COMPETENCIAS ALGEBRAICAS EN EL PROCESO DE MODELIZACIÓN

Luis Puig[1] y Onofre Monzó[2]

(1) Departamento de Didáctica de las Matemáticas / Departamento de Matemática Educativa
Universidad de Valencia / Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, México
(2) IES Veles e Vents. Torrent

Puig, L. y Monzó, O. (2008). Competencias algebraicas en el proceso de modelización. Por aparecer en *Actas de las VIII Jornades d'Educació Matemática de la Comunitat Valenciana*.

COMPETENCIAS ALGEBRAICAS EN EL PROCESO DE MODELIZACIÓN[1]

Luis Puig[1] y Onofre Monzó[2]

(1) Departamento de Didáctica de las Matemáticas / Departamento de Matemática Educativa
Universidad de Valencia / Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, México
(2) IES Veles e Vents. Torrent

INTRODUCCIÓN. ASPECTOS DEL ÁLGEBRA EN EL CURRÍCULO DE SECUNDARIA.

En el documento de discusión para el ICMI Study *The Future of the Teaching and Learning of Algebra* (Stacey, et al., 2000) se incluyen algunas preguntas referidas al uso de datos reales en la enseñanza del álgebra, en las que se plantea, entre otras cosas, qué consecuencias tiene este uso en el dominio del manejo de las expresiones algebraicas por parte de los estudiantes. Esto es importante por varios motivos. En primer lugar porque el álgebra en el currículo de secundaria ha de presentarse, al menos, desde tres puntos de vista: el álgebra como un sistema de signos en que realizar los procesos de generalización, abstracción y demostración; el álgebra como un instrumento para la resolución de problemas a través de la traducción de éstos a sistemas de ecuaciones o gráficas de funciones, y el álgebra como sistema de signos que permite que los fenómenos modelados mediante funciones se organicen en familias, cuyas características se establecen y se estudian en el plano de la expresión.

El primero de estos aspectos conduce a la elaboración de materiales de enseñanza en los que se estudien pautas en configuraciones geométricas o en conjuntos ordenados de números, se elaboren conjeturas expresadas en el lenguaje del álgebra, y se demuestren esas conjeturas por procedimientos en los que el dominio de las transformaciones de las expresiones algebraicas es importante. Las expresiones algebraicas pueden adquirir significado para los estudiantes al resolver estas situaciones de enseñanza en la medida en que permiten expresar de forma general relaciones que representan las configuraciones geométricas o las series de números. Y las transformaciones algebraicas tienen sentido en la medida en que pueden dar cuenta del hecho de que expresiones algebraicas distintas, obtenidas por ejemplo por alumnos distintos en una misma sesión de trabajo, representan la misma configuración geométrica o serie de números, lo que atestigua la posibilidad de pasar de una a otra a través de esas transformaciones.

El segundo de los aspectos corresponde a la resolución algebraica de problemas de enunciado verbal, es decir, a la resolución de problemas tal y como la establece el Método Cartesiano[2]. En este caso, las expresiones algebraicas son el resultado de un proceso de traducción vía una lectura analítica del enunciado que lo reduce a cantidades y relaciones entre ellas, y para los aprendices tienen el significado que traen de ese

---

[1] Esta investigación se ha realizado con una ayuda de la Dirección General de Investigación del Ministerio de Educación y Ciencia de España, ref. SEJ2005-06697/EDUC.

[2] Ver un análisis histórico del Método Cartesiano, y su presentación desglosado en pasos, que permiten considerar cuáles son los elementos que constituyen la competencia en la resolución algebraica de problemas verbales en Puig (2003, 2006) y Puig & Rojano (2004).

proceso de traducción (significado del que tendrán que desprenderse en algún momento, para realizar sin obstrucciones las transformaciones algebraicas, y al que habrán de saber volver, para llevar el resultado de la ecuación al resultado del problema[3]). Las transformaciones algebraicas tienen sentido aquí en la medida en que garantizan que cualquier ecuación podrá llevarse a una forma canónica, y, por tanto, podrá resolverse, ya que las formas canónicas se saben resolver, con lo que, en consecuencia, cualquier problema puede resolverse.

El tercero de los aspectos es el que nos ocupa en el trabajo que presentamos aquí. En este caso las expresiones algebraicas representan relaciones funcionales y su significado está ligado a los procesos de traducción entre ellas, las tablas de datos numéricos y las representaciones gráficas cartesianas, que, con el soporte de la calculadora gráficas se realizan de forma automática, mediando, en su caso, decisiones del usuario de la calculadora sobre la ventana con que se mira la gráfica, el tamaño del incremento y de la longitud de la tabla, o la expresión algebraica concreta elegida para representar la relación funcional. Las transformaciones algebraicas tienen sentido aquí de nuevo en la medida en que garantizan que cualquier expresión algebraica podrá llevarse a una forma canónica. Pero, en este caso, las formas canónicas están elegidas de manera que sus coeficientes (o parámetros) indiquen directamente propiedades de los fenómenos modelados con esas expresiones.

En los tres casos, las transformaciones algebraicas tienen sentido, no en sí mismas, sino por la posibilidad que ofrecen de mostrar que expresiones distintas pueden representar una misma situación, y porque permiten obtener aquéllas expresiones que son más convenientes para el tratamiento de la situación. Es harto conocido que los alumnos a menudo manipulan las expresiones algebraicas siguiendo reglas aprendidas de forma mecánica, sin que le vean sentido a lo que hacen. Esto puede atribuirse a su trabajo desligado de las situaciones que le dan sentido, en ejercicios en los que lo único que se plantea es la mera ejecución de las reglas de transformación. En el trabajo que presentamos aquí pretendemos que los alumnos puedan aprender las transformaciones algebraicas con sentido, precisamente porque éstas aparecen en uno de los tres contextos que hemos analizado.

Pero además, en nuestro caso, las relaciones funcionales las vamos a estudiar a partir de datos reales obtenidos mediante diversos sensores que se pueden acoplar a una calculadora gráfica. En efecto, las calculadoras gráficas permiten que sea posible que los datos reales sean obtenidos en experimentos realizados en las aulas, y que sean presentados en tres sistemas de signos –tablas, gráficas cartesianas y expresiones algebraicas– a través de un proceso de modelización. Examinaremos pues las características más importantes de los procesos de modelización, en particular cuando se realizan mediando el instrumento de las calculadoras gráficas.

EL PROCESO DE MODELIZACIÓN Y LA CONCEPCIÓN FENOMENOLÓGICA DE LA NATURALEZA DE LAS MATEMÁTICAS.

En primer lugar, la modelización conlleva naturalmente una concepción de la naturaleza de las matemáticas del estilo de la que hemos descrito en Puig (1997), a partir de las ideas de Freudenthal. En efecto, si los conceptos matemáticos se elaboran en la historia

[3] Sobre este asunto véase Filloy, Puig y Rojano (2008).

como medios de organización de fenómenos de la experiencia (matemática), y el proceso de modelización pretende organizar algún fenómeno mediante algún concepto matemático, la similitud está a la vista. La diferencia reside en el hecho de que en el proceso de modelización no se elabora ningún concepto nuevo, sino que se selecciona uno de los ya existentes que se considera idóneo para la organización del fenómeno en cuestión. Ahora bien, la similitud indica que es conveniente y adecuado usar procesos de modelización en la enseñanza con el fin de que los estudiantes elaboren y refinen los conceptos en cuestión en íntima relación con los fenómenos para los cuales son un medio de organización, esto es, teniendo presente en el propio proceso de enseñanza y aprendizaje lo que constituye el centro de la naturaleza de las matemáticas.

ELEMENTOS DEL PROCESO DE MODELIZACIÓN

De manera esquemática, podemos decir que en cualquier proceso de modelización están presentes los elementos siguientes:

1. Un fenómeno que se describe mediante algunas medidas de algunas magnitudes.
2. Una regresión[4] entre las medidas.
3. Un tipo de función que se ajusta mediante esa regresión.
4. Una decisión sobre el tipo de función que se va a ajustar de entre un catálogo de funciones disponibles, basado en:
   4.1. Un conocimiento de propiedades cualitativas del fenómeno.
   4.2. Un conocimiento de propiedades cualitativas de los tipos de funciones disponibles.
5. La determinación de la función concreta de ese tipo que describe los datos obtenidos de ese fenómeno concreto observado.
6. La expresión de la función en una forma canónica, elegida de manera que los parámetros expresen propiedades del fenómeno que interesa resaltar.

Un examen somero de esa relación nos permite avanzar que, para realizar un proceso de modelización, son necesarias competencias en:

1. Propiedades cualitativas de los tipos de funciones disponibles.
2. Análisis cualitativo del fenómeno que se va a observar, con respecto al mismo tipo de propiedades.
3. Formas canónicas de los tipos de funciones.
4. Significado de los parámetros en las formas canónicas.
5. Efecto de los cambios en los parámetros en las propiedades cualitativas.
6. Transformaciones algebraicas para llevar una expresión algebraica a una forma canónica.
7. Análisis cualitativo de las limitaciones del modelo.

Los puntos 1 y 2 muestran la importancia del conocimiento cualitativo tanto del fenómeno como de diversos tipos de funciones, ya que en el proceso de modelización

---

[4] El uso de la regresión no es necesario en situaciones simples, en las que quepa calcular los parámetros de la función que se va a proponer como modelo que da cuenta de la nube de puntos, directamente a partir de alguno de los datos. Así lo hacemos en Monzó y Puig (2007).

desempeñan un papel muy importante esos conocimientos en la toma de decisiones sobre qué tipo (o tipos) de función va a ser el que se va a usar como modelo (o cuáles se van a comparar), y en la posterior adecuación de la función ya obtenida como modelo para predecir otros valores del fenómeno que no se han obtenido experimentalmente.

Los puntos 3 y 4 muestran la importancia del conocimiento de las formas canónicas por el significado de sus parámetros y el efecto de los cambios de éstos en lo que ha permitido tomar la decisión de usar ese tipo de ecuación en la modelización, y dan paso al punto 6. Esa competencia en la transformación algebraica de expresiones para llevarlas a una forma canónica conlleva la competencia en el análisis medios-fines. Finalmente, el punto 7 apunta a la competencia en la crítica del modelo.

Cuando está en juego el uso de una calculadora gráfica, alguna de esas competencias se derivan del alumno a la propia calculadora, ya que, podemos considerar "a la calculadora como un ejecutante de reglas matemáticas de forma competente. Si la instrucción que se le da es pertinente, la realizará de manera competente y, así, ejecutará las nuevas tácticas necesarias para llevar a cabo una estrategia de resolución, ideada para resolver una situación problemática matemática" (Filloy, 2006, p. 131). En algún sentido quedan como responsabilidad del humano las competencias estratégicas y de la máquina las competencias tácticas del proceso de modelización. Sin embargo, hay nuevas competencias que los alumnos han de adquirir en el uso de las calculadoras gráficas que no son de naturaleza estratégica, en las que no vamos a entrar aquí.

ESBOZO DE UN CUESTIONARIO

Con el fin de estudiar las actuaciones de los alumnos cuando se les enseña el proceso de modelizar teniendo en cuenta que la competencia en el proceso contiene al menos lo que hemos mencionado en el apartado anterior, hemos establecido un esquema para elaborar cuestionarios que contempla tres ejes:

1. Pura sintaxis (Manipulación de expresiones algebraicas).
   a. Manipulación de expresiones.
   b. Manipulación de expresiones para ponerlas en una forma determinada (formas canónicas de las familias de funciones)
2. Modelización (asociación de un fenómeno, situación, problema real…a una familia funcional)
   a. Elección de una gráfica (dada por un dibujo) para un problema.
   b. Elección de una familia de funciones (dada por su forma canónica) para un problema.
3. Traducción cualitativa entre representaciones (Reconocimiento de familias funcionales)
   a. Detección de la modificación de la gráfica cuando cambia un parámetro de en la expresión algebraica.
   b. Elección de una gráfica para una familia.

Las formas que hemos considerado canónicas son las que se pueden expresar de forma general como

$$y = a\,(f\,(bx + c)) + d$$

Por ejemplo,

$$y = a\,x + b$$

para la función lineal,

$$y = a\,(x + b)^2 + c$$

para la función cuadrática,

$$y = \frac{a}{x + b}$$

para la función de proporcionalidad inversa,

$$y = a\,e^{bx + c} + d$$

para la función exponencial, y

$$y = a\,\mathrm{sen}(b(x+c))+d$$

para una función trigonométrica.

Expresadas de esta manera, las modificaciones en los parámetros tienen los efectos siguientes, para cualquiera de estas formas canónicas:

> a dilata en la dirección del eje de las Y
> b dilata en la dirección del eje de las X
> c desplaza en la dirección del eje de las X
> d desplaza en la dirección del eje de las Y

Pero no sólo hemos considerado estas formas canónicas en el cuestionario, sino que también hemos introducido otras formas canónicas, que responden al interés por otro tipo de propiedades cualitativas de las funciones, como puede verse en las preguntas que hemos elaborado para el apartado 1.b del esquema del cuestionario

i. Transforma la expresión $2x^2+4x-6$ en otra equivalente de la forma $a(x+b)^2+c$.
ii. Transforma la expresión x^2+2x-3 en otra equivalente de la forma $a(x+b)^2+c$.
iii. Transforma la expresión $2x^2+4x-6$ en otra equivalente de la forma $a(x-b)(x-c)$.
iv. Trasforma la expresión $5·3^x + 3·3^x$ en otra equivalente de la forma $a·3^{bx}$.

en las que pedimos que una expresión, $2x^2+4x-6$, se transforme en dos equivalentes de dos formas canónicas distintas: $a(x+b)^2+c$ y $a(x-b)(x-c)$.

LOS MATERIALES PARA LA ENSEÑANZA

En Monzó y Puig (2007), presentamos de forma detallada el desarrollo en un aula de una actividad de modelización que puede realizarse en los niveles más bajos de la Educación Secundaria, porque el modelo funcional adecuado es la función lineal. Se

trata del alargamiento de un muelle en función del peso colocado en uno de sus extremos, cuando el muelle está colgado del otro extremo.
En la secuencia que presentamos, no utilizamos las funciones de la calculadora para encontrar la función de regresión, ese aspecto del proceso de modelización que antes hemos dicho que es táctico y no estratégico, sino que calculamos la pendiente *m* a partir de dos puntos de la nube, elegidos convenientemente, observamos que la recta $y=mx$ es paralela a la nube de puntos y la movemos hasta la nube de puntos sumándole la ordenada en el origen, que la tomamos directamente de la tabla de valores de los datos.
Sólo luego calculamos al recta de regresión con la opción correspondiente de la calculadora gráfica, para comparar los parámetros que hemos calculado con los que ésta obtiene.

Aquí vamos a presentar unas experiencias más complejas, para las que proponemos obtener la función de regresión con la calculadora gráfica, y en las que las transformaciones de las expresiones son también de naturaleza más compleja.

Enfriamiento de un cuerpo

En esta experiencia vamos a analizar la función que describe el enfriamiento de un cuerpo a partir de una temperatura aproximada de unos 70ºC. Para ello tomaremos 36 datos espaciados, cada uno del siguiente, unos cuantos segundos (dos o tres segundos será suficiente), a partir del momento en que el sensor sea separado de la fuente de calor. Posteriormente, repetiremos la experiencia comenzando en una temperatura menor. Ajustaremos ambas representaciones de datos a funciones. Compararemos dichas funciones y analizaremos sus diferencias.

Material necesario

- Unidad EA 200
- Calculadora gráfica ClassPad 300
- Sonda de temperatura
- Programa E-ConEA200
- Recipiente y líquido, en nuestro caso, agua.
- Fuente de calor
- Termómetro

Desarrollo de la experiencia

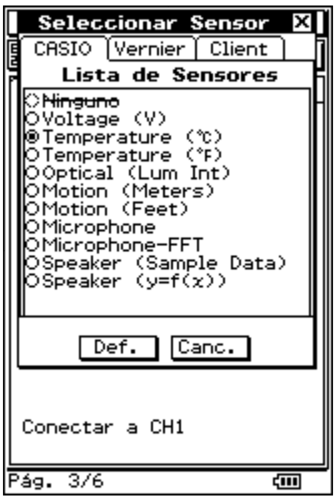
El profesorado deberá hacer una pequeña introducción en la que presenten cuáles son los elementos con los que se va a trabajar. Simplemente identificarlos, y plantear la siguiente pregunta: ¿Sabemos cuál es el modelo que describe cómo se enfrían los cuerpos? O, dicho de otra manera, supongamos que tenemos un cuerpo muy caliente o con temperatura alta, y se le deja enfriar. ¿Cuál es la función que describe la temperatura del cuerpo en cualquier instante?
El profesor o la profesora colocará el extremo de la sonda dentro del vaso con agua caliente, la sonda conectada al EA-200, y este conectado a la calculadora.

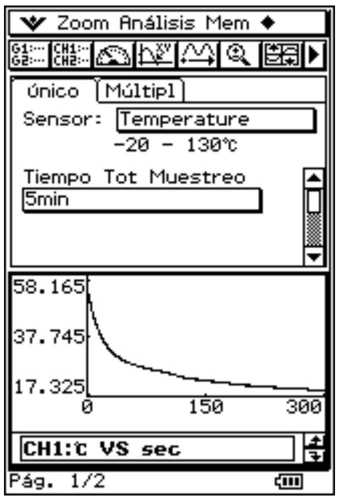
Se puede establecer un corto debate, en el que las opiniones irán orientando la atención hacia una función decreciente y con una forma determinada. Es conveniente que se hable sobre estas dos cuestiones en el caso de que no salgan espontáneamente: tendencia y forma. Sería interesante en este momento pedir a los alumnos y las alumnas que emitieran una hipótesis al respecto y por tanto, que hicieran un esbozo de cuál será la gráfica que esperan encontrar cuando hayan realizado la experiencia.

Podemos profundizar en los distintos modelos funcionales y su relación con el tipo que gráfica que generan, y a este respecto, se le puede pedir al estudiante que razone qué modelo funcional va asociado con cada uno de las distintas gráficas, justificando en cada caso cual corresponde al experimento estudiado. Para ello se puede disponer del modelo, que ya se trabajo en el problema de la presión.

A continuación el profesor ejecuta la aplicación 

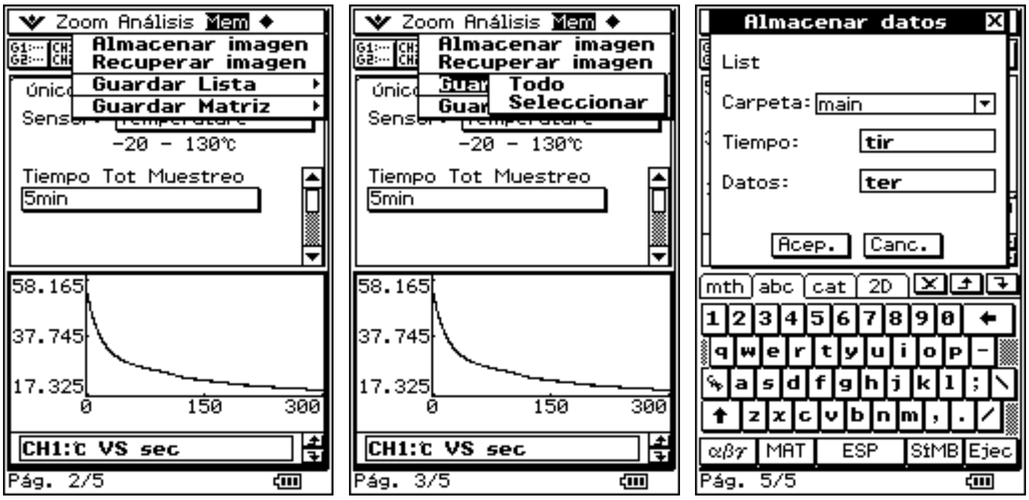
y siguiendo las instrucciones del programa, indica que la toma de datos de temperatura sea cada dos o tres segundos como máximo. Después, saca el extremo de la sonda del vaso con agua caliente en el instante en el que la máquina empieza a tomar datos de temperatura.





En la pantalla se observa la nube de puntos que se genera por lo que se puede ratificar o desechar la tendencia y forma que antes se especuló.

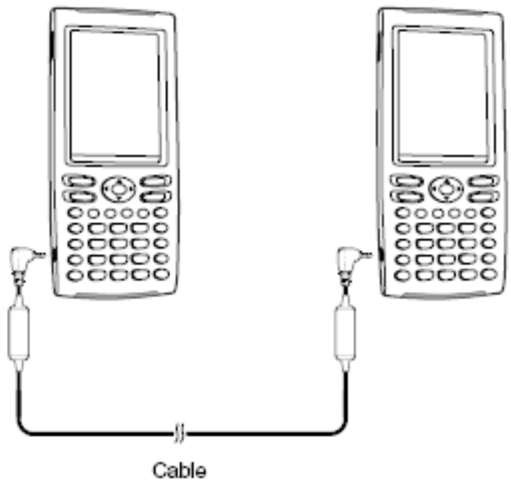
Necesitamos guardar los resultados obtenidos para su posterior manipulación. Para ello seleccionamos el menú Mem. de la barra superior. Después elegiremos la opción Todo del submenú Guardar lista. Y pondremos el nombre que queramos en las posibles opciones.

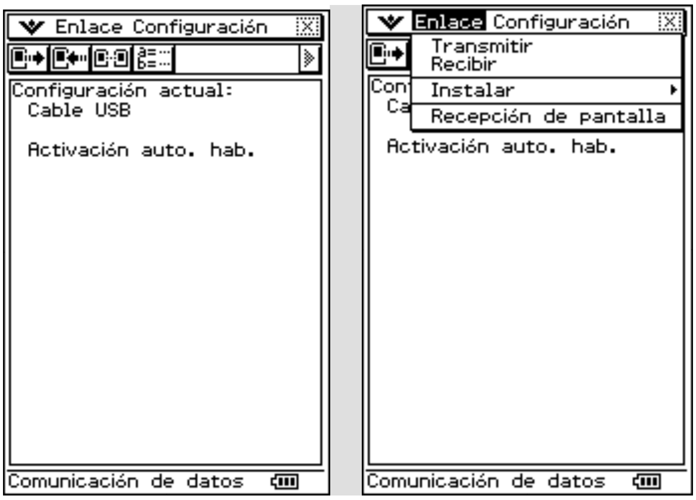


Ahora son los alumnos y las alumnas quienes deberán trabajar con los datos obtenidos en el experimento.

Hay que hacer notar que hemos almacenados los datos en las listas tir(tiempo) y ter(temperatura) de la carpeta main. Se procede al paso de los valores guardados en las lista tir y ter (tiempos y temperaturas) a las calculadoras del alumnado a través de la aplicación comunicación 

. La transferencia de información de una calculadora a otra, requiere únicamente el cable de conexión, que estará afianzado a las dos máquinas.





Transmisor

- En la aplicación Comunicación, toque [Enlace] y luego [Transmitir], o toque .
    - Aparece el cuadro de diálogo de selección de datos.
- Seleccione los datos que desea enviar.
- Toque [OK].
- Como respuesta al mensaje de confirmación que aparece, toque [OK] para enviar los datos o [Cancel] para cancelar la operación de envío.
- Al tocar [OK] envía los datos que ha seleccionado.

Receptor

- Si el dispositivo receptor tiene la función de activación automática habilitada, empieza a recibir los datos automáticamente.

Transmisor

- El mensaje “Complete!” aparece para comunicarle que la operación de envío ha finalizado. Toque [OK].
    - Se vuelve al cuadro de diálogo de selección de datos.
- En el cuadro de diálogo de selección de datos, toque [Cancel].
    - Se vuelve a la ventana de la aplicación Comunicación.

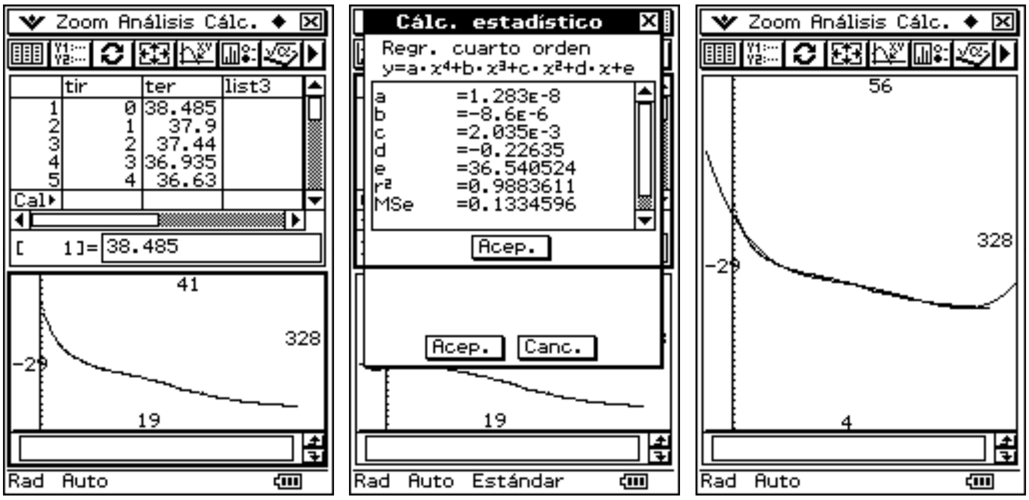
Receptor

- El mensaje “Complete!” aparece para comunicarle que la operación de recepción ha finalizado. Toque [OK].

También habrá que determinar los valores de la ventana, , que permiten representar en uno de los gráficos estadísticos la nube de puntos. Por supuesto, para esto habrá que definir convenientemente uno de ellos, siguiendo el modelo que la calculadora del profesor o la profesora ha establecido a partir de la ejecución del programa.

Una vez tienen en su calculadora los datos y la gráfica de la nube de puntos correspondiente, se les va a pedir que ajusten automáticamente a la nube aquella función que mejor describe la situación. Tal vez haya que empezar indicando como calcular la recta de regresión, y dibujarla tras su obtención. A partir de ahí los alumnos y las alumnas obtienen la parábola de regresión, la cúbica de regresión,... de la misma manera que ya se mostró en la propuesta de la cámara fotográfica, o en el problema de la presión.

Con cada regresión podemos plantearnos si verdaderamente dicha función proporciona la temperatura de la sonda en cualquier instante, no sólo entre los valores del rango de la muestra obtenida sino también para los valores del tiempo posteriores.



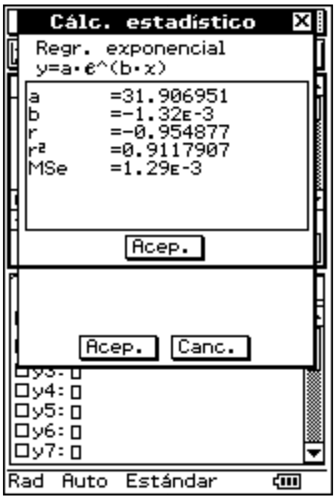
Las preguntas a plantear serían:

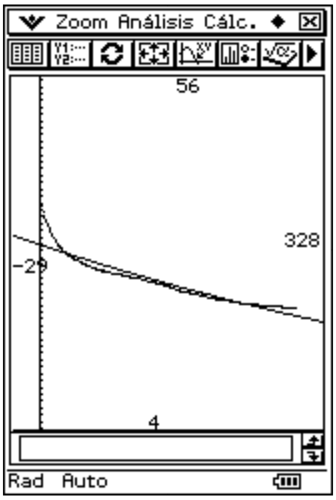
¿Cuál fue la temperatura de la sonda en el instante 5: f(5)= ?
¿Y en el instante 25: f(25)= ?
¿Y en el instante 150: f(150)= ?
¿Cuál debería ser la tendencia de la función que describe la temperatura cuando el tiempo tiende a $+\infty$?

El alumnado debe deducir que la tendencia de la temperatura de la sonda debe ser la de estabilizarse alrededor de la temperatura ambiente, por lo que no puede ser un valor negativo ni dispararse a valores muy grandes. La respuesta a esta última pregunta, debería incluir, además del valor de la temperatura ambiente de la clase en ese momento, la idea de que la función se aproxima a ese valor de manera asintótica**.**

A partir de aquí, y observando las opciones de la calculadora, se le sugiere al estudiante (si éste no lo ha descubierto ya) la utilización de la regresión exponencial.

Una vez calculada y representada, la función exponencial obtenida “se ajusta peor” para los primeros valores de la nube de puntos, pero su tendencia sigue la norma que pensamos debe seguir la temperatura de la sonda, es decir, es estrictamente decreciente y asintótica al eje de abscisas.





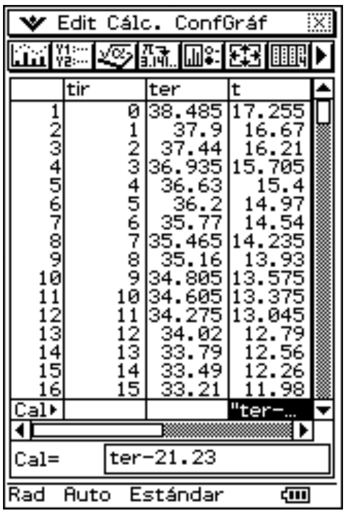
Viendo la expresión analítica de la función obtenida, se puede preguntar, igual que antes:

¿A qué tiende o cuál es el límite de la función cuando avanzamos en el tiempo de forma indefinida?

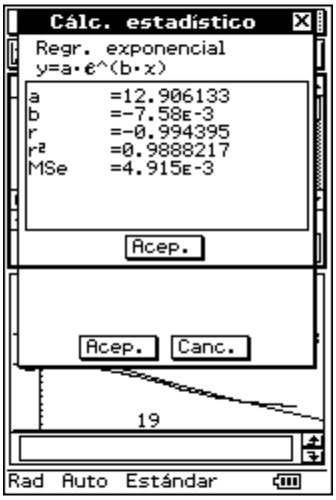
La respuesta obvia es que tiende a 0, puesto que la base de la función exponencial obtenida es menor que 1, por lo que observamos que hay algo que no funciona.

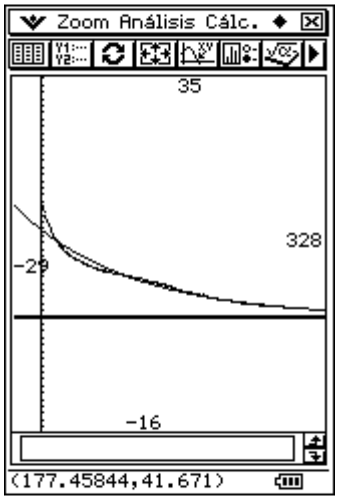
¿Cómo hacer para que la función que queremos obtener verdaderamente se ajuste a la nube según su tendencia?

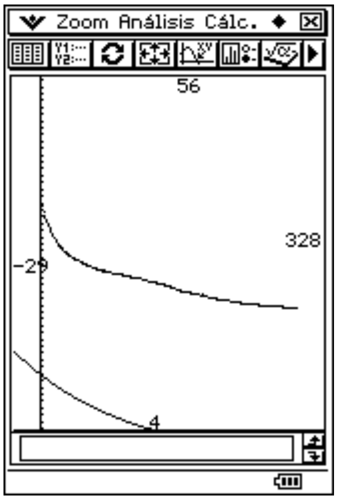
Pueden llegar a ver que simplemente hay que hacer un cambio de escala, es decir, o bien subir la gráfica el valor correspondiente a la temperatura ambiente (lo cual crearía un desajuste entre los valores de la nube y la función), o bien bajar los valores obtenidos experimentalmente con el fin de que la nube de puntos siga la tendencia de la función exponencial: aproximarse asintóticamente al eje de abscisas. Elegimos esta segunda opción, con lo cual, le decimos al alumnado que vamos a obtener una nueva lista de valores, que llamaremos t, en la que que colocaremos los valores de la temperatura ajustados a la temperatura ambiente, es decir, t = ter-T_0 .

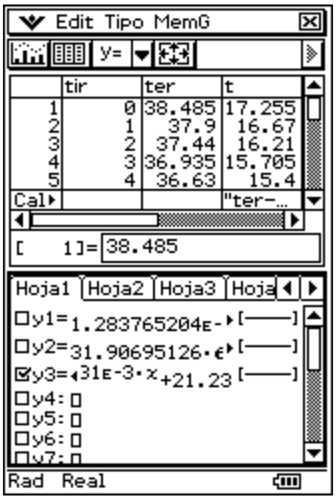


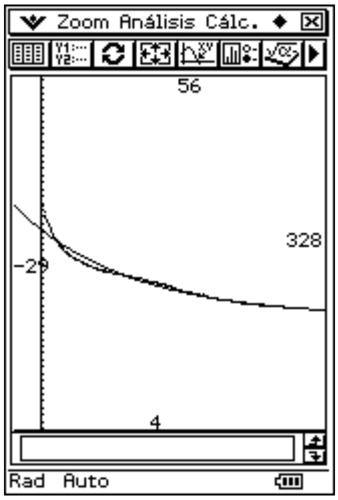
Para hacer esto, deberemos colocarnos en la etiqueta de la lista, y pulsar en Cal., de manera que el cursor parpadea en la línea de edición, y la máquina está preparada para aceptar la fórmula que queramos definir. Esta temperatura ambiente T_0 se puede obtener con el termómetro del que se dispone en el aula, o bien se puede estimar a partir del menor valor recogido por el EA 200.











Para visualizar la nueva nube de puntos, modificaremos la listaY en el gráfico estadístico correspondiente (cambiando ter por t). Ahora, solamente tenemos que calcular la regresión exponencial a los nuevos valores obtenidos. A la vista de su representación gráfica, volvemos a pedir a los alumnos si verdaderamente esta función vendrá a representar el proceso de enfriamiento de la sonda, a partir de la observación de su tendencia. De nuevo se puede preguntar:

¿Cuál fue la temperatura de la sonda en el instante 5: f(5)= ?
¿Y en el instante 25: f(25)= ?
Y en el instante 150: f(150)= ?

Y las preguntas finales:

¿Cuál es la función que me proporciona en este caso la temperatura de la sonda en cualquier instante?
En general, ¿qué forma tiene la gráfica que me proporciona la temperatura de un cuerpo que se enfría en cualquier instante?

La respuesta correcta la proporciona la Ley de Newton en la forma siguiente:

$$T = T_0 + K.e^{At}$$

Donde K y A son constantes (la constante A depende del cuerpo que se enfría), T_0 la temperatura del ambiente, t el tiempo y T la temperatura del cuerpo que se está enfriando en cualquier instante.

Si elegimos en el menú Calc.\Reg. Exponencial ab la ecuación que obtenemos con la calculadora es de la forma:

$$T = T_0 + a.b^t$$

Las dos expresiones, ¿son equivalentes?

Tras un análisis de las dos expresiones se ve que el problema está en si $ke^{At} = ab^t$, con lo que a = k y A = ln b.

El experimento se repetirá a partir de un valor inicial de temperatura menor desarrollando el mismo procedimiento, de manera que nos sirva para comparar el valor de las constantes.

Calentamiento de un cuerpo.

Ahora analizaremos el proceso contrario, es decir, el correspondiente al calentamiento de un cuerpo partiendo de una temperatura más baja que la del medio en que se encuentra. Esto se conseguirá aplicando a la sonda cloruro de etilo, y desarrollando el mismo proceso de obtención de los datos y exploración, hasta conseguir la función que proporcione el mejor modelo que muestre como evoluciona la temperatura de la sonda. Veremos que sustancialmente el problema es el mismo y, por tanto, el modelo funcional también.

Se puede proponer pensar que puesto que el modelo exponencial nos sirve para explicar el proceso del enfriamiento que acabamos de ver, el modelo matemático inverso o logarítmico nos podría servir para explicar el proceso del calentamiento de un cuerpo hasta la temperatura ambiente. Pronto se ve que una función del tipo $y = a + \ln(x)$ va a tender a ∞ (aunque muy lentamente) cuando la variable "x" (en nuestro caso, el tiempo) aumente indefinidamente, lo cual no pasa realmente.

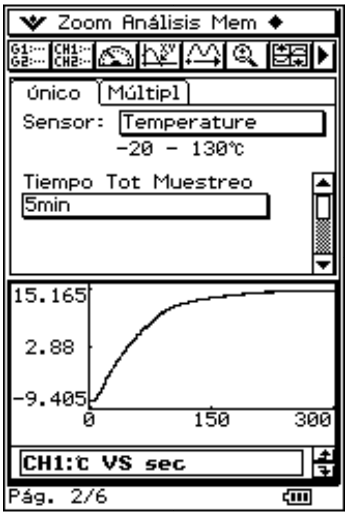
Material necesario:

- Calculadora ClassPad 300
- EA-200
- Sonda de temperatura
- Cloruro de etilo
- Aplicación E-conEA200

Desarrollo de la experiencia:

Se conecta el EA-200 a la calculadora gráfica y la sonda de temperatura al EA-200, y se activan..

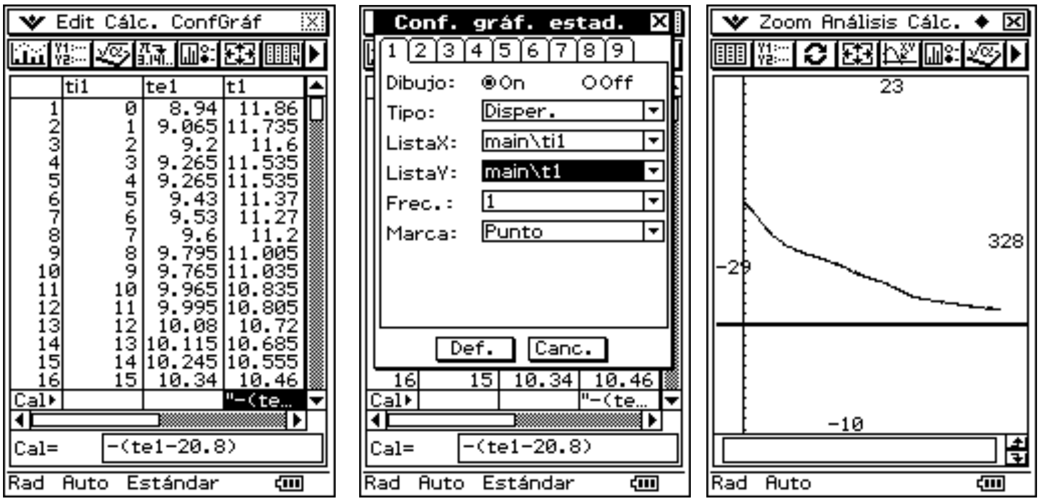
Se activa el programa E-ConEA200 y se procede como en el experimento anterior, se pide que tome datos durante 5 minutos. El sensor de temperatura se rocía con cloruro de etilo, con lo que baja la temperatura. Y se activa la toma de datos inmediatamente. La gráfica que se obtiene es de la forma:



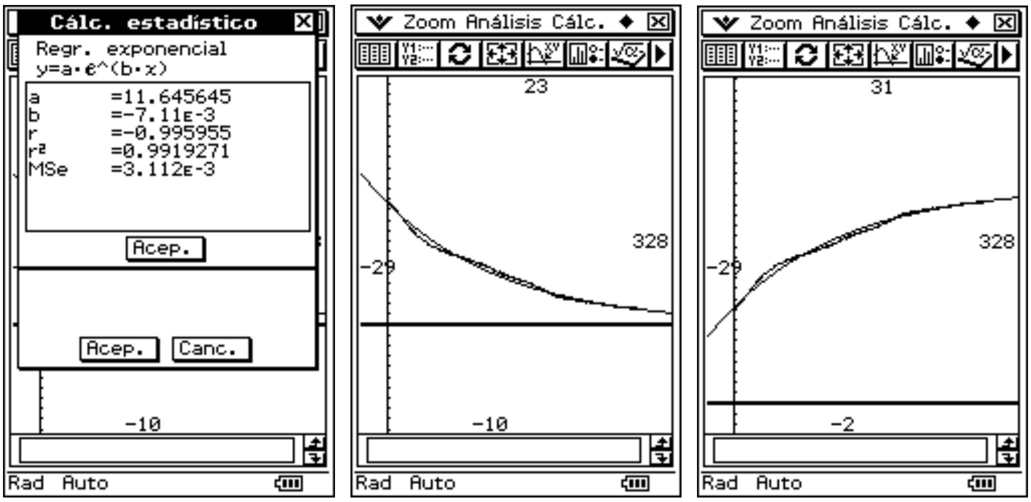
Los datos de tiempo y temperatura se han almacenado en las listas ti1 y te1 respectivamente.

El proceso con el alumnado será igual que en el problema del enfriamiento. Hay que tener en cuenta que la ecuación que modeliza el proceso, es la misma para cualquier proceso de transferencia de calor, tanto enfriamiento como calentamiento, es decir $T=T_0+Ke^{At}$, donde la A depende del material del cuerpo que se enfría o calienta y la K será negativa.

De la misma forma que en el proceso de enfriamiento, como el modelo que utiliza la calculadora es: $y = a \cdot e^{bx}$ con a positivo, habrá que restar T_0 (en nuestro caso 22º) a las temperaturas para obtener una asíntota en 0 y luego multiplicarlas por (-1) para que sean positivas.



Ahora ya podemos calcular la regresión exponencial y una vez tengamos la ecuación deshacer los cambios, primero multiplicamos por (-1) y luego sumamos T_0.



MATERIAL PARA EL ALUMNADO

Vamos a intentar averiguar si existe alguna Ley o Norma que nos permita averiguar cuál es la temperatura de un cuerpo en un instante dado, suponiendo que estaba muy caliente y se le deja enfriar, o que estaba muy frío y se deja a temperatura ambiente.
Indica qué tipo de gráfica es la que se ajusta mejor a nuestro problema.

1.- Supongamos que tenemos un cuerpo muy caliente o con temperatura alta, y se le deja enfriar. ¿Cuál es la función que describe la temperatura del cuerpo en cualquier instante?

Haz un esbozo de cómo crees que deberá ser la gráfica que represente la temperatura del cuerpo en función del tiempo.

2.- Dibuja en el siguiente sistema de ejes la nube de puntos obtenida experimentalmente en la calculadora. Escribe los valores de $X_{máx}$ y de $Y_{máx}$.

3.- Obtén en tu calculadora la función de regresión que mejor se ajuste a los datos obtenidos en la nube.

- f(t) = ___________
- ¿Cuál sería, entonces, la temperatura de la sonda en el instante 20? f(20)= ___
- ¿Y en el instante 80? f(80)= _________
- ¿Y en el instante 400?: f(400)= _________
- ¿Crees que las respuestas obtenidas muestran lo que verdaderamente ocurre?_______

4.- Modifica los valores de π en tu calculadora para observar de lejos la nube de puntos y la función obtenida. Si consideras que la forma de la gráfica no se ajusta al modelo que debería seguir, vuelve de nuevo a los mismos valores de π y repite la pregunta 3.-

5.- ¿Cuál es aproximadamente el valor de la temperatura ambiente en la clase?

T_0 = ____ Crea la lista t como la $te1_4$ menos el valor de T_0 : t = te1 - T_0 .

6.- Crea en tu calculadora una gráfica para dibujar la nube de puntos que representa los nuevos valores de la temperatura modificados que hemos guardado en t en función de los valores del tiempo que están guardados en ti1. Dibújala en el sistema de ejes siguiente, señalando los valores $x_{máx}$ e $y_{máx.}$.

7.- Obtén en tu calculadora la función de regresión que mejor se ajuste a los datos obtenidos en la nube.

- f(t) = ___________
- ¿Cuál fue según esto la temperatura de la sonda en el instante 20? f(20)= ____
- ¿Y en el instante 80? f(80)= _________
- ¿Y en el instante 400?: f(400)= _________

- ¿Crees que las respuestas obtenidas muestran lo que verdaderamente ocurre?_______

8.- ¿Cuál es la función que nos proporciona en este caso la temperatura de la sonda en cualquier instante?____

En general, ¿qué forma tiene la función que nos proporciona la temperatura de un cuerpo que se enfría en cualquier instante?____________________________

9.- Repite el experimento comenzando la toma de datos a una temperatura menos alta. Compara y analiza las dos funciones obtenidas. ¿En qué varían?

10.- Repite ahora el experimento rociando el extremo de la sonda con cloruro de etilo. Tras un breve período de tiempo prudencial que permita que la sonda baje la temperatura lo suficiente, vamos a dejar que se caliente en el aula, y vamos a estudiar como va a evolucionar su temperatura. Dibuja en el siguiente sistema de ejes como crees que será la gráfica temperatura-tiempo.

11.- ¿Cuál será la función que mejor describe el comportamiento de la sonda cuando ésta se deja a temperatura ambiente?

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Filloy, E. (2006). CAS en EFIT-EMAT. En T. Rojano (Ed.), *Enseñanza de la Física y las Matemáticas con Tecnología: Modelos de transformación de las prácticas y la interacción social en el aula* (págs. 130-137). México, DF: Secretaría de Educación Pública.

Filloy, E., Puig, L., & Rojano, T. (2008). El estudio teórico local del desarrollo de competencias algebraicas. *Enseñanza de las Ciencias*, *25*(3).

Monzó, O. y Puig, L. (2007). Modelización con la ClassPad 300, 1ª parte. *Veintidós Séptimos*, núm. 24, pp. 26-29.

Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En L. Rico (Ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (págs. 61-94). Barcelona: Horsori/ICE.

Puig, L. (2003). Historia de las ideas algebraicas: componentes y preguntas de investigación desde el punto de vista de la matemática educativa. En E. Castro, P. Flores, T. Ortega, L. Rico, y A. Vallecillos (Eds.) *Investigación en Educación Matemática. Actas del Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 97-108). Granada: Universidad de Granada.

Puig, L. (2006). La resolución de problemas en la historia de las matemáticas. En J. V. Aymerich y S. Macario (Eds.) *Matemáticas para el siglo XXI* (pp. 39-57) Castellón: Publicacions de la Universitat Jaume I.

Puig, L. & Rojano, T. (2004). The history of algebra in mathematics education. In K. Stacey, H. Chick, & M. Kendal (Eds.) *The future of the teaching and learning of algebra: The 12th ICMI study* (pp. 189-224). Norwood, MA: Kluwer Academic Publishers.

Rodrigo, J., Gracia, F., Juan, F. J., Mollá, A., Monzó, O., Mora, J. A., et al. (2004). *El estudio de funciones con calculadora gráfica.* Castellón:SEMCV.

Stacey, K.; Carlson, D.; Drouhard, J.-P.; Fearnley-Sander, D.; Fujii, T.; Kieran, C.; Kissane, B.; Lins, R.; Rojano, T.; Puig, L.; Sutherland, R.; Hodgson, B. & Chick, H. (2000). Discussion Document for the Twelfth ICMI Study: The Future of the Teaching and Learning of Algebra. *Bulletin of the International Commission on Mathematical Instruction,* (48), pp. 6-13.