

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

Daughter: What do you mean, Daddy?

Father: I really don't know, my dear. I was just trying to think.

G. Bateson¹

1.1. EL CAMPO DE ESTUDIO.

Este trabajo² pretende contribuir al estudio de *la resolución de problemas de matemáticas en los sistemas educativos*. La resolución de problemas de matemáticas ha llegado a ser calificada por los matemáticos profesionales como el corazón de éstas (Halmos, 1980), y es harto conocido el énfasis que se pone en la resolución de problemas en los sistemas escolares en gran parte de las reformas curriculares que desde hace una década se están emprendiendo en todo el mundo. Desprendida de los determinativos “de matemáticas” y “en los sistemas educativos”, la resolución de problemas puede llegar a identificarse con el pensamiento y la cognición³, pero, incluso con ellos, designa aún un campo excesivamente amplio y heterogéneo. Para delimitar dentro de él dónde se sitúa nuestro trabajo precisaremos cuál es el dominio teórico desde el que se aborda —esto es, con qué tipo de teoría se estudia el campo y cuál es el tipo de teoría que se pretende elaborar con su estudio—, en qué sentido

¹ Las citas que encabezan todos los capítulos de este libro están extraídas del metalogo de Gregory Bateson “How Much Do You Know”, que se publicó por primera vez en 1953 en *ETC.: A Review of General Semantics* y que nosotros hemos tomado del libro *Steps to an Ecology of Mind*, donde está recogido entre las páginas 21 y 26.

² Lo que presentamos aquí en forma de libro es una segunda versión, aligerada de anexos y ligeramente modificada en su cuerpo central, de la memoria que el autor defendió como tesis doctoral dirigida por el Dr. Francisco Rivas en la Facultad de Psicología de la Universitat de València.

³ Así se hace, por ejemplo, al comienzo del manual de Mayer, que lleva esos tres términos en su título, al afirmar “Hay muchas definiciones de *pensamiento*, *resolución de problemas* y *cognición*, pero este libro utilizará esos tres términos de forma intercambiable sobre la base de una definición única y general, común a los tres.” (Mayer, 1983, pág. 6) También se llega casi a esa identificación, ahora entre la resolución de problemas y la inteligencia, en el artículo de Resnick y Glaser que lleva esos dos términos en el título, en cuyo comienzo se afirma que “el aspecto principal de la inteligencia es la capacidad de resolver problemas, y el análisis cuidadoso del comportamiento al resolver problemas constituye un medio de especificar muchos de los procesos psicológicos que comprende la inteligencia” (Resnick & Glaser, 1976, pág. 205).

se va a estudiar el campo, es decir, con qué tipo de relación con otras partes de las matemáticas escolares o del sistema educativo —o, dicho de otra manera, cuál de los mundos posibles de la resolución de problemas de matemáticas en los sistemas escolares se va a estudiar— y cuál es el ámbito en el que se van a observar los procesos que queremos estudiar y del que se van a tomar los datos empíricos para el estudio de ese mundo desde ese dominio teórico.

1.2. EL PROGRAMA DE INVESTIGACIÓN.

La constitución del *International Group of the Psychology of Mathematics Education* (PME) en 1976 puede considerarse que tuvo su carta fundacional en Bauersfeld & Skowronek (1976). En este texto se plantea que no se debería comenzar desde una teoría general y neutral respecto del contenido, y derivar de ella una teoría específica para el caso de las matemáticas, sino que, por el contrario, se debería comenzar por el estudio de los procesos específicos de cada contenido. Esta petición de principio ha inspirado gran número de los trabajos desarrollados desde entonces en el seno de ese grupo. Filloy ha precisado un tipo de teoría que resulta como consecuencia de ello con lo que él llama *modelos teóricos locales* (Kieran y Filloy, 1989; Filloy, 1993), cuyo desarrollo constituye un programa de investigación. Esos modelos teóricos son locales en la medida en que se elaboran para dar cuenta de los procesos que se desarrollan cuando se enseña en los sistemas educativos un contenido concreto a unos alumnos concretos, y sólo se pretende que sean adecuados para los fenómenos observados.

Para poder tomar en cuenta la complejidad de los fenómenos que se producen en los sistemas educativos, esos modelos teóricos locales integran varios componentes teóricos —modelos de competencia formal, modelos de los procesos cognitivos, modelos de enseñanza y modelos de los procesos de comunicación—, y esos componentes están imbricados: así, por ejemplo, en el caso de la resolución de problemas de matemáticas en los sistemas escolares, un modelo de competencia implica que se precise también qué tipo de competencia es el que se deriva de las intenciones educativas y que, por tanto, quiere la enseñanza; los aspectos de la cognición se describen en términos de la forma que adoptan los elementos del modelo de competencia en la actuación de los sujetos, con los consiguientes intercambios entre estos dos componentes, y el modelo de enseñanza pretende que los alumnos acaben siendo competentes en el sentido que define el modelo de competencia.

Nuestro trabajo se sitúa en el terreno que establece este programa de investigación intentando elaborar algunos elementos de un modelo de competencia y estudiando aspectos de la cognición derivados de una enseñanza organizada en función de esos elementos.

1.3. LOS MUNDOS DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

Desde nuestro punto de vista, no todas las situaciones escolares en las que se resuelven problemas de matemáticas pueden tratarse conjuntamente o analizarse de la misma manera, ya que las

intenciones curriculares generales con respecto a los problemas, las clases de problemas que se resuelven y las intenciones de la resolución de los problemas concretos pueden ser diversas y todo ello tiene su reflejo en los componentes del modelo teórico con el que queremos dar cuenta de los procesos que se producen en ellas.

Un mundo de la resolución de problemas que ha sido objeto de gran número de estudios es el que queda reflejado, al menos en parte, en las dos preguntas que, tras resumir los trabajos del grupo PME desde su fundación, plantea Balacheff (1990) con respecto a los problemas, al señalar las perspectivas de la investigación futura:

¿Cómo vamos a caracterizar la clase de problemas relacionada específicamente con un ítem de conocimiento matemático?

Entre las características de una clase de problemas matemáticos, ¿cuáles determinan los procesos cognitivos de los estudiantes y por tanto la naturaleza del conocimiento que construyen?
(Balacheff, 1990, pág. 138)

Plantear éstas como las preguntas de investigación es lo propio del mundo de la resolución de problemas en que éstos se conciben como un campo asociado a los conceptos, cuyo significado está determinado precisamente por ser ése el campo de problemas que permite resolver, o se piensa que los problemas permiten proporcionar o ampliar el campo semántico de los conceptos. La multitud de estudios y de modelos teóricos desarrollados para los problemas verbales⁴ pertenecen en líneas generales a este mundo en que los problemas se consideran en torno a conceptos, campos conceptuales o estructuras conceptuales.

Sin embargo, nuestro trabajo no pretende examinar lo que sucede con la resolución de problemas cuando los problemas son vistos desde los conceptos, sino cuando lo son desde los propios problemas, y nuestra intención es estudiar sólo aquello que puede considerarse independiente del contenido: el mundo que llamaremos de la “pura resolución de problemas” (PRP)⁵.

Pero estos dos mundos no son los únicos mundos posibles que puede considerarse que están presentes en mayor o menor grado en los sistemas educativos, y que han recibido atención desde la investigación. Para situar nuestro trabajo y poder relacionar lo que en él hemos desarrollado con la inmensa literatura existente sobre resolución de problemas no sólo hay que separarlo del primer mundo que hemos citado, sino también del mundo de la resolución de problemas llamados “reales” o

⁴ Un resumen del estado de la cuestión puede verse en nuestro Puig y Cerdán (1989); un resumen más reciente de la investigación respecto a los problemas aditivos puede verse en Castro, Rico y Gil (1992).

⁵ Lo que puede decirse de la resolución de problemas independientemente del contenido concreto es el objeto de estudio de la heurística, en el sentido que esta disciplina toma en la obra de Polya (1945, 1954, 1962-65), de modo que nuestro trabajo puede considerarse también como un estudio sobre la heurística matemática.

“aplicados”⁶. En este caso, el mundo es distinto no meramente por la función que los problemas cumplen, sino, sobre todo, por la naturaleza de los problemas que se resuelven. También es otro mundo aquél en que se considera la relación entre la resolución de los problemas y el sistema matemático de signos con que se resuelven, tanto porque se observa qué procesos de resolución son dependientes del sistema matemático de signos en cuestión, como porque los problemas se están usando en secuencias de enseñanza cuyo fin es la adquisición por parte de los alumnos de un uso competente de un nuevo sistema matemático de signos para resolver los problemas de la manera en que ese sistema matemático de signos hace posible que se resuelvan⁷. Finalmente, conviene desde nuestro punto de vista que se separe también el mundo en el que los problemas de matemáticas son vistos desde los procesos matemáticos y se resuelven en situaciones de enseñanza cuya intención es la adquisición de esos procesos⁸.

1.4. EL ÁMBITO DEL TRABAJO.

Nuestro trabajo se desarrolló tomando como ámbito un curso de resolución de problemas que pertenecía al currículo en vigor en la Escuela del Profesorado de EGB⁹ de Valencia hasta el curso académico 1993-94, y que se impartía en el segundo curso en la especialidad de Ciencias, como asignatura anual con tres horas semanales¹⁰. La organización del programa del curso la hemos realizado entre Fernando Cerdán y el autor de este libro, que hemos sido también profesores de él durante varios años. Esa organización ha ido sufriendo reestructuraciones a lo largo de los años en función del desarrollo de este trabajo, ya que los resultados obtenidos de los sucesivos estudios emprendidos se han ido incorporando a la teoría que sustenta el diseño del curso.

⁶ Aunque nuestro trabajo no se desarrolle en el mismo mundo, no queremos dejar de citar los de Lesh (Lesh, 1981, 1982, 1985; Lesh, Mierkiewicz, & Kantowski, eds., 1979), ya que de ellos hemos importado algunas ideas para el nuestro. Toda la corriente del *mathematical modelling*, por otro lado, pertenece a este mundo.

⁷ De este estilo es nuestro trabajo de análisis histórico-crítico de un texto matemático descrito en Puig (1994a) y trabajos como Filloy y Rubio (1992) o Rubio (1994).

⁸ Con el término *procesos* nos referimos a *clasificar, definir, algoritmizar, probar, demostrar, particularizar, generalizar, abstraer*; al hablar de procesos *matemáticos*, pretendemos fijarnos exclusivamente en las características que estas acciones tienen como componentes de la práctica matemática. Este mundo tiene un pobre reflejo en los sistemas escolares y, en consecuencia, está poco presente en la literatura de investigación —aunque podemos citar como perteneciente a él la tesis de Bell (1976), a condición de reinterpretar lo que él llama “estrategias generales” como lo que aquí llamamos “procesos matemáticos”.

⁹ Actualmente *Escola Universitària de Magisteri “Ausiàs March”*.

¹⁰ Una versión de ese curso adaptada a las nuevas circunstancias es la materia optativa de tres créditos “Didáctica de la Resolución de Problemas y Heurística Matemática”, del plan de estudios de la Diplomatura de Maestro de la Universitat de València.

1.5. EL ESTILO DEL TRABAJO.

La somera descripción del ámbito del trabajo ya indica algunas de las características de éste, en particular, que investigadores y profesores no estén separados¹¹, y la edad de los alumnos y su condición de futuros profesores. En líneas generales, nuestro trabajo comparte las que tienen lo que en la tradición recogida en los *Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics* (Kilpatrick & Wirszup, eds., 1969-1975) se denomina “experimentos de enseñanza”. Kantowski (1978) describe en detalle las características de los experimentos de enseñanza recogidos en esa serie y Lester (1985) las describe más telegráficamente, a propósito de los trabajos de este estilo que él ha desarrollado.

El diseño no es experimental.

Se desarrolla a lo largo de un período de tiempo prolongado.

Se intenta asir los procesos en el momento en que se producen.

El profesor no es una variable controlada.

Los análisis subjetivos de datos cualitativos tienen mayor interés a menudo que los análisis cuantitativos (Lester, 1985, pág. 52).

El nuestro lo podemos calificar, recogiendo estas características y las que se derivan del programa de investigación en que se enmarca como *naturalista*, *exploratorio*, *teórico* y *empírico*. Con *naturalista* queremos indicar que tomamos como ámbito para el trabajo un grupo de alumnos completo, tal y como es como consecuencia de la distribución de los alumnos en el centro educativo, sin seleccionar por tanto a los sujetos de ninguna manera, con lo que no pretendemos que los resultados obtenidos sean representativos de ninguna población más amplia; con *exploratorio*, que no centramos la indagación en unas pocas hipótesis, sino que pretendemos obtener datos y explicaciones de los fenómenos que observemos en el mundo elegido desde el modelo teórico; con *teórico*, que la elaboración de elementos del modelo teórico, y la ida y vuelta de él a los datos empíricos, es una de las intenciones del trabajo, y con *empírico* que el modelo teórico se elabora para dar cuenta de datos empíricos y se circunscribe a ellos.

¹¹ Queremos señalar que, el que en nuestro trabajo quien aparece como investigador haya sido también el profesor del curso en cuyo ámbito se ha realizado, no lo sitúa en lo que se ha dado en llamar la “investigación-acción”. En nuestra opinión, la función de investigador y la función de profesor son funciones distintas que ponen obstáculos la una a la otra. El que una sola persona encarne ambas funciones por las necesidades de una investigación trae consigo tensiones entre los objetivos de cada una de ellas, que no se resuelven sin dificultades. A nuestro entender, la confusión de ambas funciones en la llamada “investigación-acción” — aparte de lo que pueda tener de propagandístico — no puede conducir a la mejora de la actuación del profesor (cf. Brousseau, 1991, y Puig, 1995).

1.6. PROPÓSITO Y PARTES DEL TRABAJO. PARTES DEL LIBRO.

El propósito de este trabajo es doble. Por un lado, elaborar elementos de un modelo teórico de la resolución de problemas en los sistemas escolares, con las características descritas y en el mundo señalado. Por otro lado, explorar la actuación al resolver problemas de alumnos instruidos en un curso organizado en función de tal modelo, describiendo su actuación respecto a los elementos del modelo.

Para perseguir ese propósito, el trabajo ha tenido varias partes.

La prehistoria del trabajo es la elaboración de un esbozo de los elementos del modelo a partir del examen de la literatura sobre pura resolución de problemas. Ese esbozo dio origen a la primera elaboración del programa del curso de resolución de problemas¹² que se impartió como asignatura obligatoria en segundo de la especialidad de ciencias de la Escuela Universitaria del Profesorado de EGB de Valencia, así como a la elaboración del conjunto de actividades de instrucción.

Realizamos después, durante dos años académicos, un estudio de casos de actuaciones de alumnos instruidos en el curso, con el fin de explorar en detalle su comportamiento después de la instrucción. Ese estudio lo describimos en el capítulo 5. Los resultados de un primer análisis de los casos y la continuación del examen de la literatura los usamos para reelaborar los elementos del modelo y la organización de la instrucción.

En el siguiente curso académico, sometimos a examen al grupo completo que recibía la instrucción mediante la realización de una prueba inicial al comienzo del curso y una prueba final en el mes de junio. Ese estudio lo describimos en el capítulo 6.

Los análisis de los resultados de este segundo estudio, junto con el análisis detallado del estudio de casos y la continuación del análisis de la literatura dieron origen a una reelaboración del modelo teórico: en los capítulos 3 y 4, presentamos una descripción de sus componentes de competencia y de enseñanza, respectivamente.

En el capítulo 2, exponemos un análisis de los usos más importantes del término ‘problema’ en la bibliografía de resolución de problemas, así como un estudio del surgimiento del término en la historia como término matemático en la matemática griega. También presentamos en qué sentido usaremos nosotros el término en este libro.

Por otro lado, como el estilo exploratorio del trabajo hace que las conclusiones se encuentren diseminadas a lo largo de todo el libro, en el capítulo 7 presentamos un resumen de las más relevantes.

¹² De esa primera elaboración dimos cuenta en Cerdán y Puig (1986).