5.4. LOS CASOS.

5.4.1. EL CASO DE M Y MJ CON EL PROBLEMA DE LOS NÚMEROS CON UN NÚMERO IMPAR DE DIVISORES.

5.4.1.1. *Análisis del problema*.

La relación de los números naturales con su número de divisores es una situación problemática rica cuya investigación puede producir un buen número de problemas con potencial heurístico. Enunciada como una situación problemática aparece como material de instrucción en la investigación realizada por Burton (s. f.) con alumnos de 9 a 13 años y en el producto comercial derivado de ella (Burton, 1984b), y nosotros hemos utilizado también ese enunciado como material de instrucción en nuestro curso, en la etapa inicial en que a los alumnos se les considera en el estado de resolutores, en años subsiguientes. En esa etapa del curso, el énfasis está puesto en la exploración empírica de los hechos que plantea el enunciado del problema y la generación de nuevos hechos asociados, en el uso de destrezas para representar tales hechos y los objetos involucrados y para organizarlos de forma sistemática, en la distinción entre los hechos observados o conjeturados y los hechos probados y en la resolución de los problemas de más de una manera, para todo lo cual esta situación problemática es potencialmente adecuada.

El enunciado del problema derivado de esa situación problemática tal como se planteó a M y MJ es "Sea $d(n)$ el número de divisores de n. Probar que $d(n)$ es impar si y sólo si n es un cuadrado." Formulado así, subrayamos su carácter de problema de probar e introdujimos en el propio enunciado la expresión del número de divisores de un número mediante notación simbólica[12].

Una solución del problema es el argumento que esbozamos a continuación. Si a divide a n, entonces hay un número b tal que $a \cdot b = n$, de modo que los divisores de n van por parejas. La única manera de que su número sea impar es que se repitan. Ahora bien, si $a \cdot b = n$, $c \cdot d = n$ y $a \neq c$, entonces $b \neq d$; por consiguiente sólo puede darse tal repetición en el caso en que en una de las parejas $a = b$, lo que equivale a que $n = a^2$.

---

[12] Una versión de este problema, en la que está enunciado como problema de encontrar y en lenguaje vernáculo —"¿Qué números tienen un número impar de divisores?"—, se encuentra en Mason, Burton, & Stacey (1982) entre los problemas propuestos al final del libro. La solución del problema así enunciado exige resolver también el problema de probar, y en su resolución es útil el uso de expresiones simbólicas; pero el enunciado que nosotros elegimos sitúa de entrada el proceso de resolución en ese terreno, que es en el que pretendíamos observar la actuación de los sujetos.

Otra manera de resolver el problema recurre a la solución del problema auxiliar Q, “Hallar $d(n)$”[13]. La solución de este problema conlleva representar n descompuesto en factores primos, $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_m^{\alpha_m}$, y el resultado, $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_m+1)$, se expresa en función de esa representación y no de n. Una vez así resuelto Q, se vuelve al problema original P, transformándolo en el problema P’, “Probar que $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_m+1)$ es impar si y sólo si $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_m^{\alpha_m}$ es un cuadrado”, obtenido substituyendo $d(n)$ y n en el enunciado de P por las expresiones obtenidas para ellos en la solución de Q.

El problema P’ se resuelve entonces por la cadena de equivalencias $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_m+1)$ es impar $\leftrightarrow$ todos los (α_i+1) son impares $\leftrightarrow$ todos los α_i son pares $\leftrightarrow$ $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_m^{\alpha_m}$ es un cuadrado.

Es razonable también, tanto para el problema P como para el problema P’, que se aborde con la descomposición en partes que consiste en formular por separado cada uno de los dos sentidos de la implicación, con la intención de resolver primero uno de los dos sentidos, y que al menos parte de la solución pueda usarse para resolver el otro. Otra herramienta heurística que es razonable aplicar es el paso al contrarrecíproco[14]. Ahora bien, en cualquiera de los casos, los problemas generados se pueden resolver con argumentos que no son sino versiones de los dos que hemos expuesto, adaptadas a la transformación del problema. Así, por ejemplo, el contrarrecíproco de P’, “Probar que $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_m+1)$ es par si y sólo si $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_m^{\alpha_m}$ no es un cuadrado” se resuelve por la cadena de equivalencias “contrarrecíprocas” $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_m+1)$ es par $\leftrightarrow$ algún (α_i+1) es par $\leftrightarrow$ algún α_i es impar $\leftrightarrow$ $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_m^{\alpha_m}$ no es un cuadrado. La aplicación de estas herramientas heurísticas no introduce pues variaciones sustanciales en los argumentos que hay que utilizar para resolver el problema original o sus transformados, sino sólo en la necesaria gestión de las relaciones en el espacio de problemas creado por ellas. Los resolutores pueden, sin embargo, fundar su decisión en la facilidad de manejo de las propiedades “par” y “no cuadrado” frente a “impar” y “cuadrado”, en virtud quizá de la expresión de ellas que se esté utilizando, o preferir la descomposición en dos implicaciones ante la falta de seguridad de que los argumentos sean reversibles.

También puede ser invocada razonablemente la herramienta heurística “examen de posibilidades”, ya que el campo de objetos del que trata cualquiera de los problemas del espacio de problemas de P se divide naturalmente en pares e impares y, además, desde el momento en que están involucrados los divisores —y más aún el número de divisores—, la división entre primos y compuestos está a la mano. Sin embargo, su uso no conduce a problemas que se resuelvan con argumentos diferentes que

---

[13] Que podemos considerar que se formula como consecuencia de la sugerencia heurística “¿Qué conozco o qué puedo averiguar de los objetos o las propiedades que aparecen en el enunciado?”, si el análisis corresponde al nivel II (o III). En el nivel I, la reducción de P a P’ puede verse como el producto del uso del método de análisis teorético.

[14] El análisis del problema en el nivel I establece que la aplicación de estas dos herramientas heurísticas es factible y la forma en que transforman el problema. En el nivel II, cabe incorporar al análisis en qué pueden fundamentarse los juicios de facilidad que el resolutor pueda hacer.

valga la pena incorporar a este análisis. Sólo mencionaremos que puede darse una aplicación no intencionada del examen de posibilidades, y así describimos *post hoc* la aparición del problema Q_2, "Hallar $d(n)$, para n no primo", en el protocolo de M y MJ, al recordar M el resultado del problema Q_1, "Hallar $d(n)$, para n primo", no formulado.

Finalmente, la herramienta heurística "consideración de un caso" también es razonable que se aplique al problema P. Como siempre que esta herramienta heurística se aplica a un problema de probar, lo que hay que esperar de su uso es encontrar en los casos un argumento que no utilice las propiedades particulares del caso y que, por tanto, pueda trasladarse al problema original[15]. La figura 5.1 ilustra cómo puede encontrarse en los casos el primer argumento que hemos expuesto.

6: 1 2 3 6   9: 1 3 9   12: 1 2 3 4 6 12   16: 1 2 4 6 16

Figura 5.1

Ahora bien, si esta herramienta heurística se aplica al problema Q —que es de encontrar—, como no hay una expresión de $d(n)$ en función de n, sino en función de los exponentes de la expresión de n descompuesto en producto de primos, su uso no puede conducir a la obtención de expresión alguna para $d(n)$ observando los resultados de los problemas "Hallar $d(1)$", "Hallar $d(2)$", "Hallar $d(3)$", etc. Un buen gestor debe advertir, si no se quiere abandonar simplemente el enfoque, que no se puede esperar la obtención de una pauta en los resultados de esos problemas, pero que se puede, o bien regresar al problema P y reconsiderar los casos para él, o bien analizar en cada caso no el número de divisores sino cuáles son y qué los produce, buscando pautas no en el número sino en el conjunto de divisores y su estructura.

5.4.1.2. *El espacio de problemas en la resolución de M y MJ.*

En el análisis del problema que acabamos de realizar hemos esbozado el espacio teórico de problemas asociado a su resolución, sin enumerar los problemas en detalle, sino limitándonos a señalar qué puede generarlos. En el protocolo de M y MJ se pueden encontrar un buen número de ellos y alguno más que no hemos contemplado en el análisis teórico porque su pertenencia al espacio de problemas de la actuación de M y MJ es el producto del uso errado de procedimientos de generación de problemas del espacio, como veremos de inmediato. En la lista siguiente, los enunciamos e indicamos la notación que usaremos para designar cada uno de ellos.

- P: Probar que $d(n)$ es impar si y sólo si n es un cuadrado.
- P_1: Probar que si $d(n)$ es impar, entonces n es un cuadrado.

[15] Importa subrayar esto porque la consideración de una serie de casos suele identificarse exclusivamente con la búsqueda de pautas en resultados organizados en tablas, no sólo por parte de muchos alumnos, sino también en materiales de enseñanza.

- P_2: Probar que si *n* es un cuadrado, entonces $d(n)$ es impar.
- P_{1C}: Probar que si *n* no es un cuadrado, entonces $d(n)$ es par.
- Q: Hallar $d(n)$.
- Q_1: Hallar $d(n)$, para *n* primo.
- Q_2: Hallar $d(n)$, para *n* no primo.
- D: Hallar D(*n*). [D(*n*) es el conjunto de divisores de *n*.]
- E: Calcular el cardinal de D(*n*) en función de su estructura.
- P': Probar que $T_Q(d(n))$ es impar si y sólo si *n* es un cuadrado.
- R: Probar que si *n* no es primo, entonces $d(n)$ es impar.
- I(R): El problema R, representado como $R_{i\in N}(i)$.
- I_0(R): El problema R(0).
- I_n(R): El problema $R(n)\rightarrow R(n+1)$.
- R_1: Probar que si *n* no es primo y es par, entonces $d(n)$ es impar.
- R_2: Probar que si *n* no es primo y es impar, entonces $d(n)$ es impar.

La formulación del problema E, "Calcular […] en función de su estructura", no es muy precisa, pero indica que no se quiere contar, ni calcular en función de *n*. El problema P' no lo hemos enunciado de la misma forma que antes ya que M y MJ no llegaron a resolver el problema Q, por lo que sólo podemos darle a P' la formulación correspondiente a la intención con que abordaron el problema Q —cambiar $d(n)$ por el resultado que proporcionara Q— y no podemos establecer que *n* vaya a modificarse por la solución de Q, ya que ellos pensaban que obtendrían el resultado de Q en función de *n*. Los problemas R, R_1 y R_2 son los que no aparecen en el análisis teórico. Representar R como $R_{i\in N}(i)$ significa que R se reformula de manera que se muestra cuál de los objetos que aparece en su enunciado se puede considerar ordenado por el conjunto N, reformulación que viene obligada por el método de inducción completa, e I_0(R) e I_n(R) designan los problemas correspondientes a los dos pasos del método, R(0) y $R(n)\rightarrow R(n+1)$.

Además de esta lista de problemas, hay que añadir también los problemas generados por la aplicación de la consideración de casos al problema Q_2, y un problema nunca enunciado pero que aflora en algunos comentarios de MJ sobre la paridad de *n* y se hace explícito en MJ, 124[16], cuando ésta afirma que no hay relación entre la paridad de *n* y la de $d(n)$, que no consideramos porque sólo está presente para ella y de forma marginal.

La figura 5.2 ilustra las relaciones entre los problemas del espacio y los procedimientos que los generan. C significa "paso al contrarrecíproco"; DP, "descomposición en partes"; EP, "examen de posibilidades"; I, "transformación por el método de inducción completa", y T_Q, "transformación por la solución de Q". La flecha punteada indica que el problema R se genera a partir de Q, pero por un procedimiento errado.

[16] Ítem 124 del protocolo escrito, que incluimos al final del análisis del caso.

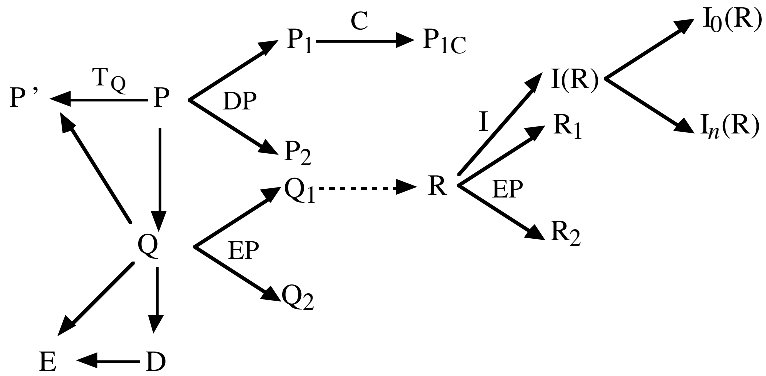

Figura 5.2

Las relaciones entre los problemas del espacio vienen determinadas por los procedimientos que los generan. P es equivalente a la conjunción de P_1 y P_2, ya que, en esta ocasión, la descomposición en partes es meramente el desglose de una equivalencia lógica en las dos implicaciones cuya conjunción la compone. Q y R son equivalentes a Q_1 y Q_2 y R_1 y R_2, respectivamente, por estar generadas por la herramienta heurística "examen de posibilidades"; P_{1C} es equivalente a P_1, por estar generado por la herramienta heurística "paso al contrarrecíproco", y R es equivalente a I(R) e I(R) a la conjunción de $I_0(R)$ e $I_n(R)$, ya que los genera el método de inducción completa. Finalmente, la conjunción de P' y Q es más ambicioso que P, por el mecanismo de generación que ya hemos descrito, y la conjunción de D y E es más ambicioso que Q.

El problema R se genera como consecuencia de la observación del resultado del problema Q_1 —"En cualquier número primo, 'de pe' igual a dos, [...]" (M, 54)—, que se enuncia a la vez que se recuerda su resultado. Lo que se observa es precisamente la paridad del resultado —"[...] que es par, ¿no?" (M, 54)—, es decir, que el problema no enunciado "Probar que si n es primo, entonces $d(n)$ es par" está también resuelto. La relación entre este problema y R puede ilustrarse con el "regreso" que muestra la figura 3, en la que los problemas intermedios son los problemas no enunciados

P_{1C1}: Probar que si n es primo, entonces $d(n)$ es par;

$P_{1,1}$: Probar que si $d(n)$ es impar, entonces n no es primo;

S: Probar que $d(n)$ es impar si y sólo si n no es primo;

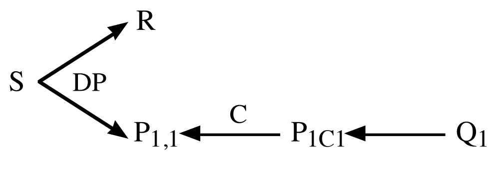

Figura 5.3

y los procedimientos repiten en sentido inverso el esquema "descomponer en partes una equivalencia" y "paso al contrarrecíproco". Ahora bien, el problema S es contradictorio con P, con lo que de nada vale el problema R para resolver P. La cadena de regreso está de hecho viciada al no analizarse la relación del problema P_{1C1}, encontrado como consecuencia de la resolución de Q_1, con los otros problemas derivados directamente de P. Si se hace ese análisis, el problema P_{1C1} aparece como más débil que P_{1C}, ya que tiene una condición más restrictiva en la hipótesis (el conjunto de los números primos está contenido estrictamente en el de los números que no son cuadrados). Como consecuencia, su contrarrecíproco $P_{1,1}$, tiene una condición más amplia en la conclusión, con lo que es también más débil que P_1. De ahí se deriva que los recíprocos respectivos están en la relación inversa, es decir, que R es más fuerte que P_2. Pero si $P_{1,1}$ es más débil que P_1 y R es más fuerte que P_2, sus conjunciones respectivas, S y P son contradictorios.

Al ser P_{1C1} un problema más débil que P_{1C} por tener una condición más restrictiva en la hipótesis, es fácil representarlo como el resultado de la aplicación de la herramienta heurística "examen de posibilidades" al problema P_{1C}, ya que la condición más restrictiva se puede obtener añadiendo una cláusula en la hipótesis que divida el campo de objetos; P_{1C2} sería entonces "Probar que si n es no cuadrado y no primo, entonces $d(n)$ es par" y el espacio de problemas podría representarse por la figura 5.4, en la que hemos señalado la relación de contradicción entre S y P y su fuente en la inadvertencia de la relación entre P_{1C} y P_{1C1}.

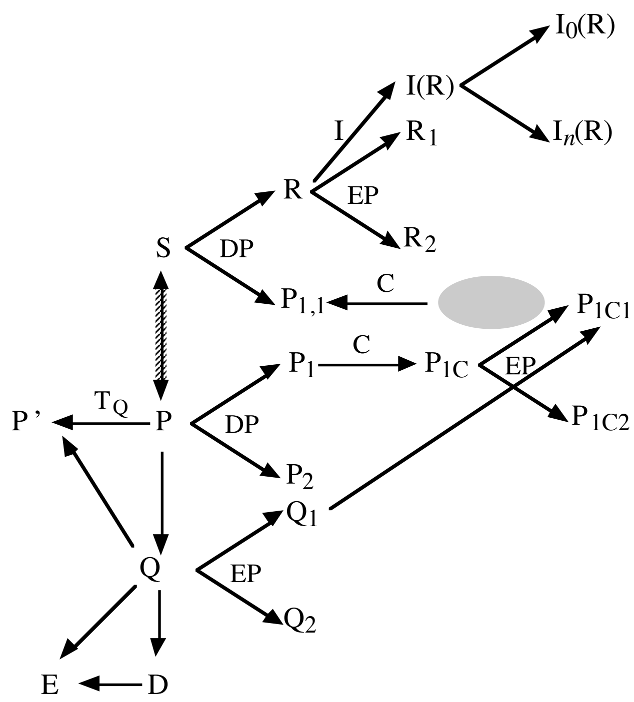

Figura 5.4

5.4.1.3. *Un diagrama de episodios del proceso de resolución.*

La complejidad del espacio de problemas en que se desarrolla el proceso de resolución nos ha conducido a representar el diagrama de episodios reflejando en él sólo cuatro de los problemas del espacio: P, Q, Q_2 y R. La posibilidad de hacer esta economía en la representación viene dada porque ésos son los cuatro problemas en cuya resolución se invierte tiempo y esfuerzo. El protocolo se caracteriza, entre otras cosas, porque en él se muestra el conocimiento de un buen número de procedimientos para generar problemas y enfoques para abordarlos, pero también por una gestión defectuosa de lo que se hace. Esto tiene como consecuencia para lo que ahora nos ocupa que sólo se prosiga alguna de las vías abiertas para la resolución del problema. Así, P_1 y P_2 se enuncian al comienzo del protocolo —“Primero hacia un lado y luego hacia otro” (MJ, 5), “Supongamos que ‘de ene’ es impar…, y probar que ene es un cuadrado” (M, 6); pero es Q, que también se enuncia pronto (M, 10 y MJ, 11) de pasada, y luego se formula explícitamente (M, 34 y M, 36) el que se prosigue. Q_1 ya hemos dicho que no se enuncia, sino que su resultado se recuerda y provoca la formulación de Q_2. P_{1C} apenas enunciado se abandona sin abordarse realmente —“[…] ¡Pero es que ya lo hemos hecho! Porque aquí hay cuatro y éste no es cuadrado.” (MJ, 77)— y R_1 y R_2 sólo se enuncian —“Probando para los pares, que sabes que no son primos, y después para los impares. Pero no sabemos…” (M, 121)— sin hacer nada con ellos, ya que la decisión de MJ es poco firme —“Pues vamos a hacerlo con los pares. ¿O no?” (MJ, 122).

En el diagrama hemos situado los episodios en uno de los cuatro problemas P, Q, Q_2 y R. Cuando lo que se está haciendo en el episodio corresponde a alguno de los otros problemas, hemos situado el episodio en el problema más directamente relacionado con lo que se está haciendo. Así, por ejemplo, el breve episodio 14 en que aparecen los problemas R_1 y R_2 está situado en el problema R, y también están situados en el problema R los episodios en que se intenta resolver este problema mediante el método de inducción completa, en los que, por tanto, tiene que haber acciones correspondientes a la resolución de los problemas I(R), I_0(R) y I_n(R). Además, la calificación del episodio 14 como de “plan” está hecha también respecto al problema R —respecto a R_1 o R_2 las acciones que se realizan habría que calificarlas de “formulación”.

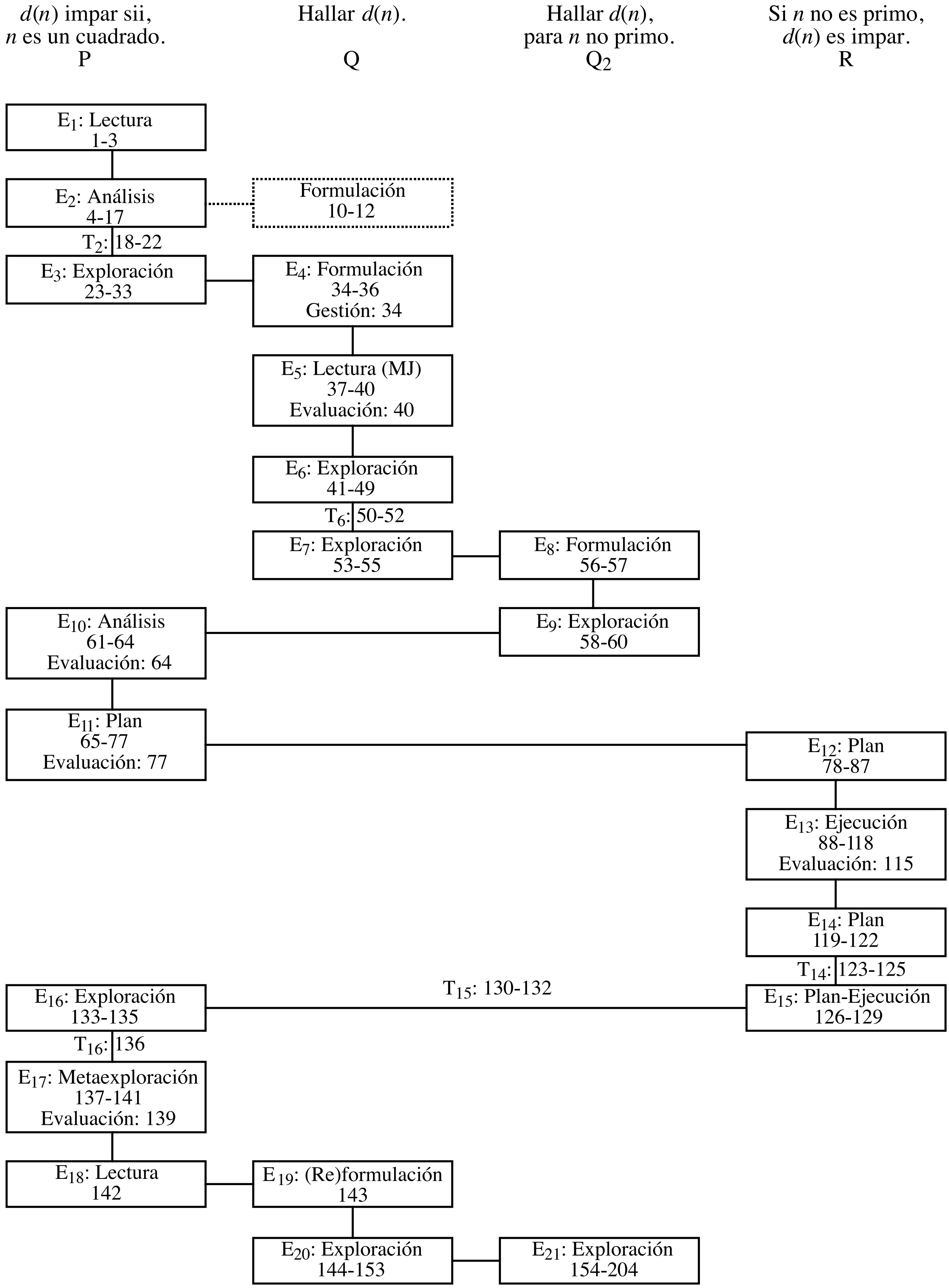
d(n) impar sii, n es un cuadrado.
P
Hallar d(n).
Q
Hallar d(n), para n no primo.
Q2
Si n no es primo, d(n) es impar.
R
E1: Lectura 1-3
E2: Análisis 4-17
Formulación 10-12
T2: 18-22
E3: Exploración 23-33
E4: Formulación 34-36 Gestión: 34
E5: Lectura (MJ) 37-40 Evaluación: 40
E6: Exploración 41-49
T6: 50-52
E7: Exploración 53-55
E8: Formulación 56-57
E9: Exploración 58-60
E10: Análisis 61-64 Evaluación: 64
E11: Plan 65-77 Evaluación: 77
E12: Plan 78-87
E13: Ejecución 88-118 Evaluación: 115
E14: Plan 119-122
T14: 123-125
E15: Plan-Ejecución 126-129
T15: 130-132
E16: Exploración 133-135
T16: 136
E17: Metaexploración 137-141 Evaluación: 139
E18: Lectura 142
E19: (Re)formulación 143
E20: Exploración 144-153
E21: Exploración 154-204

Figura 5.5

5.4.1.4. *La reconstrucción racional*.

Tras un breve episodio de lectura, se pasa a un episodio de análisis que comienza fijándose en la estructura lógica del enunciado, es decir, en la doble implicación —"[…] si y sólo si…" (M, 4)—, lo que conduce a descomponer el problema en partes —"[…] hay que probar dos cosas" (M, 4)— y enunciar los problemas P_1 y P_2 (MJ, 5). El análisis de lo que se conoce —"Vamos a ver, sabemos que…" (MJ, 9)— conduce a plantear que "O sea, hay que saber…, el número de divisores…" (M, 10) "…cuántos divisores tiene ene." (M, 12), con lo que queda esbozado que hay que resolver el problema Q. Aunque parece apuntarse al final del episodio que se va a pasar al problema Q, la tensión entre M y MJ —que se destapa por primera vez en el "Dilo tú" de MJ, 17, y el gesto con que él le cede la palabra a ella— hace que MJ proponga "[…] considerar un caso particular" (MJ, 20) con la intención de explorar —"[…] a ver qué pasa" (MJ, 22)—, mientras que M prefiere "Cualquier ene" (M, 19). Como la intención con que MJ quiere usar la herramienta heurística es la exploración y M, por su parte, quiere que sea "un número cualquiera" (M, 21), no organizan una serie de casos, ni precisan qué es lo que van a examinar en ellos, sino que eligen el diez y comprueban que su número de divisores es par. Luego piensan en coger un número que sea cuadrado (M, 26; MJ, 27), eligen el dieciséis y, tras un primer cálculo erróneo —"Tenemos el uno, el dos, el cuatro…, y ya está, ¿no?" (M, 28)—, por apresurado o por detenerse precisamente en el número del que dieciséis es el cuadrado, observan que $d(n)$ es impar. El episodio concluye ahí, y, sin transición alguna ni evaluación de qué se ha obtenido de los casos observados, se pasa al problema Q por la simple indicación "Debíamos haber…" (M, 34) de que lo que se está haciendo no es lo que se debe.

La doble formulación del problema Q por M —"Dado un número, cuántos divisores tiene" (M, 34); "[…] encontrar una relación entre 'de ene' y ene." (M, 36)— hace que se pase a un episodio que cabe calificar de "lectura para MJ", ya que ésta muestra no entender qué quiere hacer M ni cómo encaja con el problema P[17]. Sin que el episodio anterior termine de ninguna manera, se pasa a uno de exploración producido por el recuerdo de M del resultado de Q_1, formulado primero con descuido —"Si…, si…, si ene es impar, sólo tiene dos. Son él y el número." (M, 41)— y luego correctamente y con su prolongación al problema P_{1C1} —"Entonces, si ene es primo, sus divisores son dos, que es número par." (M, 47).

Una interrupción del episodio para controlar el tiempo transcurrido da paso, tras una vuelta breve a la exploración, a un nuevo episodio en que se formula el problema Q_2: "[…] Vamos a coger ene…, ene no primo." "Y entonces…, cuántos divisores…" (M, 56-57), al que sigue uno brevísimo en que un "Hum" (M, 59) parece indicar que no se sabe qué hacer.

Se regresa sin transición al problema P, con un análisis del significado de "cuadrado", que se convierte en la escritura ritualizada de su expresión en jerga simbólica —n es cuadrado $\rightarrow \exists m \in N$ /

[17] Ver en el ítem 124 cómo MJ parece pensar que la relación que propone buscar M no es entre $d(n)$ y n, sino entre sus paridades.

$m^2=n$ (M, 61)— y la afirmación de que esa expresión simbólica es el significado de “cuadrado”: “Eso es que sea cuadrado, ¿no?” (M, 61). Aunque la gestión de M señala que hay que volver a Q —“¿Cómo podríamos ver eso? Es que mientras no sepamos…, qué divisores tenemos ahí…, no haremos nada, ¿eh?” (M, 64)—, MJ quiere pasar al problema P_{1C} para resolver el problema P, lo que produce un episodio en que el plan que MJ propone apenas llega a esbozarse, porque a M le cuesta entender qué problema plantea MJ, ya que ésta formula el paso al contrarrecíproco como “hacerlo al revés” (MJ, 67) y M interpreta el revés como “la implicación contraria” (M, 74) y, cuando se aclaran, MJ encuentra que al revés “¡[…] ya lo hemos hecho!” (MJ, 77), simplemente al examinar el caso de los divisores de diez que habían considerado antes.

Sin transición alguna, en el ítem siguiente M anuncia: “Lo que podemos hacer es hacerlo por inducción, ¿no?” (M, 78); saltando al problema R sin decirlo e iniciando un episodio de establecimiento del plan que dicta el método de inducción completa. Como M no ha dicho que está pensando en aplicar el método de inducción completa a un problema aún no formulado, MJ no entiende nada, lo que le obliga a éste a dar explicaciones: “Estaba pensando en hacerlo por inducción. Suponer…, tomar alguno de ellos…, tomar un ene y ver…, tomar el primero, ¿no?, de los no primos. Suponer que se cumple para ene y entonces ver si demostramos para ene más uno…” (M, 87). M tiene una gran confianza en el poder del método, así que tras esta explicación a MJ pasa a un episodio de ejecución sin evaluar previamente si el método invocado es aplicable al problema R, ni cómo encaja R en el espacio de problemas. El episodio de ejecución despliega entonces los intentos de M de ajustar a la fuerza los pasos del método al problema R y su reafirmación ritual en el método mediante su expresión simbólica y termina con la desazón de no poder aplicarlo, con MJ actuando de mera comparsa.

M, 89: “El primer número no primo es el cuatro, ¿no?”	El método exige que haya un primer elemento, pero el uno se olvida, es demasiado singular.
M, 91: “El primer número no primo es cuatro…, y cuatro tiene los divisores primos uno, dos y cuatro. (Escribe n=4, $d(n)$=1, 2, 4.)” M, 93: “‘de ene’ es igual a esto (señala), ¿no? Espera… (lo borra), ‘de ene’ es igual… Los divisores…, los divisores serán…, el cuatro…”	La resolución de I_0(R) se complica por la necesidad que siente M de introducir una nueva notación para distinguir el número de divisores de n del conjunto de divisores de n.
M, 95: “Los divisores de cuatro… (Escribe D(n)= {1, 2, 4}.)” M, 96: “Divisores de cuatro es igual a tres. (Escribe d(4)= {3}.)”	Pero las modificaciones en la expresión que caracterizan de manera típica a los conjuntos, introducidas para designar con precisión éste, se deslizan en la expresión del número de divisores.
M, 97: “Y para cuatro se cumple, ¿no? (Escribe ‘1) d(4)= {3} $\rightarrow$ se cumple’.) Para cuatro se cumple.” M, 104: “Vamos a ver… (Escribe 2).)”	Se realizan escrituras rituales de los pasos del método indicados por 1) y 2), aunque a continuación de 2) no se sepa cómo escribir I_n(R).

M, 113: “Pero una sucesión…, pero buscar una sucesión de números no primos…” MJ, 114: “¿Una sucesión de números no primos?” M, 115: “Imposible, porque…, los primos no guardan ninguna…”	La constatación de que el método no es aplicable al problema R sólo se realiza después de haber empleado una buena cantidad de tiempo en ejecutarlo. No se ha elaborado previamente la representación de R como $R_{i\in \mathrm{N}}(i)$, es decir, no se ha formulado el problema I(R), que resuelve el método.
M, 116: “¿Sabes lo que te quiero decir, no?” MJ, 117: “Sí, ¡pero ves y busca!” M, 118: “Los primos no guardan una relación así, de orden muy…, cada uno…”	El episodio resulta ser una pérdida absoluta de esfuerzo y tiempo y se termina sin que se saque ninguna enseñanza del trabajo realizado en él.

El siguiente episodio es un plan nuevo para R organizado por la herramienta heurística “examen de posibilidades” que se enuncia y se abandona por la intervención extemporánea de MJ que muestra que había entendido la formulacion de Q en términos de una relación entre $d(n)$ y n como un problema distinto —“Tú no puedes hacer ninguna relación para saber si…, o sea, lo que me has dicho antes de que…, la relación que pueden guardar los divisores con los números…, no es, porque…, aquí (señala el 4) este número es par, y el número de divisores es impar; aquí (señala el 10) es par, y es par” (MJ, 124). De ahí se vuelve a otro episodio muy breve en que M pretende rescatar el método de inducción completa, pero su intento de elaborar $I_n(R)$ sin haber elaborado previamente I(R) no consiste más que en el uso ritual de la expresión en el lenguaje simbólico, tanto el escrito, como la traducción de éste al oral —“Sea…, sea eme el número…, el número no primo que ocupa el enésimo lugar, ¿no? (Escribe “Sea *m* el nº no primo que ocupa el *n*-ésimo lugar”.)” (M, 127)—, y acaba con el abandono definitivo del método en los ítem 130 a 132 de transición.

El fracaso de la ejecución de un método en que se confiaba provoca la vuelta al problema original, que se explora brevemente sin hacer más que intentar recordar propiedades estructurales del conjunto de divisores de un número. Un control del tiempo transcurrido da paso a un episodio que hemos calificado de metaexploración, porque en él lo que M hace es recorrer los instrumentos que han usado, citándolos con los nombres que han adquirido como consecuencia de la instrucción, —““Casos particulares” ya lo hemos visto, ¿no? “Intentar un método de…, de inducción”, también. ¿Qué nos quedaría? Buscar una estructura dentro de ellos, una relación.” (M, 137)— y MJ evalúa su dificultad de uso, lamentándose de que “a partir de los casos particulares, que yo los considero más sencillo, no hemos podido sacar…” (MJ, 139), sin evaluar ni cómo se ha usado esa herramienta heurística, ni la adecuación de su uso o su finalidad. M parece ceder ante MJ y, tras una lectura de P y una reformulación de Q, que incluye su expresión ritual —escribe $n \approx d(n)$ para expresar una relación entre $d(n)$ y n—, dirige dos episodios finales de exploración para Q y Q_2 mediante la consideración de casos. Estos episodios no pueden considerarse como de ejecución de un plan porque, como M se niega a reconocerle valor a la herramienta heurística que está usando, es descuidado y no formula la intención de su uso. Esto tiene como consecuencia que, cuando la pauta que se creía que iba a aparecer después de considerar los primeros casos se derrumba por el caso 12, no sabe qué hacer, pese a que MJ apunta que hay que buscar "una razón" (MJ, 193, 195) que conduciría a examinar no sólo $d(n)$ y n, sino también la descomposición en factores de n. Y el tiempo se termina cuando están considerando un nuevo caso, sin saber muy bien para qué.

5.4.1.5. *Algunas consideraciones.*

Los análisis realizados del espacio de problemas en la resolución de M y MJ, el que está representado en el diagrama de episodios y la reconstrucción racional nos permiten hacer algunas consideraciones más que esbozamos en este apartado.

M y MJ son resolutores instruidos que conocen herramientas heurísticas y métodos de resolución. Además, en el caso de M, también se da un conocimiento de las matemáticas superior al de los otros sujetos[18], cuyas actuaciones analizamos. Pero, aunque pueda decirse que saben que hay que gestionar el proceso, en su actuación se limitan a hacerlo de forma vaga y general, que puede representarse por la forma del ítem 34, "Debíamos haber…" Dicho de otra manera, parece saberse que hay que gestionar el proceso, pero no se desarrollan conductas de gestión concretas adecuadas al tipo de acciones que se están realizando o a las intenciones de uso de los instrumentos que se están utilizando para moverse en el espacio de problemas: un gestor que sólo sabe que tiene que gestionar, pero carece de un catálogo de tareas de gestión concretas asociadas a los instrumentos que se usan para resolver el problema está inerme[19].

Las herramientas y los métodos permiten generar problemas en el espacio de problemas. Una de las tareas del gestor de la que M y MJ no dan muestras es la de controlar las relaciones entre los problemas del espacio[20], sobre todo cuando la complejidad del espacio de problemas teórico o del

---

[18] M es un alumno singular, porque estaba cursando la licenciatura de matemáticas a distancia, a la vez que asistía a nuestro curso. Pero sus conocimientos "superiores" no sólo no fueron garantía de que resolviera el problema, sino que en algún momento le hicieron plantearse opciones desatinadas, como la que se expresa en el ítem 42 —"Bueno, divisores…, los podemos considerar todos positivos, porque si cambiamos el signo, siguen siendo de la misma paridad, ¿no?"—, en el que muestra su conocimiento de que la divisibilidad no se limita a los naturales, pero no sólo confunde la paridad de $d(n)$ con la de n o sus divisores sino que no advierte que $d(n)$ siempre es par en Z, con lo que no habría problema.

[19] La instrucción recibida por M y MJ no hacía hincapié en este asunto. Lo que aquí se muestra pues es que no hay garantías de que se aprenda de manera implícita. En versiones posteriores del curso, se ha incorporado en la instrucción este fijarse en las tareas concretas del gestor, correspondientes a cada problema e intención de uso de cada herramienta heurística, con el fin de favorecer la elaboración de tal catálogo.

[20] Este asunto tampoco se trataba de forma explícita en la instrucción recibida por M y MJ, de modo que sólo concluimos que el que estuviera contenido implícitamente en la instrucción no tuvo como consecuencia que lo aprendieran. También se incorporó su tratamiento explícito en versiones posteriores del curso.

generado en la actuación de los resolutores en tan grande como éste. M y MJ muestran precisamente lo contrario al no examinar la relación del problema R con los demás y dedicarle, por el contrario, tanto trabajo.

La actuación en el episodio que hemos calificado como de metaexploración, combinado con las reflexiones que estamos haciendo sobre las tareas del gestor, muestran que las herramientas heurísticas, a pesar de su contenido heurístico, pueden ser incorporadas por parte de los alumnos al elenco de procedimientos para utilizar cuando se tiene que resolver un problema en presencia del profesor de la misma forma estereotipada que está ampliamente documentada para esquemas como la regla de tres o rutinas de carácter más o menos algorítmico[21]. La especificación de las tareas del gestor asociadas a las intenciones de uso de cada herramienta heurística puede ser un modo de hacer que este fenómeno sea más difícil que se produzca, pero aquí parece que la concepción de la naturaleza de la tarea representa un papel decisivo.

Finalmente, M presenta una tendencia a substituir el análisis del significado de los conceptos involucrados en el problema por su expresión en el sistema de signos en que habitualmente se escriben las matemáticas superiores. El uso competente de ese sistema de signos puede ser efectivamente un instrumento de análisis, pero en la actuación de M, la expresión simbólica no se usa para analizar[22], sino que acaba substituyendo el análisis[23]; en el ítem 61 está la muestra más evidente de ello, cuando, tras escribir 'n es cuadrado $\rightarrow \exists m \in N \,/\, m^2=n$', dice: "Eso es que sea cuadrado, ¿no?" y otras muestras pueden encontrarse en los ítem 127 y143 o en la ritualización de los pasos del método de inducción completa, que ya hemos señalado anteriormente.

5.4.1.6. *El protocolo escrito*.

Sea $d(n)$ el número de divisores de n. Probar que $d(n)$ es impar si y sólo si n es un cuadrado.

{1} MJ: (Dicta.) "Sea 'de ene' el número de divisores de ene. Probar que 'de ene' es impar si y sólo si ene es un cuadrado."

{2} M: Ene es un cuadrado. Un cuadrado perfecto, ¿no?

{3} MJ: El número de divisores de ene…

{4} M: Bueno, hay que hacerlo…, si y sólo si…, hay que probar dos cosas.

{5} MJ: Primero hacia un lado y luego hacia otro.

{6} M: Supongamos que 'de ene' es impar…, y probar que ene es un cuadrado.
(Escribe $d(n)$ es impar $\leftrightarrow$ n es un cuadrado.)

---

[21] Ver el caso de V y M descrito en 3.4.10, como una muestra patológica de esta tendencia.

[22] Alguna muestra puede encontrarse de que M sabe que una buena notación es útil para el análisis en el ítem 143: "[…] Si 'de ene' es impar, lo podríamos ver de la forma impar, dos ene más uno…"

[23] Ver en el apartado 6.3.3.4 cómo la expresión en lenguaje simbólico puede concebirse incluso como una parte substancial de la tarea de resolver un problema de matemáticas.

{7} MJ: 'de ene' es impar…, supongamos que…

{8} M: …ene es un cuadrado…

{9} MJ: Vamos a ver, sabemos que…

{10} M: O sea, hay que saber…, el número de divisores…

{11} MJ: El número de divisores de ene.

{12} M: …cuántos divisores tiene ene.

{13} MJ: Vamos a ver… ¿Quiénes son los divisores de ene?

{14} M: Todos los que dividen a ene.

{15} MJ: Entonces…

{16} M: Si ene…

{17} MJ: Dilo tú.

{18} MJ: A mí lo único que se me está ocurriendo es coger por ejemplo…

{19} M: Cualquier ene.

{20} MJ: …divisor, o sea, como si fuese…, o sea, considerar un caso particular.

{21} M: Coger un número cualquiera.

{22} MJ: Por ejemplo, a ver qué pasa.

{23} M: Por ejemplo…, diez. (Escribe en la pizarra n=10.) Los divisores son: uno, dos , cinco, diez. (Escribe 1, 2, 5, 10.)

{24} MJ: Cinco.

{25} M: Y tienes… Esto es par…, ene no es un cuadrado…

{26} M: Podemos coger uno que sea un cuadrado.

{27} MJ: Sí.

{28} M: Cogemos dieciséis. (Escribe n=16.) Tenemos: el uno, el dos, el cuatro…, y ya está, ¿no? (Escribe 1, 2, 4.)

{29} MJ: No.

{30} M: Ocho y dieciséis. (Escribe 8, 16.)

{31} MJ: Ocho y dieciséis.

{32} M: Impar. Ene es un cuadrado perfecto, ¿no?

{33} MJ: Ene es par.

{34} M: Debíamos haber… Dado un número, cuántos divisores tiene.

{35} MJ: Dado un número…, vamos…, cuántos divisores tiene…

{36} M: Pues supongamos que sabemos que ene es impar, tendríamos que saber encontrar una relación entre 'de ene' y ene. (Señala la implicación escrita.) Qué relación guarda el número con el número de sus divisores, ¿no?

{37} MJ: Por ejemplo, buscar la relación que… Con estos (señala los números escritos) ejemplos…

{38} MJ: Es que no he entendido. ¿Qué relación guardan…, los divisores…, de diez?

{39} M: El número con los divisores. Dado un número, cuántos divisores tiene.

{40} MJ: Pero si sólo probamos…, lo que sacamos… Cuántos divisores…

{41} M: Si…, si…, si ene es impar, sólo tiene dos. Son él y el número.

{42} M: Bueno, divisores…, los podemos considerar todos positivos, porque si cambiamos el signo, siguen siendo de la misma paridad, ¿no?

{43} M: Está claro, ¿no?

{44} MJ: Hum.

{45} M: Podemos suponer que ene… Si ene es primo… (Escribe ‘n=primo $\to$ 1, n’.)

{46} MJ: Solamente tiene dos.

{47} M: Entonces, si ene es primo, sus divisores son dos, que es número par.

{48} MJ: Un número par.

{49} M: Estamos suponiendo que es impar, entonces tenemos que coger números que no sean primos, ¿no?

{50} M: ¿Qué hora es?

{51} MJ: No lo sé.

{52} M: ¿A qué hora hemos empezado?

{53} MJ: Es que…, como tú has dicho que es par, entonces… Por ejemplo, un número que es primo, considerar el dos; los divisores que tiene, el uno y el dos. El dos es par.

{54} M: Sí, pero sólo tengo…, estamos diciendo número de divisores que tienen en este caso. En cualquier número primo, ‘de pe’ igual a dos, que es par, ¿no?

{55} MJ: Sí.

{56} M: Estamos suponiendo que es impar. Tomamos sólo números…, números… Vamos a coger ene…, ene no primo.

{57} M: Y entonces…, cuántos divisores… Vamos a ver…

{58} MJ: Ene no primo. Por ejemplo…, ocho, diez, que no es primo.

{59} M: Hum.

{60} MJ: Ene no primo.

{61} M: Supongamos que es un cuadrado. Para ver que es un cuadrado…, debemos ver que…, debemos probar que…, que raíz de ene… (Escribe n es cuadrado $\to \exists m \in \mathrm{N} \,/\, m^2=n$.) Eso es que sea cuadrado, ¿no?

{62} MJ: Sí.

{63} M: Que eme cuadrado sea igual a ene.

{64} M: ¿Cómo podríamos ver eso? Es que mientras no sepamos…, qué divisores tenemos ahí…, no haremos nada, ¿eh?

{65} MJ: ‘de ene’ impar…, implica que ene es cuadrado… En todos los casos ‘de ene’ impar, ene cuadrado en todos los casos.

{66} M: El número de divisores…

{67} MJ: Vamos a hacerlo al revés.

{68} M: ¿Suponiendo que ene…, ene es un cuadrado?

{69} MJ: No, para hacer esto, si y sólo si, primero tienes que demostrarlo hacia un lado, y luego hacia el otro, ¿no? Entonces, supongamos que dices: “‘de ene’ es impar”, lo cual implica que ene es cuadrado.

{70} M: Al revés.

{71} MJ: Bueno, pero si yo demuestro…

{72} M: No.

{73} MJ: …demuestro que…

{74} M: ¿Qué quieres hacer, la implicación contraria? Suponiendo que ene es cuadrado, está esto de aquí. (Dibuja la flecha en sentido contrario en la implicación y señala el otro lado.)

{75} MJ: No, que como hemos intentado demostrar esto así, (señala la flecha) pues suponerlo por contradicción.

{76} M: Supongamos que ene…, que ene no es cuadrado.

{77} MJ: Porque hemos visto que, mira, coger otros divisores de ene y números impares, (señala 16), uno, dos, tres, cuatro y cinco, tiene cinco divisores. Y hemos visto que ése…, es cuadrado. Uno, dos, tres y cuatro… (señala los divisores de 10), y aquí… ¡Pero es que ya lo hemos hecho! Porque aquí hay cuatro y éste no es cuadrado.

{78} M: Lo que podemos hacer es hacerlo por inducción, ¿no?

{79} M: A ver…

{80} MJ: ¿Qué? ¿Qué quieres hacer?

{81} M: Para ene igual… Hemos dicho que ene…, que los ene deben ser…, no deben ser primos, ¿no?

{82} MJ: O sea, no tienen que ser primos.

{83} M: Tomamos…

{84} MJ: Porque si son primos aparecen un número par de…, de divisores.

{85} M: Tomamos un ene…

{86} MJ: No entiendo qué estás haciendo.

{87} M: Estaba pensando en hacerlo por inducción. Suponer…, tomar alguno de ellos…, tomar un ene y ver…, tomar el primero, ¿no?, de los no primos. Suponer que se cumple para ene y entonces ver si demostramos para ene más uno… Entonces tendríamos… ¿Entiendes? Pero el problema está en…

{88} MJ: El…

{89} M: El primer número no primo es el cuatro, ¿no?

{90} MJ: El uno y el dos…

{91} M: El primer número no primo es cuatro…, y cuatro tiene los divisores primos uno, dos y cuatro. (Escribe n=4, d(n)=1, 2, 4.)

{92} MJ: Dos y cuatro.

{93} M: 'de ene' es igual a esto (señala), ¿no? Espera… (lo borra), 'de ene' es igual… Los divisores…, los divisores serán…, el cuatro…

{94} MJ: Divisores de cuatro, de, cuatro.

{95} M: Los divisores de cuatro…

(Escribe D(n)= {1, 2, 4}.)

{96} M: Divisores de cuatro es igual a tres.

(Escribe d(4)= {3}.)

{97} M: Y para cuatro se cumple, ¿no? (Escribe '1) d(4)= {3} → se cumple'.) Para cuatro se cumple.

{98} MJ: Vemos que el número de divisores es impar…

{99} M: Sí, que el número es…

{100} MJ: …y es par…

{101} M: El número de divisores es tres…

{102} MJ: …es cuadrado…

{103} M: …y el cuatro es un cuadrado perfecto.

{104} M: Vamos a ver… (Escribe 2).)

{105} MJ: El segundo no primo, el seis.

{106} M: Pero claro, deberíamos…

{107} MJ: Seis, ocho…

{108} M: Seis, ocho, todos los pares…

{109} MJ: Sí, todos.

{110} M: …además hay impares…

{111} MJ: Más dos…

{112} M: …y nueve.

{113} M: Pero una sucesión…, pero buscar una sucesión de números no primos…

{114} MJ: ¿Una sucesión de números no primos?

{115} M: Imposible, porque…, los primos no guardan ninguna…

{116} M: ¿Sabes lo que te quiero decir, no?

{117} MJ: Sí, ¡pero ves y busca!

{118} M: Los primos no guardan una relación así, de orden muy…, cada uno…

{119} M: Lo que podemos hacer es…, lo que podemos hacer es…, buscar…

{120} MJ: Es, ¿qué?

{121} M: Probando para los pares, que sabes que no son primos, y después para los impares. Pero no sabemos…

{122} MJ: Pues vamos a hacerlo con los pares. ¿O no?

{123} M: Los…, los divisores de un número…

{124} MJ: Tú no puedes hacer ninguna relación para saber si…, o sea, lo que me has dicho antes de que…, la relación que pueden guardar los divisores con los números…, no es, porque…, aquí (señala el 4) este número es par, y el número de divisores es impar; aquí (señala el 10) es par, y es par.

{125} M: No, si eso está claro.

{126} M: Un método de inducción deb…, para hacer un método de inducción deberíamos saber…, deberían de seguir un orden y…, para saber cuál es el ene más uno, ¿no?

{127} M: Bueno, vamos a ver. Supongamos… Sea…, sea eme el número…, el número no primo que ocupa el enésimo lugar, ¿no? (Escribe “Sea *m* el nº no primo que ocupa el *n*-ésimo lugar”.)

{128} MJ: El enésimo lugar…

{129} M: Y vamos a ver si…, para el siguiente… Pero no sabemos…, cuál es…, pero el siguiente…

{130} M: Yo creo que eso de inducción no sirve, ¿no?

{131} MJ: Es que no podemos hallar la sucesión.

{132} M: Porque no sabemos hallar…, cuál será el resultado… (Señala *m*.)

{133} M: ¿Y si buscáramos…, si buscáramos los divisores…, los divisores de un número…, a lo mejor podrán tener una estructura, una… Son una relación de equivalencia, ¿no?

{134} MJ: ¿Una relación de equivalencia?

{135} M: Entre estos números. (Señala el conjunto de los divisores de 10.) A ver si podríamos…, a ver…

{136} M: ¿Cuánto tiempo llevamos?

{137} M: "Casos particulares" ya lo hemos visto, ¿no? "Intentar un método de…, de inducción", también. ¿Qué nos quedaría? Buscar una estructura dentro de ellos, una relación.

{138} MJ: Eso lo veo más complicado todavía.

{139} MJ: Si a partir de los casos particulares, que yo los considero más sencillo, no hemos podido sacar…

{140} M: Eso no tiene nada que ver.

{141} MJ: ¡Hombre, ya! Pero que…

{142} MJ: (Relee el enunciado.) Probar que ene es un cuadrado… Si y sólo si…

{143} M: La cuestión consiste en hallar…, en hallar una relación entre ene y 'de ene' ¿no? (Escribe $n \approx d(n)$.) Porque aquí nos están pidiendo una relación de este tipo, porque… Si 'de ene' es impar, lo podríamos ver de la forma impar, dos ene más uno…

{144} MJ: Sí.

{145} M: …y veríamos… Una relación entre ene y 'de ene'… Aquí (señala los números y divisores), para el dos, dos; para el cuatro…, ¿cuántos hemos encontrado? Tres, ¿no?

{146} MJ: Tres.

{147} M: Para el cinco… Para el cuatro hemos encontrado cinco.

{148} M: A ver, ¿cuál no…? Vamos a coger un número que no hayamos cogido, ¿no?

{149} MJ: Claro.

{150} M: …por ejemplo, el seis. No,…

{151} MJ: Cinco.

{152} M: …no, para seis no, estamos cogiendo los cuadrados, que tienen que cumplir… Vamos a coger los números que tenemos… Dos…

{153} MJ: Un cuatro.

{154} M: Los números…, los números que no sean primos. Dos, cuatro, seis, ocho… (Escribe 2 4 6 8.) Éste (señala el 2) tiene…, no, no, éste no. (Borra el 2.) éste (señala el 4) tiene…, éste de aquí tiene…, ¿cuántos divisores tiene?

{155} MJ: Tres.

{156} M: Éste de aquí tiene tres divisores, ¿no? (Escribe un 3 debajo del 4.) Y éste (señala el 6) de aquí…

{157} MJ: Cinco.

{158} M: (Escribe un 5 debajo del 6.) El ocho…, uno, dos, cuatro, ocho, el ocho también cuatro. (Escribe un 4 debajo del 8.)

4	6	8
3	5	4

{159} MJ: Cuatro, el uno, el dos, el cuatro, ocho.

{160} M: El seis…

{161} MJ: El uno, dos, tres y el seis.

{162} M: Cuatro. (Borra el 5 y escribe un 4, debajo del 6.)

{163} MJ: Cuatro.

{164} M: El ocho…, el uno, el dos, el cuatro…, el ocho también tiene cuatro, ¿no?

{165} M: El diez…

{166} MJ: Cuatro.

{167} M: …también tiene cuatro, ¿no?

{168} MJ: Sí.

{169} M: Uno, dos, cinco y diez.

{170} MJ: Bueno, espera…, el diez…, espera…, diez…

{171} M: Éste no es cuadrado perfecto.

{172} MJ: No.

{173} M: Ahora el que no sea…, el que no sea primo.

{174} MJ: El siguiente cuadrado…

{175} M: El que no sea primo…

{176} MJ: Es que, mira…, éste (señala el 4), que es cuadrado perfecto, tres. éste (señala el 6), que no lo es…, éste (señala el 8), que no lo es…, éste (señala el 10), que no lo es…, cuatro los tres. Busca el siguiente cuadrado perfecto a ver si tiene tres.

4	6	8	10
3	4	4	4

{177} M: Tendrá un número impar. Eso ya lo dice el problema. El otro…, a ver…, el otro, el próximo era el nueve. Divisores del nueve… (Borra el 10 y escribe un 9.)

{178} MJ: El nueve tiene… ¡Pon el nueve! Tiene…

{179} M: El uno, el tres y…, él mismo.

{180} MJ: Y el nueve. Tres. El diez tiene cuatro.

{181} M: (Escribe un 10 y debajo un 4.) El once, el doce… (Escribe 11 y 12 a continuación del 10.)

{182} MJ: El uno, dos…, el tres…

{183} M: Uno, dos, tres, seis, doce, ¿no? Cinco.

4	6	8	9	10	11	12
3	4	4	3	4		5

{184} M: Deben seguir así… Tres, cuatro…

{185} MJ: Uno, dos, tres y el cuatro, el cuatro también.

{186} M: Tienes razón, el cuatro también, ¿no?

{187} MJ: Falta el cuatro.

{188} M: ¿Qué?

{189} MJ: Un factor es el cuatro.

{190} M: ¡Ah, sí, el cuatro!

{191} MJ: Tiene seis.

{192} M: (Borra 5 y escribe 6.) La suma de sus divisores…, seis.

{193} MJ: Es una razón de…

{194} MJ: Cuatro…

{195} MJ: Es que el doce, por ejemplo, que tiene…, cuatro por tres, son los divisores del cuatro…, o sea, más los divisores del tres. Quiero decir que… Creo que a partir de aquí…, supongo yo, imagino que saldrá…, van a ir aumentando… Entonces, vamos a buscar una relación…

4	6	8	9	10	11	12
3	4	4	3	4		6

{196} M: Con estos números.

{197} MJ: …con estos mismos números, con los anteriores, de estos números con los anteriores. Quiero decir, cuando este número lo puedes conseguir…, a partir de otros que ya tienes, mediante sus divisores…, ¿me entiendes?, y vamos a ver si se cumple que…, que…, ¿me entiendes?

{198} M: Sí, dos por los divisores de éste (señala el 4) son seis… No sé…, los divisores de dos son dos…

{199} MJ: Cuatro y dos son seis. ¿Sabes lo que te quiero decir?

{200} M: Ya, pero el problema va a ser encontrar una relación entre…

{201} M: Hasta… Cogiendo los…, los cuadrados perfectos… Para ene dieciséis, hemos encontrado cinco: uno, dos, cuatro, ocho, doce. Para ene igual a…, ene igual veinticinco…, veamos los que encontramos.

{202} M: Uno, cinco…

{203} MJ: Cinco…

{204} M: …veinticinco.