CAPÍTULO 2

PROBLEMA

Father: What we have to think about is how the pieces of knowledge are woven together. How they help each other.

Daughter: How do they?

F.: Well — it's as if sometimes two facts get added together and all you have is just two facts. But sometimes instead of just adding they multiply — and you get four *facts.*

D.: You cannot multiply one by one and get four. You know you can't.

F.: Oh.

F.: But yes I can, too. If the things to be multiplied are pieces of knowledge or something like that. Because every one of them is a double something.

G. Bateson

2.1. ESCENARIOS, PERSONAJES Y NIVELES DE ANÁLISIS.

Los problemas de matemáticas aparecen en los sistemas educativos al menos en tres escenarios: global —la organización general del currículo de matemáticas—, local —las clases de problemas que se estudian— y puntual —la situación de enseñanza concreta en que el problema se plantea. En nuestro trabajo examinamos fundamentalmente la resolución de problemas en el escenario puntual; sin embargo, no podemos eludir el tener presente los otros dos escenarios. Así, cualquier modelo de competencia que se postule en el sistema escolar lleva incorporado unas intenciones que corresponden al escenario global. Además, si en el escenario global se ha decidido incorporar el estudio de una clase de problemas determinada, los procesos de resolución que se desarrollen en ese escenario local tendrán que describirse tomando en cuenta especialmente los procedimientos de resolución propios de esa clase de problemas y las versiones de los procedimientos independientes del contenido adaptadas a esa clase de problemas.

Por otro lado, desde el momento en que examinamos la resolución de problemas *en los sistemas educativos*, tenemos en escena tres personajes, el problema, el alumno y el profesor, que representan la forma que adoptan los integrantes de toda situación educativa en el caso que nos ocupa.

Como quiera que la resolución de problemas de matemáticas también ha sido estudiada fuera de los sistemas educativos o sin contemplar a los tres personajes, para organizar los elementos teóricos que elaboramos y los que incorporamos de otros trabajos en el sentido en que queremos integrarlos en el marco teórico que ha de presidir las observaciones empíricas, introducimos una manera de articular lo que es propio de cada uno de los personajes y las relaciones entre ellos que denominamos niveles de análisis o teorías de nivel I, II y III.

Los niveles que se consideran son tres en función de los personajes que están presentes: problema, alumno y profesor; problema y alumno, o sólo problema. Las teorías de nivel puede considerarse que se recorren en sentido descendente o en sentido ascendente. En cualquiera de los dos sentidos, en el nivel III se consideran presentes los tres personajes y los análisis que se realizan han de tomarlos en cuenta a los tres. El recorrido descendente consiste en poner entre paréntesis al personaje que no se considera —por seguir la metáfora teatral, el personaje está en el reparto, pero fuera de escena—; los análisis que se realizan sólo toman en cuenta a los personajes que quedan en escena, pero éstos están marcados por la existencia de los otros. Así, por ejemplo, aunque en el nivel II el profesor salga de escena, el sujeto seguirá siendo alumno y no mero resolutor, y el problema será un problema escolar planteado con intenciones educativas y no un problema encontrado por un sujeto en el curso de una indagación con fines prácticos o fines epistémicos. Incluso en el nivel I, en que no están presentes ni el profesor ni el alumno, los análisis tomarán en cuenta su carácter escolar.

Este recorrido descendente de los niveles es el propio de la perspectiva que hemos adoptado en este trabajo; sin embargo, para poder incorporar los resultados de otros análisis que no se sitúan en la misma perspectiva hace falta considerar también un recorrido que asciende de las teorías de nivel I, esto es, aquellas en que los análisis de los problemas de matemáticas se hacen sin referencia a sujeto alguno, presente o ausente, por las de nivel II, esto es aquellas que analizan los procesos de resolución de un sujeto que se enfrenta a un problema de matemáticas que no ha recibido con intenciones educativas, hasta las de nivel III.

2.2. PROBLEMA.

2.2.1. MANERAS DE PREGUNTAR POR PROBLEMA.

El National Council of Teachers of Mathematics ha publicado un *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (Grows, ed., 1992), para el cual encargó a Alan Schoenfeld que escribiera el capítulo dedicado a la resolución de problemas. En este panorama reciente, Schoenfeld (1992) afirma que la literatura sobre resolución de problemas de matemáticas es difícil de interpretar porque “problema” y “resolución de problemas” tienen y han tenido significados variados y, en ocasiones, contradictorios[1]. En nuestra opinión esta variedad de significados, que es un hecho

---

[1] En la mayor parte de los panoramas que fueron apareciendo a lo largo de la década pasada —Hill (s. f.), Lester (1980), Lester & Garofalo, eds. (1982), Silver, ed. (1985), Charles & Silver, eds. (1989)— ya se señaló, de una u otra manera, esta dificultad de delimitar de qué se está hablando cuando se dice “problema” o “resolución de problemas”. Además, tal afirmacion se hizo como resultado de pesquisas o perspectivas muy diversas, tan diversas como que el trabajo de Hill, que es la búsqueda bibliográfica que acompaña al proyecto

indudable para cualquiera que haya recorrido la literatura con mirada crítica, es ineludible por la variedad de disciplinas que los examinan, de ámbitos en que se examinan y de puntos de vista que se adoptan para ello. Lo que pretendemos hacer aquí pues no es zanjar una discusión sobre qué es verdaderamente un problema —porque en nuestra opinión tal afirmación carecería de sentido— sino plantear cómo la disciplina, el ámbito y el punto de vista son responsables de la diversidad de los significados que están en uso para "problema" y "resolución de problemas".

La descripción de la resolución de problemas de matemáticas que desarrollamos está marcada, de entrada, por dos decisiones que ya hemos indicado en el capítulo 1: la primera, que no queremos partir de una teoría general de la resolución de problemas, sino elaborar una teoría local; la segunda, que queremos examinar la resolución de problemas de matemáticas en el ámbito de los sistemas educativos. Como consecuencia de la combinación de ambas decisiones, tendremos que prestar una atención especial a lo que pueda ser un problema de matemáticas y no quedarnos meramente en la consideración de lo que caracteriza a un problema cualquiera, además, tendremos que tener presentes, junto a los problemas, los otros dos personajes que comparten la escena de este teatro, es decir, el alumno y el profesor: la distinción de los niveles I, II y III de análisis que hemos expuesto con anterioridad servirá de modo de organización de las definiciones de problema —y de resolver problemas— y de articulación de unas con otras.

2.2.2. DESDE LA PSICOLOGÍA: "TENER UN PROBLEMA".

Las definiciones que pueden encontrarse en la literatura estrictamente psicológica no incorporan rasgos propios de los problemas de matemáticas, sino que consideran qué situaciones o qué tareas han de tomarse como problemas, independientemente del contenido de la tarea o de la situación, y lo que da el carácter de problema está en el lado del sujeto, definiéndose más qué es "tener un problema" que "problema". Además, el ámbito en que se examina la resolución de problemas no es el del sistema educativo, sino el de la vida en general de los sujetos. De este estilo es la definición que dio Brownell en su texto clásico *Problem Solving*:

> La resolución de problemas se refiere a) sólo a tareas conceptuales o perceptivas, b) cuya naturaleza el sujeto es capaz de comprender gracias a su naturaleza original, a un aprendizaje previo, o a la organización de la tarea, pero c) para las que, en ese momento, desconoce cualquier

---

descrito en Burton (s. f.), llega a esa conclusión al elaborar un catálogo de definiciones de problema encontradas en las referencias obtenidas en una búsqueda automatizada; el trabajo de Goldin incluido en Lester & Garofalo, eds. (1982) examina una serie más reducida de definiciones de problema desde la perspectiva de las medidas de los productos del proceso de resolución; o el de Stanic y Kilpatrick incluido en Charles & Silver, eds. (1989) lo que examina es un conjunto de tareas de resolución de problemas planteadas en libros de texto desde finales del siglo XIX hasta la fecha (con el añadido del papiro Rhind como representante de un texto de enseñanza antiguo).

> medio directo de realización. d) El sujeto experimenta perplejidad ante la situación problemática, pero no experimenta total confusión […] La resolución del problema resulta ser el proceso mediante el cual el sujeto se desprende de su problema […] Definidos así, se pueden pensar los problemas como si ocuparan un territorio intermedio en un continuo que se extiende desde los 'enigmas' en un extremo hasta las situaciones completamente familiares y comprensibles en el otro (Brownell, 1942, pág. 416).

Comprender, no saber hacer y estar perplejo son pues aquí los rasgos que identifican los problemas entre las tareas a las que se enfrentan los sujetos, y estos rasgos no son propiedades de la tarea, sino del sujeto enfrentado a ella.

Otras definiciones modulan explícitamente esos rasgos en función de las teorías psicológicas en que se enmarcan. En ese sentido pueden leerse la definición que da Greeno (1978) de lo que es un problema para el conductismo:

> […] se presenta un problema cuando la respuesta que es necesaria para conseguir una meta es menos fuerte que otras respuestas, o cuando se requieren varias respuestas y es poco probable que todas ellas puedan ser ejecutadas (Greeno, 1978, pág. 239).

en la que se describe de qué naturaleza es lo que no se sabe hacer o cuál es la posible fuente de la perplejidad; o la que da el mismo Greeno (1978) de lo que es un problema para la psicología de la Gestalt:

> Los problemas se analizaban como situaciones cuyas representaciones cognitivas tienen brechas o inconsistencias, y la resolución del problema encuentra un camino para organizar la situación, para proporcionar una estructura buena, incluyendo la consecución satisfactoria de la meta del problema (Greeno, 1978, pág. 239).

En este caso, como consecuencia de la teoría en que la definición se enmarca, se introducen modificaciones importantes: se habla de una situación y no de una tarea, y la situación es un problema no porque no se sepa hacer algo que se comprende, más bien es la falta de una buena comprensión —de la estructura de la situación—, manifestada en que la representación cognitiva de la situación no es consistente, lo que hace de la situación un problema. Tareas que hay que ejecutar o situaciones que hay que comprender[2] pueden verse pues como concepciones contrapuestas de lo que es un problema desde las teorías correspondientes, o como aquello que desde cada teoría puede verse y describirse.

---

[2] Esto es lo que también contrapone Lesh (1982) cuando afirma que el problema del escalador no es subir desde el pie del acantilado a su cima, sino comprender el terreno, y que, una vez comprendido el terreno, la escalada deja de ser un problema para ser un mero ejercicio.

2.2.3. NEWELL & SIMON: ESTADOS Y OPERADORES Y EL ESPACIO DEL PROBLEMA.

Son frecuentes también las definiciones en que tener un problema se caracteriza en términos de una brecha entre estados, ya se expresen éstos respecto al sujeto o al problema, como hacen, respectivamente, Hayes (1980) y Mayer (1983).

> Siempre que haya una brecha entre donde uno está en este momento y donde uno quiere estar, y uno no sepa cómo encontrar el camino para cruzarla, uno tiene un problema. (Hayes, 1980, pág. I)
>
> En pocas palabras, cualquier definición de "problema" debería consistir en las tres ideas siguientes: 1) el problema está actualmente en un cierto estado, pero 2) se desea que esté en otro estado, y 3) no hay una manera obvia y directa de realizar el cambio (Mayer, 1983, pág. 5).

La idea de describir los problemas en términos de estados y de operadores que permiten tránsitos entre los estados se originó en los años cincuenta, está sustentada en los trabajos sobre resolución de problemas en el campo de la inteligencia artificial, y es la habitual en los modelos psicológicos que conciben a los resolutores como procesadores de información. En el monumental libro *Human Problem Solving* (Newell & Simon, 1972) se puede encontrar la primera teoría que elabora completamente un modelo de este estilo. Esta teoría, que se basa en el examen detallado de los datos suministrados por protocolos de sujetos resolviendo problemas en voz alta, y adopta la forma adecuada para convertirse en un programa de ordenador que produzca efectivamente las conductas que pretende explicar y no sólo describir[3], está limitada en su alcance por los problemas concretos de cuya resolución se obtienen los datos[4]. Enunciada, sin embargo, como una teoría general, en ella los

---

[3] Newell & Simon (1972) dramatizan el que la teoría realice la tarea que explica al escribir que "una buena teoría de cómo leen los niños leerá y comprenderá de la misma manera" (pág. 11), y no encuentran nada misterioso en ello, ya que "Las teorías explican el comportamiento en una tarea describiendo la manipulación de información hasta un nivel de profundidad tal que en él un mero intérprete (como lo es un ordenador) puede convertir la descripción en un proceso efectivo para ejecutar la tarea" (pág. 11).

[4] En efecto, los problemas en cuestión son problemas de criptaritmética, derivaciones en lógica formal y problemas de ajedrez, problemas que, por ejemplo, no tienen un parentesco muy próximo con los que aparecerán en estas páginas. Newell & Simon señalan explícitamente esta limitación, y deciden, sin embargo, que "a pesar del alcance restringido de los datos explícitos que se usan como pruebas básicas de la teoría, la avanzaremos como una teoría general de la resolución de problemas, sin intentar evaluar cuáles son las fronteras de su campo de aplicación" (pág. 791). Gran cantidad de trabajos posteriores han usado elementos de esta teoría para otras clases de problemas sin considerar las precauciones que los propios Newell & Simon señalaron que habría que tener para hacerlo —sobre todo si se es fiel a sus afirmaciones de que "la estructura del entorno de la tarea determina las estructuras posibles del espacio del problema" y "la estructura del espacio del problema determina los programas posibles que pueden usarse para resolver el problema" (pág. 789).

problemas son “problemas propuestos a un sistema de procesamiento de la información” (Newell & Simon, 1972, pág. 74) y aparecen definidos en los preliminares del libro así:

> En vez de definir directamente qué significa, en su mayor generalidad, tener un problema para un humano (o para un organismo o dispositivo) intentaremos la estrategia siguiente. Tener un problema implica (al menos) que cierta información ha sido dada al resolutor: información sobre lo que se desea, bajo qué condiciones, mediante qué operaciones o qué herramientas, empezando con qué información inicial, y con acceso a qué recursos. El resolutor tiene una interpretación de esta información —precisamente la interpretación que nos permite etiquetar una de sus partes como *meta*, otra de *condiciones*, etc. (Newell & Simon, 1972, págs. 72-73).

Esta definición se hace más precisa en el capítulo 14 —titulado *La teoría de la resolución humana de problemas*— en el seno de la definición de espacio del problema, que citamos parcialmente:

> Un espacio del problema consiste en:
>
> 1. Un *conjunto de elementos,* U, que son estructuras de símbolos, cada una de las cuales representa un estado de conocimiento sobre la tarea.
>
> 2. Un *conjunto de operadores*, Q, que procesan información, cada uno de los cuales produce estados nuevos de conocimiento a partir de los estados de conocimiento existentes.
>
> 3. Un *estado inicial de conocimiento*, u_0, que es el conocimiento sobre la tarea que el resolutor tiene al comienzo de la resolución del problema.
>
> 4. Un *problema*, que se plantea al especificar un conjunto de estados finales deseados, G, que ha de ser alcanzado aplicando los operadores de Q.
>
> 5. La *totalidad del conocimiento disponible* para un resolutor cuando está en un estado de conocimiento dado […] (Newell & Simon, 1972, pág. 810).

Como señala Schoenfeld (1992) el trabajo de Newell & Simon tuvo la virtud de referirse a conductas observables y, al mismo tiempo, incorporar ideas y metodologías traídas de la psicología de la Gestalt, que, al servir como fuente para la elaboración de programas de ordenador, daban productos que eran, de nuevo, conductas observables, lo que abrió la vía para legitimar las técnicas de obtención de datos mediante protocolos de resolución de problemas en voz alta y para hablar de procesos cognitivos.

Todas las definiciones examinadas hasta aquí podríamos articularlas como teorías de nivel II, ya que en ellas están presentes el problema y el sujeto. De hecho, no son teorías en las que pueda verse la sombra del tercer personaje, el profesor, salvo, en todo caso, en la indicación que hay en la definición inicial de Newell & Simon de que la información *ha sido dada* al resolutor. Que el problema no se lo encuentre el sujeto, sino que alguien se lo plantee, también aparece como rasgo o posibilidad en otras ocasiones.

> Los psicólogos están de acuerdo en que el término "problema" se refiere a una situación en que se le pide a un individuo que ejecute una tarea con la que previamente no se había encontrado y para la que las instrucciones proporcionadas externamente no especifican por completo el modo de solución (Resnick & Glaser, 1976, pág. 208).

Sin embargo, ningún otro rastro puede verse que podamos asignar como efecto del personaje del profesor, que sólo está ausente en el nivel II en aras del análisis, pero que, si el análisis por niveles se hace partiendo del nivel III, esto es, de la situación en su conjunto, ha dejado su huella ya en ella.

2.2.4. DESDE LA INTELIGENCIA ARTIFICIAL: UNA DEFINICIÓN DE NIVEL I.

Si pretendemos situarnos en el nivel I, podemos encontrar en la literatura de la Inteligencia Artificial definiciones de problema que están estrechamente emparentadas con la segunda de Newell & Simon, pero de las que se ha hecho desaparecer toda mención al sujeto, o así lo parece, gracias a la formalización.

> Un problema P se define que está dado por una terna $<S, W, R>$, en la que S se llama el conjunto de *estados*; $W \subseteq S$, el *conjunto de estados ganadores*, y $R \subseteq S \times S$ el *conjunto de movimientos*. El par $<S,R>$ se llama el *grafo* del problema. Cada elemento de R, (s,s') se llama un *arco* en este grafo. Una sucesión $(s_0, s_1, s_2, \ldots)$ de estados se llama un *camino* si para cada i, $s_i R s_{i+1}$. [...] Una sucesión finita $(s_0, s_1, s_2, \ldots, s_n)$ es una *solución para* $s_0 \in S$ si y sólo si $s_n \in W$ y $(\forall\ i)$ $(s_i \in S$ y $s_i = s_{i+1}$ o $s_i R s_{i+1})$ (Banerji, 1980, pág. 193).

En una definición como ésta, el problema está caracterizado por la descripción formal que se ha hecho de él y, por tanto, es un problema *independientemente* de que alguien conozca uno de los caminos que sea una solución o lo haya recorrido ya, o de que sepa cómo determinar un camino que sea una solución. El problema además está descrito fuera del tiempo: no deja de ser problema cuando la solución ya se ha recorrido.

2.2.5. DESDE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA: PROBLEMAS VS. EJERCICIOS.

Las definiciones que se encuentran más a menudo en la literatura propia de la educación matemática ponen el énfasis, sin embargo, en que lo que caracteriza a un problema no puede establecerse sin referencia al resolutor, y modulan de distintas formas el continuo entre *enigmas* y situaciones completamente familiares que aparece en la definición de Brownell (1942) que hemos citado. Así, Brown (1985) hace depender el carácter de problema de los conocimientos del alumno en un momento determinado,

> […] muchos educadores matemáticos conciben que un problema es una cierta meta que uno intenta conseguir, tal que quien lo intenta no conoce cuál es el procedimiento que es necesario para conseguirlo en el momento en que se le plantea el problema (Brown, 1985, pág. 6).

y Kantowski (1974), por ejemplo, usa un criterio similar para definir problema distinguiéndolo de ejercicio.

> Un problema es una situación que se diferencia de un ejercicio en que el resolutor no tiene un procedimiento o algoritmo que conduzca con certeza a una solución (Kantowski, 1974, pág. 1).

Del mismo estilo es la definición que da Schoenfeld en el libro que resume sus investigaciones, *Mathematical Problem Solving,* en el apartado que titula *Qué es un problema y quiénes son los estudiantes*.

> Ser un problema no es una propiedad inherente de una tarea matemática. Más bien es una relación entre el individuo y la tarea lo que hace la tarea un problema para esa persona. La palabra problema se usa aquí en su sentido relativo, como una tarea que es difícil para el individuo que está intentando resolverlo. Más aún, esa dificultad ha de ser un atolladero intelectual más que de cálculo […] Por enunciar las cosas más formalmente, si uno tiene acceso a un esquema de solución para una tarea matemática, esa tarea es un ejercicio y no un problema (Schoenfeld, 1985, pág. 74).

Esa introducción del conocimiento de un procedimiento de solución —o un algoritmo o un esquema— como la línea divisoria entre lo que es un ejercicio y lo que es un problema es, desde nuestro punto de vista, un reflejo de la crítica a un cierto uso tradicional de los problemas como campo de aplicación rutinaria de procedimientos enseñados a los alumnos, y de la propuesta de otras intenciones educativas para los problemas, que quien traza esta línea divisoria quiere que tengan.

Ahora bien, la línea divisoria puede trazarse por otros lugares del continuo con criterios de otro estilo. Goldin (1982) recopiló un conjunto bastante amplio de definiciones de problema, en las que éste se define por oposición a ejercicio, y las examinó con respecto a la siguiente escala: 1) Se sabe la respuesta. 2) Se posee un procedimiento para llegar a la respuesta, se sabe que se posee y se sabe describir el procedimiento antes de ejecutarlo. 3) Idem, pero no se sabe describir. 4) Idem, pero no se está seguro de que el procedimiento sea el adecuado o de qué procedimiento de los que se posee es el adecuado. 5) No se tiene procedimiento alguno para el problema. Goldin mostró cómo en su catálogo de definiciones las hay que sitúan la línea divisoria entre cada uno de los escalones de la escala, y optó por adoptar el criterio de Greeno (1980) —que no separa en realidad unos supuestos verdaderos problemas de otros que serían meros ejercicios, y que puede ser observable y medible— que sitúa la línea divisoria entre 1 y 2.

> Una tarea es un problema cuando se detectan pasos o procesos entre el planteamiento de la tarea y la respuesta (Goldin, 1982, pág. 97).

La decisión de Goldin, como él mismo señala, no implica que no pueda ponerse el énfasis en el currículo en el uso de los problemas con intenciones distintas de la mera aplicación de esquemas, técnicas o métodos [5].

2.2.6. EL ORIGEN DEL TÉRMINO ‘PROBLEMA’ EN LA MATEMÁTICA GRIEGA.

Todas estas definiciones que hemos encontrado en la literatura de educación matemática tienen en común el partir de la existencia de unas tareas ordenadas en una cierta escala, que son susceptibles de ser calificadas de problemas, y las definiciones se distinguen entre sí por el lugar en que trazan la línea divisoria. Ahora bien, ninguna de ellas se preocupa por caracterizar cuáles son las tareas que son candidatas a ser problemas de matemáticas.

Pappus, en su *Synagôgê*, recoge en qué sentido se incorporó la palabra problema[6] a la lengua griega de las matemáticas.

> Aquellos que propugnan una terminología más precisa en las cuestiones estudiadas en geometría, oh excelentísimo Pandosio, usan el término *problema* en el sentido de una indagación en la que se plantea (*probálletai*) hacer o construir algo, y el término *teorema* en el sentido de una indagación en la que se investigan (*theôreítai*) las consecuencias y las implicaciones necesarias de ciertas

---

[5] En el estudio de casos que describimos en el capítulo 5, puede verse, por otro lado, cómo el proceso de resolución de un problema cuyo centro es la aplicación de un método del estilo del método cartesiano tiene la complejidad suficiente como para no desdeñar ni su estudio ni su potencial educativo, calificándolo de mero ejercicio. Borasi (1986) es, para nosotros, una muestra de cómo las necesidades propagandísticas de una postura de cambio curricular puede interferir con los análisis teóricos, ya que, aunque el título del artículo anuncia que va a tratar sobre la *naturaleza* de los problemas, su contenido está dedicado más bien a propugnar que se hagan problemas “de la vida real” y situaciones problemáticas.

[6] ‘Problema’ se deriva del verbo ‘proballô’, que significa ‘poner delante’, ‘proponer’, ‘plantear’; ‘teorema’ se deriva del verbo ‘theôreô’, que significa ‘contemplar’ y, por extensión, ‘investigar’. Pappus, en el texto que citamos, hace corresponder cada una de las dos palabras con los verbos de los que se derivan: ‘próblêma’ con ‘probálletai’, ‘theôrêma’ con ‘theôreítai’. Citamos el texto de Pappus de la recopilación de obras matemáticas griegas de Ivor Thomas, en la que sólo figuran fragmentos de él, porque es bilingüe y permite, por tanto, observar este paralelismo entre los substantivos ‘problema’ y ‘teorema’ y los verbos de los que provienen. También hemos consultado la edición de Ver Eecke (1933) en la que sólo figura su traducción francesa; en ella, este fragmento aparece en el tomo I, pág. 21. Por otro lado, Jacob Klein señala que en varios de los diálogos de Platón se puede encontrar el significado original de ‘problema’ como ‘defensa que se levanta ante sí’ (cf. Klein, 1968, pág. 232).

> hipótesis; pero, entre los antiguos, algunos las describían todas como problemas, y algunos, todas como teoremas (Thomas, 1941, T. II, pág. 567).

Los problemas están pues asociados originalmente en las matemáticas a la propuesta de *hacer o construir algo* y esto, además, los distingue de otro tipo de enunciados matemáticos que reciben el nombre de teoremas. En los *Elementos* de Euclides, problemas y teoremas, sin utilizar esas palabras, están claramente diferenciados porque unas proposiciones terminan con la fórmula “lo que había que hacer” —es decir, son problemas—, y otras, con “lo que había que demostrar” —es decir, son teoremas. Proclo en su *Comentario al libro primero de los Elementos de Euclides*[7] distingue de entre todo lo que se sigue de los principios —es decir, del conjunto de las definiciones, los postulados y las nociones comunes— “los problemas y los teoremas, abarcando los primeros la generación, división, substracción o adición de figuras y, en términos generales, los cambios que se realizan con ellas, y exhibiendo los segundos los atributos esenciales de cada una” (Heath, 1926, I, págs. 124-125; Morrow, 1970, pág. 63), y recoge la polémica entre “los antiguos” a que hace alusión Pappus diciendo que las cosas que se plantean como problemas *hay que hacerlas, crearlas, procurárselas*, y de lo que se trata es precisamente de hacerlas o de encontrarlas porque existe la posibilidad de que sean de manera distinta a lo que dice el enunciado; así, un ejemplo de problema que pone Proclo —construir un triángulo equilátero sobre una recta dada— es un problema porque sobre una recta también se puede construir un triángulo que no sea equilátero. Las cosas que se plantean como teoremas no son, sin embargo, contingentes: son así y eso es lo que hay que mostrar. De modo que, escribe Proclo, “si pedimos inscribir un ángulo recto en un semicírculo, formulando la petición como problema, la consideraremos extraña a la geometría porque todo ángulo inscrito en un semicírculo es recto” (Heath, 1926, pág. 126; Morrow, 1970, pág. 65). No hay ahí nada que crear, nada que procurarse: siempre que se dibuje un ángulo inscrito en un semicírculo, será recto sin que haya que hacer nada para ello. Ahora bien, también señala Proclo que aunque Euclides indique la diferencia entre problemas y teoremas escribiendo sólo al final de éstos “lo que había que demostrar”, las proposiciones de los Elementos que son problemas también contienen demostraciones, pero que éstas se hacen para mostrar que la construcción satisface las condiciones del problema y no para mostrar la “naturaleza de lo que se ha investigado”.

En estos comentarios de Pappus y Proclo podemos ver cómo, en los siglos III y V, respectivamente, se recogía lo que había sido la aparición de la idea de problema de matemáticas entre “los antiguos”. No nos interesa discutir la distinción entre teorema y problema que depende de su relación con los atributos esenciales o las afecciones, ya que ésta está marcada por las concepciones filosóficas de Proclo, en las que no es éste el lugar de entrar. Por otro lado, esa distinción no sólo

---

[7] Las referencias al texto de Proclo las hacemos tanto a través de Heath (1926), que incluye extensos fragmentos de él, como de la traducción inglesa completa de Morrow (1970).

había sido debatida ya por "los antiguos" sino que puede considerarse que acaba difuminándose[8], y, en todo caso, no la fundamentaríamos nosotros en concepciones filosóficas como las de Proclo. Lo que sí nos interesa recoger de esa discusión es que en los problemas de matemáticas hay que hacer algo con los objetos matemáticos que aparecen en ellos —una construcción con figuras, un cálculo con números, etc.— y que el procedimiento con que ese algo finalmente se obtenga *ha de probarse mediante una argumentación*, cuyas reglas están establecidas por un marco discursivo determinado, propio de una práctica matemática concreta.

Este análisis de lo que es un problema está hecho sin considerar más que el problema —es decir, es del nivel I— y podemos incorporarlo a las definiciones que hemos examinado anteriormente. Así, las tareas, que algunas de las definiciones anteriores diferencian en ejercicios y problemas al ser análisis de nivel II (o III, por las intenciones educativas implícitas) que toman en cuenta si el resolutor (o el alumno) ya conoce el procedimiento que resuelve el problema, serán probablemente *problemas de matemáticas* en el sentido derivado del análisis que acabamos de hacer.

2.2.7. UNA DEFINICIÓN DE PROBLEMA DE MATEMÁTICAS PROPUESTO EN EL SISTEMA ESCOLAR.

Ya hemos adelantado que no pretendíamos determinar qué es un problema sino señalar usos del término en la bibliografía y delimitar en qué sentido vamos a usarlo nosotros en este texto. De hecho, lo usaremos en varios sentidos que provienen no sólo de los análisis que hemos hecho de las definiciones que aparecen en la bibliografía, sino también de las observaciones de las actuaciones de los alumnos al resolver problemas.

En primer lugar y en el nivel I consideraremos como problemas de matemáticas, siguiendo a Polya (1945), tanto lo que en la tradición griega eran problemas como teoremas y recuperaremos esa distinción como una tipología de problemas, que trataremos en el apartado 2.3. Los problemas siguen caracterizándose porque hay que hacer algo, pero ahora la búsqueda de una demostración aparece también como un hacer específico de las matemáticas, que, por otro lado, también estaba presente en la concepción griega de los problemas.

La distinción entre ejercicio y problema la incorporaremos a otra tipología de problemas, que mencionaremos en el apartado 2.3, y la enunciaremos en el nivel II.

---

[8] Cf., por ejemplo, el comentario de Jacob Klein a propósito de la imprecisión con que Vieta distingue entre los tipos de análisis que los griegos asociaban con los problemas y los teoremas : "al concentrar sus reflexiones en los procedimientos ya no distingue entre *teoremas* y *problemas*, o, más precisamente, […] ve *todos los teoremas como problemas*. [Vieta] está menos interesado en las *verdades* en sí mismas que hay que encontrar, que en encontrar el *encontrar correcto*" (Klein, 1968, pág. 166). Veremos de inmediato que la distinción entre problema y teorema la convierte Polya en una distinción interna a los problemas.

Para el nivel III, usaremos una definición operativa que pretende dar cuenta de que el problema se presenta en una situación escolar y que, por tanto, es el profesor quien se lo plantea al alumno, que no es un mero resolutor, y éste ha de darle al profesor la solución o el resultado. Consideraremos que *un problema escolar de matemáticas es una tarea de contenido matemático, cuyo enunciado es significativo para el alumno al que se ha planteado, que éste desea abordar, y para la cual no ha producido sentido*[9]. La condición de que el alumno "desee abordar" el problema señala un límite de nuestro estudio, indicando que no vamos a tomar en consideración cuestiones que hay quien sitúa en el campo de la llamada "motivación", y quien, en el terreno profundo del inconsciente. El calificativo "significativo" lo hemos introducido para eliminar del campo de los problemas escolares los enigmas, pero no ha de verse como una obligación de que el alumno conozca algo que pudiera llamarse "el significado" de los conceptos involucrados en la situación, más bien, en términos semióticos, el sujeto dispone de algún código con el que interpretar la situación, aunque ese código no lo comparta con quien le plantea el problema. Con ello pretendemos también que pueda darse cuenta de cualquier interpretación que el alumno pueda hacer del texto del problema, siempre que efectivamente haga alguna. De la misma manera, "para la que no ha producido sentido" establece una condición que permite dar cuenta de cualquiera de las formas de acabar un problema que suelen presentarse en los sistemas educativos. El término "sentido" está traído aquí de algunas teorías semióticas que lo reservan para indicar lo que el sujeto produce al interpretar un texto tanto si comparte el código con el emisor del texto, como si no lo comparte[10], como si lo que produce constituye a la vez un gesto de producción de código. Con ello pretendemos dar cuenta de maneras tan diversas de terminar la resolución de un problema como la obtención del resultado, la que se deriva del modelo de competencia que postulamos —es decir, la explotación del problema con fines epistémicos mediante su revisión-extensión—, la obtención de resultados desatinados con la convicción de que son correctos o, incluso, la entrega al profesor de la tarea parcialmente realizada.

---

[9] Cuando elaboramos esta definición por primera vez, nos inspiramos en una que proponía Lesh en un manuscrito nunca publicado: "Un problema es una situación significativa a la que un estudiante quiere dedicarse, pero para la que no dispone de un modelo conceptual estable." (Lesh, 1982, pág. 12) . Ahora bien, nuestra formulación se separa de la de Lesh no sólo por estar en otro mundo —ya que él intentaba caracterizar el proceso de resolución de problemas el mundo de los problemas "aplicados"—, sino por expresarse en términos semióticos, con lo que de hecho habla de otra cosa.

[10] Este uso del término 'sentido' lo hemos tomado de Talens y Company (1984). Ver también una exposición de carácter más elemental en el libro, cuyo autor dice llamarse "Ramón Carmona", *Cómo se comenta un texto fílmico* (Carmona, 1992). En ese libro, además, este uso del término 'sentido' se aplica al análisis de unos textos —los fílmicos—, que comparten con los textos matemáticos la heterogeneidad de la materia de la expresión y, en particular, la presencia en ellos de segmentos de naturaleza visual. Sobre esta característica de los sistemas matemáticos de signos, ver Puig (1994b).

Finalmente, para poder examinar la concepción de los alumnos de lo que es un problema de matemáticas, tendremos que considerar también la definición mínima "un problema escolar de matemáticas es cualquier tarea que se denomina *problema* en una clase de matemáticas".

2.3. TIPOLOGÍAS Y TIPOS DE PROBLEMAS.

Presentamos en este apartado las dos tipologías de problemas de matemáticas que usaremos en este trabajo[11].

La primera es una clasificación de los problemas de matemáticas que tomamos de Polya (1945) y que recoge la distinción griega entre teoremas y problemas. Llamaremos, como Polya, "problema de probar" y "problema de encontrar", al teorema y el problema, respectivamente. Esta distinción es importante, además de por lo que se deriva de la caracterización hecha en el apartado anterior, por otras muchas características que están descritas en Polya (1945, 1962-65), que tienen consecuencias para la forma que ha de adoptar su resolución[12]. Aquí sólo citaremos, ya que vamos a usar esa terminología, que las partes del problema son diferentes en uno y otro caso: en un problema de encontrar hay incógnita, datos y condición, y en un problema de probar, hipótesis y conclusión.

Señalaremos además, que, aunque la distinción entre problema de encontrar y problema de probar es nítida, en el curso del proceso de resolución el problema puede cambiar de tipo, o, más exactamente, puede transformarse en uno del otro tipo. Ya hemos puesto de manifiesto que todo problema de encontrar ha de incluir la prueba de que lo que se ha encontrado verifica las condiciones del problema. Pero, además, cualquier problema de encontrar se transforma en un problema de probar con sólo que, de alguna manera, se haga una conjetura sobre su resultado y con ésta se formule el problema de probar que el resultado es efectivamente ése[13]. En un problema de probar, por su parte, pueden delimitarse unos objetos, que se toman como dados, y unas propiedades o relaciones entre ellos, que también se toman como dadas —lo que constituye una hipótesis—, de manera que la

[11] Hay otras muchas tipologías de problemas. Una que se menciona habitualmente en la literatura de resolución de problemas es la de Greeno (1978), pero los problemas de matemáticas y los que vamos a utilizar en particular en este trabajo se encajan a la fuerza en esos tipos, por ello, nosotros no la tomaremos en consideración.

[12] En los análisis de los problemas que hacemos en los capítulos 5 y 6 y en los análisis de los procesos de resolución de los alumnos, describimos sobre los ejemplos concretos esas consecuencias siempre que es el caso.

[13] Veremos más adelante la importancia que tiene este tipo de transformación en algunos procesos de resolución.

conclusión sea una relación entre otro objeto que se toma como incógnita y los que se toman como datos, con lo que el problema de probar se transforma en el problema de encontrar esa incógnita[14].

La segunda tipología de problemas es una manera de segmentar el continuo y recoger así la distinción entre ejercicio y problema, para la que hemos adoptado los nombres utilizados por Butts (1980), que son *ejercicios de reconocimiento, ejercicios algorítmicos, problemas de aplicación, problemas de búsqueda* y *situaciones problemáticas*. El límite superior ya lo trazamos con nuestra definición operativa de problema, dejando fuera del continuo a los enigmas. La línea de división entre ejercicios y problemas está trazada en función de la característica de los problemas de matemáticas de que su solución ha de incluir un argumento que pruebe que el resultado cumple las condiciones del problema. Así, si el resolutor lo único que tiene que hacer es buscar en la memoria el resultado, se tratará de un *ejercicio de reconocimiento* y si ha de ejecutar un algoritmo de forma automática, se tratará de un *ejercicio algorítmico*. Pero usaremos el término *problema* cuando el resolutor conoce un procedimiento para resolver el problema y ha de justificar que ese procedimiento es adecuado para obtener su solución, o siempre que la ejecución de un procedimiento tenga que ir acompañada de la argumentación de que sus pasos son adecuados —*problemas de aplicación*—, o cuando ha de crear un procedimiento de solución —*problemas de búsqueda*. El nombre de *situaciones problemáticas* lo utilizó Butts para aquéllas en cuyo enunciado no se ha precisado qué es lo que hay que hacer y ésa es la primera tarea del resolutor, de modo que no se sitúan exactamente en el continuo en que están los otros tipos. En este trabajo, sólo trataremos con *problemas de aplicación* y *problemas de búsqueda*.

La caracterización que hemos hecho de estos cinco tipos de problemas deja bien claro que la adscripción de un problema a un tipo sólo puede hacerse estrictamente considerando al resolutor que se enfrenta a él y que puede variar de resolutor a resolutor. Sin embargo, en los análisis de los problemas que haremos en los capítulos siguientes, los adscribiremos a tipos de forma general, ya que siempre es posible considerar el problema con respecto al alumno típico que define el contenido del currículo.

2.4. EL PROCESO DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

En nuestro libro *Problemas aritméticos escolares* (Puig y Cerdán, 1989), ya dedicamos un apartado al proceso de resolución de problemas, en el que hacíamos historia señalando que el estudio de la resolución de problemas, que bajo la égida del conductismo se había centrado en los *productos*

---

[14] Esta transformación de un problema de probar en uno de encontrar la hemos descrito para la forma canónica del enunciado de un problema de probar. Hay también problemas de probar, cuyo enunciado no tiene forma hipotética sino aseverativa, que se transforman en problemas de encontrar sin necesidad de una elaboraración como ésta. La transformación del problema del tronco de cono que analizamos en el capítulo 5 es una muestra de ello —pese a que, en ese caso, en el enunciado que presentamos a los alumnos, modificáramos la forma aseverativa del enunciado al formularlo como una pregunta.

de la actividad de los resolutores, había comenzado a bascular durante los años setenta hacia la consideración del *proceso*, como consecuencia de la irrupción de perspectivas psicológicas de otra índole. En ese apartado del libro, introdujimos además una definición de *proceso de resolución* y distinguimos dos tipos de análisis del proceso, que calificamos de *microscópico* y *macroscópico*, y, a lo largo de todo el libro, estudiamos en detalle el caso de los problemas aritméticos elementales (PAE) y los problemas aritméticos de varias operaciones combinadas (PAVOC).

Nos limitaremos aquí a reiterar que llamamos *proceso de resolución* de un problema a *la actividad mental y manifiesta que desarrolla el resolutor desde el momento en que, presentándosele un problema, asume que lo que tiene delante es un problema y quiere resolverlo, hasta que da por acabada la tarea*.

Para ser coherentes con esta definición y con el énfasis en el proceso distinguiremos de forma sistemática entre *resultado*, *solución* y *resolución*. Usaremos el término *resultado* para indicar lo que contesta a la pregunta del problema, ya sea un número, una fórmula, una expresión algebraica, una construcción geométrica, una derivación lógica, etc. El término *solución* lo usaremos para indicar la presentación final del conjunto de pasos que conducen de los datos a la incógnita o de la hipótesis a la conclusión[15]. Finalmente, usaremos el término *resolución* para indicar el conjunto de las acciones del resolutor durante el proceso, que pueden conducir a obtener la *solución* o no.

A diferencia de lo que hicimos en el libro citado, en este trabajo estudiamos el proceso de resolución de problemas de matemáticas en el mundo de la pura resolución de problemas, es decir, que centramos nuestra atención en los elementos del proceso que son independientes del contenido. Además lo que pretendemos examinar son procesos de resolución de alumnos que han recibido un curso cuya intención es desarrollar un tipo de pericia en resolver problemas de matemáticas, constituido por el dominio de formas de actuar que son independientes del contenido matemático concreto del problema, tipo de pericia que llamaremos *estilo heurístico* de resolución de problemas y que corresponde al modelo de competencia que tratamos en el siguiente capítulo.

---

[15] La distinción entre *resultado* y *solución* no siempre puede hacerse: hay clases de problemas para las que *solución* y *resultado* coinciden. Ahora bien, en los términos de la definición formalizada de problema de Banerji, que hemos citado en 2.2.4, la distinción entre el resultado, la solución y la resolución es evidente. Por otro lado, hay tareas escolares en las que lo que el profesor pide es el resultado y otras en las que pide la solución. También cabe que el profesor pida la resolución como hemos hecho nosotros en el curso que constituye el ámbito de este trabajo, pero esto no es una práctica usual.