan a otras: en este caso "unidades añadidas" y "unidades substraídas" a unas decenas. El calificativo "añadido" o "substraído", "aditivo" o substractivo" no tiene sentido para una cantidad aislada, sólo tiene sentido para una cantidad que está inmersa en un cálculo. La regla de multiplicación es pues una regla operatoria sobre lo que la cantidad está realizando o ha realizado en una operación aritmética: ser añadida o ser substraída en el curso de la realización de un cálculo es lo que le da a las cantidades, sólo a efectos de ese cálculo, el carácter aditivo o substractivo. Ese carácter aditivo o substractivo no es pues una propiedad absoluta de una cantidad, sino una propiedad de la cantidad relativa a un cálculo concreto en el que aparece: como se está multiplicando una cantidad, a la que se le ha añadido otra, por otra cantidad, a la que se le ha substraído otra, el cuarto producto es una cantidad "substractiva", es decir, una cantidad que se va a substraer de otra.

Por otro lado, la regla sólo está enunciada para "la cuarta multiplicación", que es la multiplicación en la que los factores provienen ambos de las cantidades que están añadidas o substraídas a otras. Sólo en este caso tiene al-Khwārizmī que enunciar una regla. En los otros casos, interviene una cantidad que ni está añadida ni está substraída, sino que es la cantidad a la que se le añade o se le quita algo. Cuando dos de esas cantidades se multiplican, el producto no es aditivo ni substractivo, es de nuevo una cantidad a la que se le añade o se le quita algo. Cuando una de estas cantidades se multiplica por una cantidad añadida o substraída, el producto resultante tiene el carácter aditivo o substractivo de la cantidad por la que se multiplica, sin que la cantidad que ni es añadida ni substraída pueda influir en ese carácter.

Al-Khwārizmī ejemplifica a continuación las reglas que ha formulado en general en el modelo aritmético concreto con tres ejemplos numéricos, elegidos para tener uno de cada una de las posibilidades de producto de "unidades añadidas" y "unidades substraídas". El primero, y más simple, es:

> Por ejemplo: diez y uno por diez y dos; el diez por el diez es cien; el uno por el diez, diez aditivo; el dos por el diez, veinte aditivo; el uno por el dos, dos aditivo. Y todo esto es treinta y dos. (Rashed, 2007, p. 122-123; Hughes, 1986, p. 241).

En este ejemplo está patente ese carácter asimétrico de la adición que hemos indicado: en "diez y uno", diez es la cantidad a la que se le suma otra cantidad; uno es la cantidad añadida. El modelo de adición que subyace es el de una cantidad inicial al que se le añade una cantidad que cambia la cantidad inicial, no es el modelo de adición que la presenta como el cardinal de la unión de dos conjuntos disjuntos y en el que los dos sumandos desempeñan el mismo papel en la adición.

Ambos dieces, el de "diez y uno" y el de "diez y dos", son cantidades que ni son añadidas ni substraídas: su producto, por tanto, no es aditivo ni substractivo. Al-Khwārizmī escribe "el diez por el diez es cien", y no "el diez por el diez es cien aditivo". En las otras tres multiplicaciones, el producto sí que está calificado, en este caso, siempre como "aditivo". Veamos los otros dos ejemplos:

> Si se tiene diez menos uno por diez menos uno, el diez por el diez es cien; y el uno substraído por el diez es diez substractivo, y el uno también substraído por el diez es diez substractivo. Esto es ochenta. Y el uno substraído por el uno substraído, uno aditivo. Esto es pues ochenta y uno.
> Si se tiene diez y dos por diez menos uno, el diez por el diez es cien; el uno substraído por el diez es diez substractivo; el dos añadido por el diez es veinte aditivo. Esto es ciento diez. El dos añadido por el uno substraído es dos substractivo. Todo esto es pues ciento ocho (Rashed, 2007, pp. 122-125; Hughes, 1986, pp. 241-242).

Los tres ejemplos son pues

$(10 + 1)\,(10 + 2)$
$(10 - 1)\,(10 - 1)$
$(10 + 2)\,(10 - 1)$

Los dieces son siempre cantidades que ni son añadidas ni substraídas. En los cálculos al-Khwārizmī siempre escribe "diez" sin calificativo alguno. En el primer ejemplo, en que las otras cantidades están ambas añadidas, al-Khwārizmī no se preocupa de escribir el calificativo "añadido" con el uno o el dos, pero en los otros dos ejemplos, siempre lo escribe: "el uno substraído", "el dos añadido".

Los productos siempre van acompañados de su calificativo, "aditivo" o "substractivo", de manera que el cálculo se completa luego realizando sobre el primer producto, es decir, el resultado de la multiplicación de las dos cantidades iniciales (que es al que se van a añadir o del que se van a substraer el resto de los productos) las adiciones o substracciones correspondientes al carácter de los otros tres productos. Al-Khwārizmī, además, se detiene en subrayar el efecto de la cuarta multiplicación, que es en la que ambos factores están calificados como "añadido" o "substraído".

Una vez expuestos los ejemplos de los cálculos aritméticos que son el modelo concreto para enseñar las reglas de cálculo con la cosa, al-Khwārizmī dice explícitamente que ésa ha sido su intención al explicar todo lo anterior:

> Te he mostrado esto para indicarte cómo multiplicar las cosas unas por otras, si están añadidas a un número, o restadas de un número, o disminuidas por un número (Rashed, 2007, pp. 124-125; Hughes, 1986, p. 242).

Dicho esto, al-Khwārizmī desgrana ejemplos de cálculos con expresiones con la cosa del estilo que ha anunciado, en los que, al poner en funcionamiento para esas expresiones algebraicas los cálculos que ha mostrado en el modelo concreto aritmético, va más allá de la imitación con las expresiones algebraicas de los cálculos aritméticos. En particular, lo aditivo y lo substractivo dejan de ser calificativos estrictamente ligados a lo que se añade o se substrae a una cantidad que ni es aditiva ni substractiva, para calificar también a las cantidades que en las expresiones aritméticas aparecían como cantidades iniciales. Pero además, lo substractivo, aunque sigue apareciendo como substraído de una cantidad, parece independizarse en el curso de los cálculos. Veamos cómo son los ejemplos.

Los ejemplos son estos diez:

1. $(10 - x) \cdot 10$	2. $(10 + x) \cdot 10$
3. $(10 + x) \cdot (10 + x)$	4. $(10 - x) \cdot (10 - x)$
5. $(1 - 1/6) \cdot (1 - 1/6)$	6. $(10 - x) \cdot (10 + x)$
7. $(10 - x) \cdot x$	8. $(10 + x) \cdot (x - 10)$
9. $(10 + x/2) \cdot (1/2 - 5x)$	10. $(10 + x) \cdot (x - 10)$

El quinto ejemplo no es en realidad un cálculo de expresiones con la cosa, sino que el lugar de la cosa está ocupado por una fracción. En el ejemplo noveno también hay fracciones, o, para ser más preciso, mitades, y curiosamente, el número de cosas es la mitad de diez. Estos dos ejemplos no responden al mismo esquema sistemático de desarrollo de posibilidades que los otros, y sólo parece tener sentido que al-Khwārizmī los incluya por la dificultad que conllevaba el cálculo con fracciones en su época.

En el ejemplo décimo, cuyo enunciado es el mismo que el del octavo, lo que hace al-Khwārizmī es decir que “diez y cosa” es lo mismo que “cosa y diez” y desarrollar entonces el cálculo $(x + 10) \cdot (x - 10)$.

Veamos en detalle cómo desarrolla al-Khwārizmī los ejemplos. Empecemos por los cuatro primeros.

1. $(10 - x) \cdot 10$

> Si se te dice: diez menos cosa, y el sentido de la cosa es la raíz, por diez, entonces multiplica diez por diez, resulta cien, y menos cosa por diez, resulta diez raíces substractivas. Decimos: cien menos diez cosas (Rashed, 2007, pp. 124-125; Hughes, 1986, p. 242).

2. $(10 + x) \cdot 10$

> Si se dice: diez y cosa por diez, tú multiplicas diez por diez, resulta cien, y cosa por diez, resulta diez cosas aditivas. Se tiene pues cien y diez cosas (Rashed, 2007, pp. 124-125; Hughes, 1986, p. 242).

3. $(10 + x) \cdot (10 + x)$

> Si se dice: diez y cosa por sí misma, tú dices: diez por diez, cien, y diez por cosa, diez cosas, y diez por cosa, diez cosas también, y cosa por cosa, tesoro aditivo. Resulta entonces cien dirhams y veinte cosas y tesoro aditivo (Rashed, 2007, pp. 124-125; Hughes, 1986, p. 242).

4. $(10 - x) \cdot (10 - x)$

> Si se dice: diez menos cosa por diez menos cosa, tú dices: diez por diez, cien, y menos cosa por diez, diez cosas substractivas, y menos cosa por diez, diez cosas substractivas, y menos cosa por menos cosa, tesoro aditivo. Resulta pues cien y tesoro menos veinte cosas (Rashed, 2007, pp. 124-125; Hughes, 1986, p. 242).

En estos cuatro ejemplos, al-Khwārizmī hace las dos o las cuatro multiplicaciones por separado, y luego combina los productos teniendo en cuenta si cada uno de ellos es aditivo o substractivo. Hasta aquí no hace más que calcar sobre las expresiones con la cosa lo que ha hecho con el modelo aritmético más concreto, substituyendo simplemente el uno o el dos, que estaban añadidos o substraídos a diez en los ejemplos aritméticos, por la cosa.

Sin embargo, hay algo que es nuevo: en los ejemplos aritméticos en que aparece “diez menos uno”, al-Khwārizmī llamaba en los cálculos “el uno substraído” a ese uno que en la expresión aritmética está después de la palabra “menos”, aquí al-Khwārizmī ante la expresión equivalente “diez menos cosa” no dice en los cálculos “la cosa substraída”, sino “menos cosa” ya desde el primer ejemplo.

“Lo substraído” de una cantidad, el uno substraído de diez en el ejemplo aritmético expresado en la frase “diez menos uno”, se independiza para ser no una cosa substraída sino “menos cosa”.

Por supuesto que esto está lejos de indicar la constitución de la idea de número negativo: sólo cuando nombra lo que se va a multiplicar dice al-Khwārizmī “menos cosa”, en cuanto se trata del resultado de la multiplicación, de nuevo está presente que cualquier cosa que lleve delante la palabra “menos” representa una cantidad que ha de substraerse de otra. El resultado de la multiplicación de “menos cosa” por diez no es “menos diez cosas”, sino “diez cosas substractivas. La palabra “menos”, la expresión “menos cosa” sólo se ha independizado de la cantidad de la que se substrae mientras se está calculando con ella.

Eso no quita para que la reiteración a lo largo del texto de al-Khwārizmī de la expresión “menos cosa” le dé carta de naturaleza como parte del lenguaje algebraico que al-Khwārizmī usa en su libro, y probablemente contribuyó a establecer. Si usamos la clásica caracterización de Nesselman (1842) de los tipos de lenguaje algebraico, el texto de al-Khwārizmī es “retórico” porque los cálculos algebraicos están expresados totalmente y en detalle usando palabras del lenguaje vernáculo. Ahora bien, decir que entonces el álgebra está escrita en lenguaje vernáculo es contar sólo la mitad de la historia: al-Khwārizmī sólo usa el lenguaje vernáculo, por supuesto, pero, por un lado, fija significados técnicos de las palabras, y, por otro, y más importante para lo que quiero señalar aquí, esquematiza y estereotipa el texto. Salta a la vista cuando se lee el libro de álgebra de al-Khwārizmī, o simplemente los fragmentos que estoy citando aquí, que al-Khwārizmī construye frases repitiendo expresiones verbales que, por la reiteración, se convierten en fórmulas estereotipadas. El historiador libanés Adel Anbouba dice que una frase como "*illā shay' fī illā shay' māl zā'id* (menos cosa por menos cosa, tesoro aditivo)", que acabamos de encontrar en el cuarto ejemplo, "va contra la gramática" (Anbouba, 1978, p. 72). Al-Khwārizmī rompe la gramática de la lengua vernácula como parte de su elaboración del sistema de signos del álgebra, que no se hace con más materia de la expresión que la de la propia lengua vernácula[2]. La nueva gramática produce textos esquemáticos y estereotipados: "menos cosa" es más compacto y manejable en un texto esquemático y estereotipado que "la cosa substraída", y, una vez se ha permitido violar la gramática, se puede independizar de la expresión completa que le daba sentido ("diez menos cosa"), para designar algo con lo que se hacen cálculos algebraicos[3].

Veamos el quinto ejemplo, en el que no aparece la cosa, pero que al-Khwārizmī enlaza con los anteriores al empezar diciendo "De la misma manera", lo que nos podría hacer pensar que el sentido de incluir este ejemplo no está en usarlo como modelo aritmético y por tanto más concreto de la multiplicación de expresiones con la cosa, sino, por el contrario, como aplicación ahora de esos cálculos de vuelta a la aritmética, para unos cálculos que son difíciles.

5. (1– 1/6) · (1– 1/6)

> De la misma manera si te dicen: un dirham menos un sexto por un dirham menos un sexto. Se tiene cinco sextos por sí mismo, es decir, veinticinco partes de treinta y seis partes de dirham, que es dos tercios y un sexto de un sexto.
> La regla para ello es: multiplicas un dirham por un dirham, se tiene un dirham. Y menos un sexto por un dirham vale un sexto substractivo, y menos un sexto por un dirham vale un sexto substractivo. Queda dos tercios de un dirham. Y menos un sexto por menos un sexto vale un sexto de un sexto aditivo. Es pues dos tercios y un sexto de un sexto (Rashed, 2007, pp. 126-127; Hughes, 1986, p. 242).

No entraré aquí en las peculiaridades de la denominación de las fracciones en la época árabe medieval, que son responsables de algunos de los detalles de estos cálculos. Sólo mencionaré que la lengua árabe tiene nombre sólo para las fracciones unitarias, y que éstas se llaman "fracciones expresables", mientras que las demás se llaman "inexpresables" o "sordas" (exactamente la misma palabra se usa también para las magnitudes inconmensurables). Las fracciones sordas se describen con expresiones como la que aparece en este texto: "veinticinco partes de treinta y seis partes" para 25/36, reiterando la palabra "parte" para indicar claramente que la unidad (en este caso, el dirham) se ha dividido en treinta y seis partes y que se han tomado veinticinco de esas treinta y seis. También tiene nombre para fracciones con un dos en el numerador, como dos tercios, pero eso se debe a que la lengua árabe no sólo tiene singular y plural, sino también dual, por lo que para decir dos cosas, por ejemplo, no se usa el número dos, sino que se pone la palabra "cosa" en dual. Esto explica la forma en que al-Khwārizmī da aquí el resultado: en árabe se ve como más simple la expresión "dos tercios y un sexto de un sexto" que "veinticinco partes de treinta y seis partes".

Lo que interesa señalar, y va en el sentido que había adelantado antes de exponer este ejemplo, es que aquí al-Khwārizmī aplica al cálculo de expresiones con fracciones la regla que ha enunciado para expresiones con la cosa, e incluso usa el mismo lenguaje esquematizado y estereotipado que viola la gramática: "menos un sexto por menos un sexto", etc.

Veamos ahora los ejemplos sexto, séptimo y octavo

6. $(10 - x) \cdot (10 + x)$

> Si se dice: diez menos cosa por diez y cosa, tú dices: diez por diez, cien, y menos cosa por diez, diez cosas substractivas; cosa por diez, diez cosas aditivas, y menos cosa por cosa, tesoro substractivo. Y esto es cien dirhams menos un tesoro (Rashed, 2007, pp. 126-127; Hughes, 1986, p. 242).

7. $(10 - x) \cdot x$

> Si se dice: diez menos cosa por cosa, tú dices: diez por cosa, diez cosas, y menos cosa por cosa, tesoro substractivo. Resulta pues diez cosas menos un tesoro (Rashed, 2007, pp. 126-127; Hughes, 1986, pp. 242-243).

8. $(10 + x) \cdot (x - 10)$

> Si se dice: diez y cosa por cosa menos diez, tú dices: cosa por diez, diez cosas aditivas; cosa por cosa, tesoro aditivo; menos diez por diez, cien dirhams substractivos; menos diez por cosa, diez cosas substractivas. Decimos entonces: un tesoro menos cien dirhams. Después de haberlas opuesto, se eliminan diez cosas aditivas con diez cosas substractivas. Quedará entonces un tesoro menos cien dirhams (Rashed, 2007, pp. 126-129; Hughes, 1986, p. 243).

El ejemplo séptimo no incluye nada nuevo, su diferencia con los ejemplos primero y segundo es simplemente que la expresión simple es una cosa en vez de ser un diez, por lo que una de las dos multiplicaciones da origen a un tesoro, en este caso substractivo. Esa multiplicación de la cosa por la cosa ya había aparecido en los ejemplos tercero y cuarto, y es una multiplicación de especies de números: cosa por cosa es tesoro ya que al-Khwārizmī ha advertido que "el sentido de la cosa es la raíz[4]".

En los ejemplos sexto y octavo, las diez cosas aditivas se compensan con las diez cosas substractivas, quedando una expresión en la que sólo hay dos especies: simples números o dirhams y tesoros. En el ejemplo sexto al-Khwārizmī se limita a enunciar el resultado: "Y esto es cien dirhams menos un tesoro". El ejemplo octavo es más interesante porque al-Khwārizmī explica cómo han desaparecido las cosas al final de los cálculos, y, en la explicación, utiliza la palabra "*qābālat*", que tiene la misma raíz que *al-muqābala*, la palabra que aparece en el título del libro de al-Khwārizmī acompañando a *al-jabr*, y que es el nombre de una de las operaciones fundamentales que definen el cálculo. Esa raíz tiene el significado de oponer una cosa a otra, y se usa para compensar los términos de una expresión algebraica que sean de la misma especie. En el caso de este cálculo, hay dos de las cuatro multiplicaciones que han producido términos de la misma especie: diez cosas aditivas y diez cosas substractivas. El calculista algebraico las opone, las pone una frente a otra y las compensa, en este caso la oposición, *al-muqābala*, tiene como consecuencia que las cosas se eliminan y en la expresión final no hay cosas, sólo dirhams y tesoros.

El ejemplo noveno, ya lo anunciaba cuando comenzamos a examinar estos ejemplos, es peculiar por la presencia de mitades:

9. $(10 + x/2) \cdot (1/2 - 5x)$

> Si se dice: diez dirhams y media cosa por medio dirham menos cinco cosas, tú dices: medio dirham por diez, cinco dirhams aditivos; y medio dirham por media cosa, un cuarto de cosa aditivo, y menos cinco por diez dirhams, cincuenta raíces substractivas. Resulta la suma de todo entonces cinco dirhams menos cuarenta y nueve raíces y tres cuartos de raíz. Multiplicas luego cinco raíces substractivas por media raíz aditiva. Resulta dos tesoros y medio substractivos. Es entonces cinco dirhams menos dos tesoros y medio y menos cuarenta y nueve raíces y tres cuartos de raíz. (Rashed, 2007, pp. 128-129; Hughes, 1986, p. 243).

Este ejemplo nos hace ver de nuevo que la presencia de fracciones era una dificultad notable para los cálculos, pero no nos vamos a entretener más que en constatarlo.

El último ejemplo muestra, en primer lugar, que es necesario decir explícitamente que “diez y cosa” es lo mismo que “cosa y diez”.

10. $(10 + x) \cdot (x - 10)$

> Si se dice: diez y cosa por cosa menos diez. Es como si se hubiera dicho: cosa y diez por cosa menos diez. Tú dices: cosa por cosa, tesoro aditivo; diez por cosa, diez cosas aditivas; menos diez por cosa, diez cosas substractivas. Se anula lo aditivo con lo substractivo y queda el tesoro. Y menos diez por diez, cien substraído del tesoro. Resulta pues un tesoro menos cien dirhams. (Rashed, 2007, pp. 128-129; Hughes, 1986, p. 243).

Aquí, la oposición de los dos términos que son de la misma especie se enuncia sin tanta precisión como en el ejemplo octavo, y como después de las tres primeras multiplicaciones sólo queda el tesoro, la cuarta multiplicación, que da un resultado substractivo, se enuncia como “cien substraído del tesoro”. Pero eso no completa el cálculo, sino que el resultado se da con la expresión algebraica en su forma esquemática y estereotipada: “un tesoro menos cien dirhams”.

Después de este último ejemplo, al-Khwārizmī termina el capítulo “Sobre la multiplicación” recapitulando:

> Y para todo lo que se obtiene por la multiplicación de aditivo y substractivo, como menos cosa por cosas añadidas, el último producto es substractivo siempre. (Rashed, 2007, pp. 128-129; Hughes, 1986, p. 243).

El cálculo con especies

Al-Khwārizmī sólo trata con tres especies: tesoros, raíces y simples números. En el capítulo “Sobre la multiplicación”, que hemos examinado, desarrolla un cálculo con expresiones en las que está la cosa y enseña a calcular con las cosas “si están solas, si están con un número, si están disminuidas en un número o si están restadas de un número”. Con ello trata todas las multiplicaciones entre expresiones con especies que pueden aparecer en su cálculo; cualquier otra multiplicación exigiría ampliar la serie de las especies, incluyendo el cubo, el tesoro tesoro, el tesoro cubo, etc., como hicieron tras él sobre todo al-Karajī, as-Samaw’al y los que les siguieron. En los otros dos capítulos al-Khwārizmī aborda las tres operaciones aritméticas que faltan: adición, substracción y división. Sin embargo, en estos capítulos al-Khwārizmī no sigue calculando con la cosa; de hecho, la palabra “cosa” ni siquiera aparece una sola vez en ellos. Las expresiones con las que al-Khwārizmī calcula en estos dos capítulos son algunas expresiones con especies y, sobre todo, expresiones en las que aparecen radicales.

No examinaré los dos capítulos completos como he hecho en el caso del capítulo “Sobre la multiplicación”, sino que me limitaré a examinar unos cálculos que presenta en el capítulo “Sobre la adición y la substracción” que son peculiares. En el conjunto de estos dos capítulos, el estilo de presentación es bastante diferente del que hemos visto que al-Khwārizmī utiliza en el capítulo “Sobre la multiplicación”: no hay aquí modelo concreto alguno a partir del cual se le dé sentido a los cálculos algebraicos. Los cálculos que vamos a examinar tienen la peculiaridad, además, de que al-Khwārizmī los demuestra mediante figuras en dos casos, y dice que no es posible demostrarlo mediante figuras en otro, pero que en ese caso se puede hacer una demostración “con palabras”. Esta “demostración con palabras” puede verse como el germen de la demostración puramente algebraica.

Los dos primeros cálculos no son cálculos con especies sino con radicales, en concreto la adición y la substracción de dos binomios con radicales cuadráticos que son irracionales:

$$\left(\sqrt{200}-10\right)+\left(20-\sqrt{200}\right)$$

y

$$\left(20-\sqrt{200}\right)-\left(\sqrt{200}-10\right)$$

Veamos cómo enuncia al-Khwārizmī los cálculos:

> Que sepas que la raíz de doscientos menos diez, sumada a veinte menos la raíz de doscientos, es igual a diez.
> La raíz de doscientos menos diez restada de veinte menos la raíz de doscientos es treinta menos dos raíces de doscientos, y dos raíces de doscientos es la raíz de ochocientos (Rashed, 2007, pp. 130-131; Hughes, 1986, p. 243).

Los otros cálculos son la adición y la substracción de dos expresiones algebraicas que ambas contienen las tres especies:

$(100 + x^2 - 20x) + (50 + 10x - 2x^2)$
y
$(100 + x^2 - 20x) - (50 + 10x - 2x^2)$

Veamos cómo enuncia al-Khwārizmī los cálculos:

> Cien y tesoro menos veinte raíces, a lo que se añade cincuenta y diez raíces menos dos tesoros, resulta ciento cincuenta menos un tesoro y menos diez raíces (Rashed, 2007, pp. 130-131; Hughes, 1986, p. 243).
> Cien y tesoro menos veinte raíces, de lo que se substrae cincuenta y diez raíces menos dos tesoros, resulta cincuenta dirhams y tres tesoros menos treinta raíces (Rashed, 2007, pp. 130-131[5]).

Tras esos enunciados en los que nada se explica, al-Khwārizmī promete demostraciones:

> Te muestro su causa verdadera de una forma que te conduce a lo que se busca, si Dios quiere (Rashed, 2007, pp. 130-131; Hughes, 1986, p. 243).

Las demostraciones no están, sin embargo, a continuación de estos enunciados, sino que al-Khwārizmī continúa el capítulo "Sobre la adición y la substracción" con cuestiones cómo "duplicar la raíz de cualquier tesoro, conocido o sordo", triplicarla, etc., cuestiones que no vamos a examinar, y sólo al final del capítulo "Sobre la división" aparecen las demostraciones.

La primera de ellas, que pretende demostrar que efectivamente

$$\left(\sqrt{200}-10\right)+\left(20-\sqrt{200}\right)=10$$

es una demostración hecha mediante una figura, que se construye para representar las expresiones y ver en ella que los cálculos dan lo que se ha dicho que dan. En la figura 1 indicamos cómo están representadas las expresiones en la figura que al-Khwārizmī construye. La figura 2 es la que aparece en la edición de Masharrafa y Ahmad del texto de al-Khwārizmī (Masharrafa y Ahmad, 1939 p. 33).
La demostración comienza como sigue:

> En cuanto a la causa de la raíz de doscientos menos diez añadida a veinte menos la raíz de doscientos, ésta es la figura: la recta AB es la raíz de doscientos: de A al punto B es el diez, y lo que queda de la raíz de doscientos es el resto de la recta AB, es decir la recta CB (Rashed, 2007, pp. 136-137; Hughes, 1986, p. 245).

Al-Khwārizmī comienza pues construyendo un segmento AB para representar la raíz de doscientos (que es irracional, "sorda", en la terminología de al-Khwārizmī) en el que señala un segmento igual a diez para tener así representado tanto la raíz de doscientos como el binomio inicial, raíz de doscientos menos diez.

> Construye luego una recta del punto B al punto D, la recta veinte, que es el doble de la recta AC, que es diez (Rashed, 2007, pp. 136-137; Hughes, 1986, p. 245).

Lo que le va a añadir al binomio inicial, no lo representa a continuación del segmento ya construido, como parecería natural para representar la adición como yuxtaposición de segmentos, sino que en otra recta (dispuesta perpendicularmente a la anterior, pero el hecho de que aparezca perpendi-

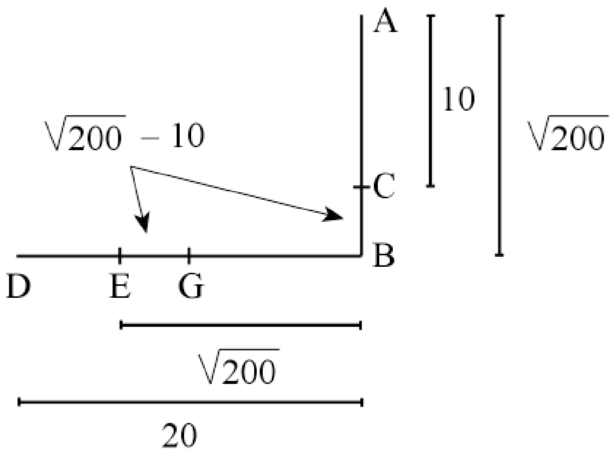

Figura 1

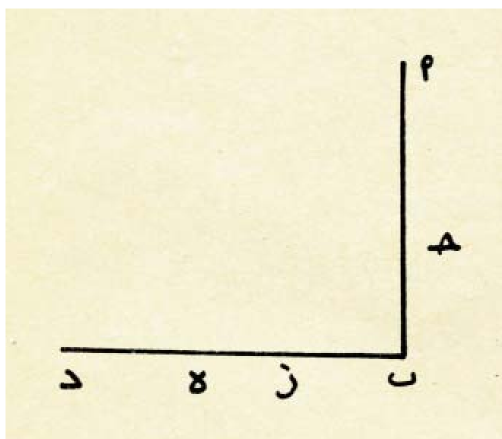
Figura 2

cular en la figura no desempeña papel alguno) va a representar el otro binomio, comenzando para ello por la cantidad a la que se le substrae algo, en este caso, por el veinte. El segmento *BD* se construye de manera que sea el doble del segmento *AC*, ya que éste representa diez, y ahora se trata de representar veinte. De la misma manera, llevará a ese nuevo segmento otro igual a la raíz de doscientos, para representar así veinte menos la raíz de doscientos, es decir, el binomio que se suma al inicial:

> Del punto B al punto E una igual a la recta AB, es también la raíz de doscientos. El resto del veinte es del punto E al punto D (Rashed, 2007, pp. 136-137; Hughes, 1986, p. 245).

Con los dos binomios representados, ya está en condiciones de representar su adición:

> Ya que queremos añadir lo que queda de la raíz de doscientos una vez quitado el diez, que es la recta CB, a la recta ED, que es veinte menos la raíz de doscientos, cortamos de la recta BE una recta igual a la recta CB, sea la recta GE (Rashed, 2007, pp. 136-139; Hughes, 1986, p. 245).

Es decir, al-Khwārizmī traslada ahora el segmento que representa raíz de doscientos menos veinte en la primera recta a la segunda recta, colocándolo a continuación del segmento que representa veinte menos la raíz de doscientos, de manera que esté a la vez separando una parte del segmento que representa a la raíz de doscientos. Entonces puede identificar los segmentos correspondientes en las dos rectas que ha construido.

> Ahora bien, es evidente que la recta AB, que es la raíz de doscientos, es igual a la recta BE; que la recta AC, que es el diez, es igual a la recta BG, y que el resto de la recta AB que es CB, es igual al resto de la recta GE (Rashed, 2007, pp. 138-139; Hughes, 1986, p. 245).

Con lo que puede proceder a ver que, representada así la adición de los dos binomios en la segunda recta, el resultado es el que había enunciado.

> Añadimos a la recta ED la recta GE; será evidente que se ha substraído de la recta BD, que es veinte, una recta igual a la recta AC, que es diez, es decir, la recta BG, y que nos queda la recta GD, que es diez (Rashed, 2007, pp. 138-139; Hughes, 1986, p. 245).

Y concluye:

> Lo que había que demostrar. He aquí la figura (Rashed, 2007, pp. 138-139; Hughes, 1986, p. 245).

La demostración es del mismo estilo que la que al-Khwārizmī hace de los algoritmos de resolución de las formas canónicas compuestas. Una demostración cuya garantía de verdad reside en que se ve lo que se quiere demostrar en una figura en la que se representan los objetos algebraicos (en este caso mediante segmentos) y las operaciones con ellos (mediante operaciones de cortar, trasladar y pegar, en este caso los segmentos). En ningún caso se duda que lo que se vea pueda ser engañoso, continuamente está diciendo al-Khwārizmī “es evidente que” (Cremona traduce “ergo manifestum est nobis”, “por tanto es evidente para nosotros”).

Por tanto, al-Khwārizmī no busca la garantía de verdad en un conjunto establecido de proposiciones que se aceptan como verdaderas y de procedimientos de derivación de nuevas proposiciones verdaderas a partir de las ya establecidas. Es decir, no son demostraciones que se sustenten en el edificio euclídeo de definiciones, nociones comunes, postulados y proposiciones derivadas a partir de ellos. Son demostraciones hechas con figuras geométricas, pero no demostraciones geométricas (en el sentido euclídeo).

La segunda de las demostraciones es del mismo estilo. En la figura 3 indicamos cómo están representadas las expresiones en la figura que al-Khwārizmī construye. La figura 4 es la que aparece en la edición de Masharrafa y Ahmad del texto de al-Khwārizmī (Masharrafa y Ahmad, 1939 p. 34).

> En cuanto a la causa de la raíz de doscientos menos diez substraída de veinte menos raíz de doscientos, he aquí la figura: la recta AB es la raíz de doscientos; de A al punto C, es el diez conocido. Construyamos del punto B al punto D una recta y pongámosla veinte. Pongamos del punto B al punto E una recta igual a la recta raíz de doscientos, que es igual a la recta AB. Es evidente que la recta CB es lo que queda de la raíz de doscientos, una vez quitado el diez, y que la recta ED es lo que queda de veinte una vez quitada la raíz de doscientos. (Rashed, 2007, pp. 138-139; Hughes, 1986, p. 246).

La representación comienza de la misma manera que en el caso anterior, ya que los binomios son los mismos, pero ahora se trata de substraer uno de otro en vez de sumarlos, por lo que la construcción del segundo segmento ha de ser distinta. El diez que está substraído del binomio que se substrae, lo coloca en la figura añadido al segmento que representa el binomio del que se tiene que substraer, en la derecha del segmento que lo representa (ver la figura 3).

> Queremos substraer la recta CB de la recta ED. Construyamos una recta desde el punto B al punto G, que se igual a la recta AC, que es diez. La recta GD entera será pues igual a la recta GB, y la recta BD. Ahora bien, es evidente que todo esto es treinta. (Rashed, 2007, pp. 138-141; Hughes, 1986, p. 246).

El resto de la demostración transcurre de forma similar a la anterior:

> Es evidente que la recta BE es la raíz de doscientos, y que la recta GB y BC es igualmente la raíz de doscientos. Ya que la recta EH se ha hecho igual a la recta CB, será evidente que lo que se ha substraído de la recta GB, que es treinta, es dos raí-

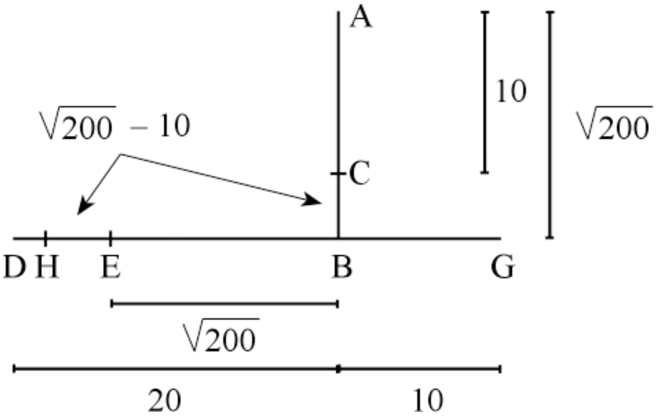

Figura 3

ces de doscientos. Pero dos raíces de doscientos es la raíz de ochocientos (Rashed, 2007, pp. 140-141; Hughes, 1986, p. 246).

Y concluye:

Lo que había que demostrar. He aquí la figura (Rashed, 2007, pp. 140-141; Hughes, 1986, p. 246).

La tercera demostración que vamos a examinar es diferente, y no tiene parangón con ninguna de las demostraciones que al-Khwārizmī hace en su libro. No es una demostración con figuras geométricas del estilo "ingenuo", con la garantía de verdad en lo que se ve, sin dudar de ello, que acabamos de ver en práctica en las dos demostraciones anteriores. Lo que al-Khwārizmī quiere demostrar no es ahora un cálculo con radicales, sino una adición de dos expresiones con especies, cuyo resultado ha enunciado en el capítulo "Sobre la adición y la substracción" unas páginas antes[6]:

$$(100 + x^2 - 20x) + (50 + 10x - 2x^2) = 150 - x^2 - 10x$$

El mismo al-Khwārizmī explica por qué no va a hacer una demostración con figuras:

En cuanto a cien y un tesoro menos veinte raíces, a las que se añaden cincuenta y diez raíces menos dos tesoros, no le conviene ninguna figura porque está compuesta por tres especies diferentes, tesoros, raíces y números, y no hay con ellas lo que les sea igual, para que pueda ser representado en una figura (Rashed, 2007, pp. 140-141; Hughes, 1986, pp. 246-247).

En las demostraciones mediante figuras de los algoritmos de solución de las formas canónicas compuestas que hace al-Khwārizmī, la manera que tiene de representar las tres especies depende efectivamente de que lo que ha de representar es una ecuación. En efecto, al-Khwārizmī representa los tesoros mediante cuadrados y las raíces mediante rectángulos en los que un lado representa la raíz (del tesoro) y el otro el número de raíces, con lo que las raíces es también una superficie.
Para representar la tercera especie, los simples números, al-

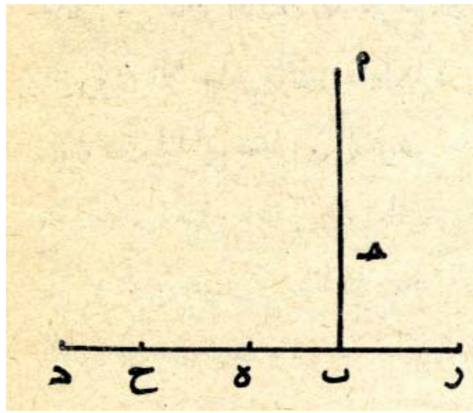

Figura 4

Khwārizmī recurre al artificio de que éstos estén representados por toda la superficie de la figura, lo que puede hacer ya que los simples números están relacionados con las otras dos especies por substracción o adición en las ecuaciones. Esto no puede hacerse si no se trata de representar una ecuación, sino una expresión algebraica como las que tiene que representar ahora, por eso dice al-Khwārizmī que "no le conviene una figura" porque tiene las tres especies y "no hay con ellas lo que les sea igual".

Al-Khwārizmī concluye esta explicación con una frase enigmática:

Pudimos hacer una figura de ello, pero no sensible (Rashed, 2007, pp. 140-141; Hughes, 1986, p. 247).

Nada más nos dice al-Khwārizmī de esa "figura no sensible", porque ante esta dificultad abandona el recurso a las figuras sensibles en las que cortar, trasladar y pegar para ver lo que se quiere demostrar (y tampoco recurre a esa enigmática "figura no sensible"), para hacer lo que podemos llamar el primer precursor del que tenemos noticia de una demostración puramente algebraica: una demostración que se hace simplemente en el terreno de la expresión en el sistema de signos del álgebra sin recurso a las figuras. Al-Khwārizmī la llama demostración mediante palabras (*al-lafz*), o por la expresión (Cremona traduce "verbis", "por las palabras"):

En cuanto a su necesidad es evidente en palabras[7] [por la expresión] (Rashed, 2007, pp. 140-141; Hughes, 1986, p. 247).

Ésta es la demostración "por la expresión" o "en palabras":

Sabes en efecto que tienes cien y un tesoro menos veinte raíces. Ya que le has añadido cincuenta y diez raíces, resulta ciento cincuenta y un tesoro menos diez raíces porque estas diez raíces han restaurado las veinte raíces substraídas a diez raíces (Rashed, 2007, pp. 140-141; Hughes, 1986, p. 247).

Al-Khwārizmī trata las expresiones por partes, considerando que las dos que se van a añadir constan de una parte que es la cantidad digamos principal o inicial, y otra que es la cantidad que se le ha quitado, y por tanto le falta a la cantidad inicial, y ha de restaurarse en el curso de los cálculos, si se quiere llegar a una forma canónica. Ése es el sentido que tiene *al-jabr*, la operación fundamental del cálculo: la restauración de lo que falta. Lo primero que hace aquí al-Khwārizmī es restaurar las veinte raíces substraídas a la primera cantidad (cien y tesoro) con las diez raíces de la segunda cantidad, con lo que consigue restaurar parte de lo que le falta a la primera. Ahora puede tratar el caso de los dos tesoros que le faltan a la segunda cantidad:

> Queda pues ciento cincuenta y un tesoro menos diez raíces; había un tesoro con el cien; así, cuando has substraído de cien y un tesoro los dos tesoros substraídos de cincuenta, un tesoro se anula con un tesoro y te queda un tesoro. Resulta pues ciento cincuenta menos un tesoro menos diez raíces (Rashed, 2007, pp. 140-141; Hughes, 1986, p. 247).

Y concluye

> Lo que había que demostrar (Rashed, 2007, pp. 140-141; Hughes, 1986, p. 247).

inaugurando así una nueva forma de demostrar, cuya historia vale la pena indagar[8]. Sin embargo, no puedo dejar de pensar que me hubiera gustado ver esa "figura no sensible" que al-Khwārizmī dice haber hecho, pero que se guardó para sí.

HISTORIAS ■

NOTAS

[1] Se supone que el libro de cálculo hindú lo escribió al-Khwārizmī después del libro de álgebra, porque al comienzo de él cita el libro de álgebra. Aunque esa hipótesis es plausible, cabe que no fuera así ya que no se conserva ningún testimonio del libro de cálculo hindú que no esté mezclado con textos procedentes de otras fuentes (ver la entrega de estas historias de al-Khwārizmī subtitulada "Los Libros", Puig, 2008). Además, que al-Khwārizmī aún no hubiera escrito su libro de cálculo hindú no excluye que no conociera ya la representación de los números hindú que luego contribuiría decisivamente a difundir en todo el mundo.

[2] El historiador tunecino Mahdi Abdeljaouad hace, en su introducción a un texto del siglo XIV de Ibn al Hā'im, un comentario del mismo orden: "se ve funcionar una lengua matemática, totalmente retórica, pero que responde a las reglas lingüísticas específicas de la lengua algebraica" (Adbeljaouad, 2003, p. 11). Es ese responder a reglas específicas lo que permite hablar del sistema algebraico de signos del texto de al-Khwārizmī, aunque todo él sea "retórico", es decir, no use más materia de la expresión que la materia de la expresión de la lengua vernácula.

[3] En la traducción latina de Cremona, las cosas no son exactamente iguales. "Diez menos cosa por diez menos cosa" es "Decem re diminuta in decem re diminuta", en donde "diminuta" viene del verbo "diminuere", substraer, y, por tanto, está mas cerca de "cosa substraída" que de "menos cosa". En consecuencia, cuando Cremona traduce la frase contra la gramática árabe "*illā shay' fī illā shay' māl zā'id* (menos cosa por menos cosa, tesoro aditivo)", escribe "res diminuta in rem diminutam fit census additus", literalmente "cosa substraída por cosa substraída hace censo añadido", en la que no aparece "menos cosa", quizá gracias a la sintaxis latina.

[4] Sobre las complejas relaciones entre "cosa" y "raíz", ver la anterior entrega de estas historias, que subtitulé precisamente "La cosa" (Puig, 2011).

[5] Este cálculo no aparece en la traducción latina de Cremona.

[6] De la substracción de estas dos expresiones, que también aparece enunciada en el capítulo "Sobre la adición y la substracción", pero no en la traducción latina de Cremona, no da al-Khwārizmī ninguna demostración, ni la menciona al presentar esta demostración.

[7] Cremona traduce: "Eorum vero necessitas verbis manifesta est", "Cuya necesidad es evidente por las palabras [por la expresión].

[8] Véase un punto de vista para hacerlo en Puig (2009) y Puig (in press), y los resultados de algunas indagaciones en el trabajo de Infante (2010), que se han presentado parcialmente en Infante y Puig (2011).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abdeljaouad, M. (2003). *Sharh al-Urjūza al-Yasminīya d'Ibn Al-Hā'im* texte établi et commenté par Mahdi Abdeljaouad. Tunis: Association Tunisienne des Sciences Mathématiques.

Allard, A. (Ed.). (1992). *Muhammad ibn Mūsā al-Khwārizmī. Le calcul indien (Algorismus).* Paris: Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard.

Anbouba, A. (1978). L'algèbre arabe aux IXe et Xe siècles. Aperçu général. *Journal for the History of Arabic Science*, 2, pp. 66-100

Hughes, B. (1986). Gerard of Cremona's translation of al-Khwārizmī's al-jabr: A critical edition. *Mediaeval Studies 48*, 211-263.

Infante, J. F. (2010). *Un estudio de las demostraciones de los algoritmos de solución de las formas canónicas de las ecuaciones de segundo grado en al-Khwārizmī, Abū Kāmil, Marc Aurel, Juan Pérez de Moya y Pedro Nunes.* Trabajo Fin del Máster de Investigación en Didácticas Específicas. Universitat de València.

Infante, F. y Puig, L. (2011). Una comparación entre las demostraciones de Pedro Nunes y al-Khwārizmī de los algoritmos de las formas canónicas de la ecuación de segundo grado. *Congresso Ibero-americano de História do Ensino da Matemática*. Comunicación. Covilhã, 26 a 29 de mayo de 2011.

Masharrafa, A. M. y Ahmad, M. M. (Eds.) (1939). *Al-Khwārizmī, Muhammad ibn Mūsa. Kitāb al-mukhtasar fī hisāb al-jabr wa'l-muqābala*. Cairo: al-Qahirah. Reprinted 1968

Nesselman, G. H. F. (1842). *Versuch einer Kritischen Geschichte der Algebra, 1. Teil. Die Algebra der Griechen*. Berlin: G. Reimer.

Puig, L. (2008). Historias de al-Khwārizmī (2ª entrega). Los Libros. *Suma*, 59, pp. 105-112.

Puig, L. (2009). Naïve, geometric and algebraic proof in ancient and modern times. Talk to the meeting *Semiotic Approaches to Mathematics, the History of Mathematics, and Mathematics Education (SemMHistEd) – 3rd Meeting.* Aristotle University of Thessaloniki, July 16-17, 2009.

Puig, L. (2010). Historias de al-Khwārizmī (4ª entrega). El proyecto algebraico. *Suma*, 65, pp. 87-94.

Puig, L. (2011). Historias de al-Khwārizmī (5ª entrega). La cosa. *Suma*, 66, pp. 89-100.

Puig, L. (in press). Researching the History of Algebraic Ideas from an Educational Point of View. In. V. Katz & C. Tzanakis (Eds.) *Recent Developments on Introducing a Historical Dimension in Mathematics Education*. The Mathematical Association of America.

Rashed, R. (Ed.). (2007). *Al-Khwārizmī. Le commencement de l'algèbre.* Paris: Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard.

Vieta, F. (1591). *In artem Analyticem Isagoge.* Turonis: Iametium Mettayer Typographum Regium.

Este artículo fue solicitado por *Suma* en febrero de 2011 y aceptado en mayo de 2011 para su publicación