5.4.3. EL CASO DE M Y V CON EL PROBLEMA DEL TRONCO DE CONO.

5.4.3.1. *Análisis del problema.*

El enunciado que presentamos a M y V "¿Es el área lateral del cono truncado $\pi(R+r)\sqrt{(R-r)^2+h^2}$?" es una versión del problema de hallar el área lateral de un cono truncado, que Polya usa en dos ocasiones. En la primera, el problema aparece en el diccionario de heurística contenido en Polya (1945) para ilustrar la sugerencia heurística "¿Puedes derivar el resultado de forma diferente?" en la fase de revisión-extensión del problema. Ahí señala Polya cómo, una vez se ha obtenido el resultado por un procedimiento de estilo cartesiano como el que analizaremos de inmediato, se puede observar la analogía de la fórmula obtenida con la del área del trapecio y razonar en consecuencia[31]. En la segunda, Polya narra cómo en sus clases, tras obtener la fórmula, se entretiene en derivar a partir de ella la del área lateral del cilindro (haciendo R=r), la del área lateral de un cono (haciendo r=0), la del área de una corona circular (haciendo h=0) y la del área del círculo (haciendo h=0 y r=0), y esto corresponde al patrón plausible de verificación sucesiva de varias consecuencias, cuyo efecto es "hacer más creíble un teorema" (Polya, 1954, vol. II, pág. 5).

Nuestro enunciado no es el de un problema de encontrar, sino el de un problema de probar; pero la forma que le dimos no es la aseverativa canónica "Probar que la fórmula es…", sino una forma dubitativa con la que quisimos indicar que cabía la posibilidad de que la fórmula no fuera ésa[32].

Para resolver el problema es razonable que no se dibuje sencillamente un tronco de cono para representar en él las cantidades r, R y h que aparecen en la fórmula, sino que se dibuje el cono del que el tronco de cono se deriva.

---

[31] Esta entrada del diccionario de heurística termina con una reflexión en el mismo sentido en que nosotros estamos especificando algunas de las cuestiones que es preciso que se incorporen a la enseñanza de la heurística para que ésta sea efectiva: "[…] el profesor debería mostrar […] no sólo cómo resolver el problema de forma más corta, sino también cómo encontrar indicaciones de una solución más corta en el propio resultado." (Polya, 1945, pág. 64)

[32] Pappus en su *Synagôgê* admite que cuando alquien plantea un problema puede pedir que se haga algo imposible "porque una de las partes de la tarea de la investigación es determinar las condiciones bajo las que un problema es posible o imposible", pero no admite que pueda plantearse un teorema más que si lo que se pide que se investigue es la "conclusión inherente en las premisas (axioi)" (Cf. Thomas, 1941, tomo II, págs. 566-567; Ver Eecke, 1933, tomo I, pág. 21). La posibilidad que nosotros pretendimos dejar abierta con nuestra formulación del problema no es admisible según esta concepción clásica. De hecho, muchos resolutores no admiten siquiera que se plantee algo imposible en un problema de encontrar. Esta tendencia cognitiva no la documentamos en este trabajo, pero se nos ha presentado en protocolos cuyos análisis no presentamos.

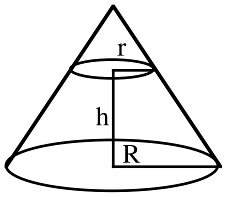


Figura 5.11

La introducción de esa figura auxiliar es una herramienta heurística en la medida en que pone de manifiesto otras cantidades que no son visibles si sólo se representa el tronco de cono (la altura del cono grande, la del cono pequeño, la generatriz del cono grande, la generatriz del cono pequeño), y las relaciones entre ellas, derivadas de la relación entre la figura original y la auxiliar. Formalmente, el problema original P podemos considerarlo transformado en otro P_{FA}, cuyo enunciado es el mismo, pero en el que los objetos involucrados aparecen ahora imbricados con los que aporta la figura auxiliar.

La resolución del problema P (o P_{FA}) puede realizarse recorriendo los pasos canónicos del análisis teorético, para construir después la solución por el camino de la síntesis. En su discusión del método de análisis-síntesis, Lakatos (1978) describe el tipo teorético de análisis mediante el esquema de la figura 5.12, en el que los P_i representan teoremas y los Q_i los lemas que se incorpora, y la cadena de P_i se detiene cuando se llega a un teorema cuya verdad (o falsedad) ya ha sido establecida..

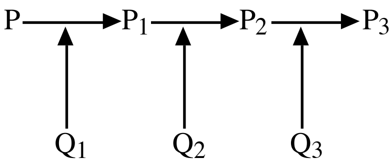


Figura 5.12

La figura 5.13 es una adaptación de la de Lakatos a nuestro marco teórico, en la que los Q_i son ahora problemas auxiliares que se generan en el análisis y los P_i son los problemas transformados por el resultado de los Q_i. Esta figura representa pues cómo el método de análisis-síntesis se convierte en un esquema de generación de problemas en el espacio de problemas de un problema de probar[33].

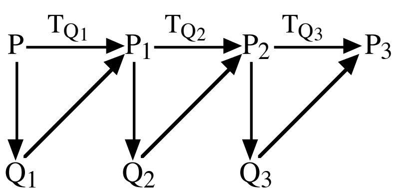


Figura 5.13

[33] En el espacio de problemas de la resolución de M y MJ del problema de los divisores, este esquema está presente en la transformación de P por Q.

Así, si el análisis comienza reduciendo la expresión $\pi(R+r)\sqrt{(R-r)^2+h^2}$ a $\pi(R+r)g_t$ —siendo g_t la generatriz del tronco de cono— gracias a que $\sqrt{(R-r)^2+h^2}$ es g_t, en términos de la interpretación que estamos haciendo, el problema P queda transformado en el problema P_1, "probar que el área lateral de un cono truncado es $\pi(R+r)g_t$", como resultado de que un análisis de la expresión $\pi(R+r)\sqrt{(R-r)^2+h^2}$ ha conducido a formular el problema auxiliar Q_1 "¿qué cantidad está representada por $\sqrt{(R-r)^2+h^2}$?", por la pertenencia de esta expresión al esquema del teorema de Pitágoras, y el resultado de Q_1 se ha incorporado al enunciado de P.

El análisis puede continuar de varias maneras. Por ejemplo, la última expresión puede transformarse en $\frac{2\pi R+2\pi r}{2}g_t$ por manipulaciones sintácticas, y en $\frac{A+a}{2}g_t$ —siendo A y a las longitudes de las circunferencias de las dos bases del tronco de cono o los arcos correspondientes en el desarrollo de éste—, gracias a que $2\pi R=A$ y $2\pi r=a$, con lo que el problema es ahora "probar que el área lateral de un tronco de cono es la semisuma de las longitudes de las circunferencias de sus bases, multiplicada por su generatriz". Y el análisis de este nuevo problema reduce la expresión $\frac{A+a}{2}g_t$ a la de la diferencia de las áreas de los dos sectores circulares correspondientes en el desarrollo del cono, gracias a que $g_t=G-g$, $A=\alpha G$ y $a=\alpha g$ —siendo G y g las generatrices de los conos grande y pequeño de la figura auxiliar y α el ángulo del sector—, con lo que se ha alcanzado algo cuya verdad está establecida. La solución del problema P se organiza por el camino de la síntesis sin que puedan presentarse dificultades en ello, ya que todas las relaciones utilizadas en el análisis son reversibles.

Aunque el enunciado del problema que estamos analizando es el de un problema de probar, éste puede transformarse en un problema de encontrar P_E equivalente a él: el problema "Hallar una fórmula para el área lateral del tronco de cono, en función de r, R y h." Enunciado así, la forma que ha de tener el resultado que se busca es una expresión algebraica en la que las letras que aparecen designan la incógnita del problema y unas cantidades que se consideran dadas. La solución de un problema de este tipo se puede obtener por la aplicación de una versión del método cartesiano[34], que podemos describir de la siguiente manera:

a) Hallar una relación entre la incógnita, cantidades dadas y otras cantidades y expresarla mediante una ecuación.

b) Si el número de incógnitas auxiliares es uno menos que el de ecuaciones[35], resolver el sistema. Si no lo es, volver a a).

---

[34] Veremos más adelante al analizar el problema que llamaremos "del triángulo" las diferencias que produce el hecho de que el resultado que se busca sea una expresión algebraica, pero que el enunciado no indique explícitamente qué cantidad hay que tomar como incógnita y cuáles como dadas.

[35] Este criterio no es suficiente para que el sistema sea compatible y determinado, de modo que en esta versión del método puede ser necesario volver al paso a), después de haber intentado resolver el sistema. Esa

La figura 5.14 representa cómo esta versión del método cartesiano se convierte en un esquema de generación de problemas en el espacio de problemas.

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "MC"'] \arrow[ddr] & E_i \arrow[d] \\
& D \arrow[d] \arrow[u, bend right] \\
& R(E_i)
\end{tikzcd}$$

Figura 5.14

Los E_i son los problemas correspondientes al paso a) del método, D es el problema de decisión correspondiente al paso b) y $R(E_i)$ es el problema consistente en resolver las ecuaciones escritas como resultado de los problemas E_i.

En el caso del problema que nos ocupa, una vez se ha incorporado a él la figura auxiliar, y, por tanto, se ha transformado en el problema P_{EFA}, la aplicación de esta versión del método cartesiano conduce a tener que establecer al menos tres relaciones y escribir tres ecuaciones. Las relaciones que existen entre las cantidades del problema y que son pertinentes son de tres tipos: relaciones entre áreas, relaciones proporcionadas por el teorema de Thales y relaciones proporcionadas por el teorema de Pitágoras, y combinando una de cada se obtiene un sistema de ecuaciones que proporciona la fórmula buscada. Designaremos con E_A, E_T y E_P los problemas correspondientes.

Si llamamos H a la altura del cono del que se deriva el tronco de cono, las ecuaciones que se pueden obtener con E_T son

$$\frac{G}{g} = \frac{R}{r} = \frac{H}{H-h}$$

y las que se pueden obtener con E_P son

$$G^2 = H^2+R^2,$$
$$g^2 = (H-h)^2+r^2,$$
$$(G-g)^2 = h^2+(R-r)^2,$$

La escritura de la ecuación en E_A que corresponde a la relación entre el área lateral del tronco de cono, S, y las áreas laterales de los conos grande, S_1, y pequeño, S_2, no está dictada por un teorema, sino que precisa que se analice a su vez S_1 y S_2, identificándolas con las áreas de los desarrollos o los sectores circulares correspondientes, y el análisis de los arcos y los radios los reduce finalmente a

eventualidad no la incluimos en la descripción que estamos haciendo. En el análisis del problema del triángulo traemos a colación algunas cuestiones relacionadas con este asunto.

expresiones algebraicas en función de las cantidades que estamos designando con letras, con lo que se puede escribir la ecuación.

$$S = \frac{2\pi RG}{2} = \frac{2\pi rg}{2}$$

La figura 5.15 ilustra el espacio de problemas asociado a esta aplicación del método cartesiano que hemos esbozado. L_i designa los problemas "hallar el área lateral de un cono", y L_{iA} y L_{iR}, los problemas "hallar el arco" y "hallar el radio", en que éstos quedan divididos.

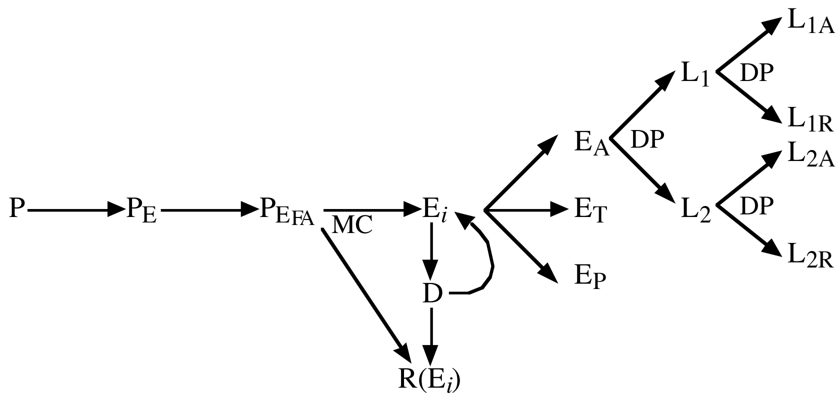


Figura 5.15

Hay también soluciones del problema que vienen producidas por combinaciones de las dos que acabamos de presentar. Por ejemplo, una vez se ha obtenido el problema P_1 mediante el análisis teorético, puede plantearse el problema de encontrar P_{1E} asociado a éste, "Hallar el área lateral de un cono truncado en función de *R*, *r* y g_t", y analizarse P_{1E} mediante la versión del método cartesiano que hemos presentado.

También cabe que se utilice la analogía del desarrollo del cono truncado con un trapecio en el interior del proceso generado por el análisis o por el método cartesiano.

5.4.3.2. *La reconstrucción racional de la resolución de M y V.*

M y V comienzan la resolución del problema con un episodio de lectura y análisis que se realiza con el concurso de la figura auxiliar en la que se representan las cantidades que aparecen en la fórmula "Y son todas las variables que intervienen, ¿no?" (M, 11). El siguiente episodio lo constituye la elaboración de un plan para el problema de encontrar P_{EFA} que está organizado por la versión del método cartesiano que hemos analizado en el apartado anterior. Ahora bien, desde su formulación, el plan incluye buscar la primera relación que hay que escribir como una ecuación a partir de la diferencia entre las áreas: "Podría calcularse como el área del…, lateral de un cono normal, menos la del otro cono pequeño." (M, 14) Esto, que acabamos de ver cómo se resuelve mediante el análisis problemático, conduce en el caso de M y V a la aparición de una serie de problemas derivados, que no hemos incluido en el espacio de problemas teórico, y que marcan decisivamente el espacio de problemas de su actuación y el conjunto del protocolo.

Lo que sucede es que desconocen tanto la fórmula del área lateral de un cono, como qué figura es el desarrollo de un cono. Es necesario entonces que se plantee el problema L, "hallar el área lateral de un cono", y, para poder resolverlo, el problema I, que podemos enunciar como "identificar qué figura es el desarrollo de un cono", incluyendo en ese enunciado además la correspondencia entre los elementos del cono y los de su desarrollo. Formalmente, el resultado de I transforma el problema L en el problema L^1, "hallar el área de la figura que I ha identificado como el desarrollo de un cono", problema que es equivalente a L, y el espacio de problemas generado hasta aquí es el que ilustra la figura 5.16:

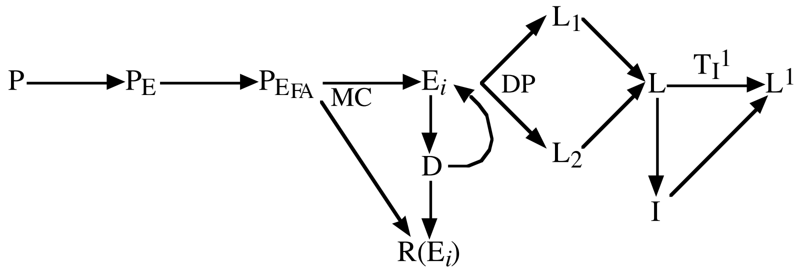


Figura 5.16

Ahora bien, el resultado que obtienen en el episodio 3 está plagado de errores, como muestra lo que dibujaron en la pizarra (figura 5.17).

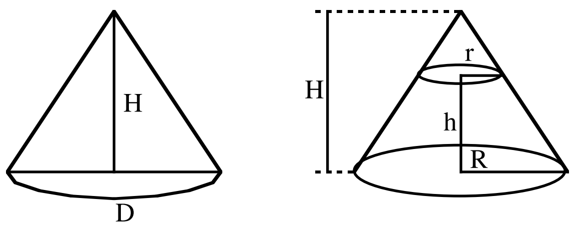


Figura 5.17

Como los errores cometidos en la resolución del problema I les pasan inadvertidos, el episodio siguiente consiste en la elaboración de un plan para el problema L^1 y el comienzo de su ejecución. El plan viene indicado por la propia figura —"La superficie sería la superficie de un triángulo, del que conocemos la base y la altura, más la del trocito éste, que es un segmento circular, me parece, no sé muy bien cómo se llama." (M, 38)— y se etiqueta de inmediato usando los términos propios de la instrucción recibida—"Vamos a ver…, ¿y si lo hacemos por partes? O sea, cogemos primero el triángulo éste (señala el desarrollo) y luego…" (V, 39)—, pero no se evalúa que, aunque una de las partes se sabe cómo abordarla, la otra no y que, por tanto, el plan en su conjunto no se puede llevar a cabo. Lo que se hace en el episodio 4 es resolver la parte para la que se conoce una fórmula —$L^1{}_T$, el área del triángulo— y, aunque la solución está bien realizada, el resultado que se obtiene está viciado por los errores cometidos al resolver I y es $A=RH$ (V, 47).

Aquí, el plan trazado exigía resolver L^1_S —el área del segmento—, pero M invoca el método cartesiano que ha organizado el proceso desde el comienzo y decide dejar para más adelante un problema que obviamente no sabe cómo abordar: “¿Buscamos hache o buscamos primero la superficie de esto? Buscamos hache, venga.” (M, 48-49) El desplazamiento del esquema del método cartesiano, desde el problema al que estaba aplicado, al problema derivado de éste en que se encuentran en este momento del proceso genera una serie de intentos de resolver el problema E_i “hallar una relación entre *H*, los datos y otras cantidades y expresarla mediante una ecuación”, que ocupan los episodios 5, 6, 7, 8 y 12 (figura 5.18).

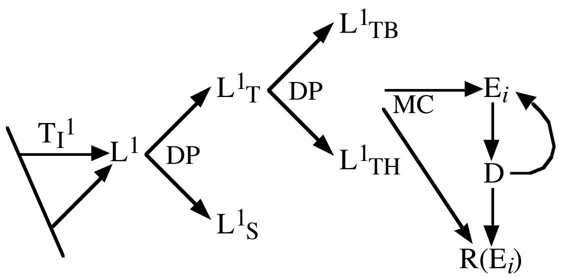


Figura 5.18

En el episodio 5 se busca una relación del tipo E_T: “¿Qué relación hay entre hache y hache? Pues alguna proporción. La misma que con los radios. Sí, hache es a hache como erre es a erre.” (M, 50), se escribe la ecuación $H = \frac{R \cdot h}{r}$ y se resuelve el sistema. La relación que se ha encontrado es errónea y se rechaza en el episodio 6, que es de verificación; pero en vez de volver a explorar las relaciones de proporcionalidad, éstas se abandonan y las relaciones que se exploran en los episodios 7 y 8 son las que ofrece el teorema de Pitágoras.

Una transición de 5 segundos en silencio mirando la pizarra desde lejos desemboca en el episodio 9 en que se corrigen parte de los errores cometidos al resolver el problema I en el episodio 3: “¡Oye! Y aquí hay una cosa…, una cosa que hemos hecho mal aquí, (señala el desarrollo) ¿eh?, entonces… ¡Que esto (señala en el desarrollo la base del triángulo) no es el diámetro! Esto, la base del triángulo no es el diámetro.” (M, 82). El descubrimiento de que I se resolvió mal conduce a un nuevo episodio de exploración de ese problema, que V interrumpe bruscamente, conduciendo primero al problema original, que se relee. Como consecuencia del examen de la fórmula que hay que probar u obtener, M evalúa la bondad de buscar el área como diferencia de áreas con el argumento plausible[36] “Yo creo que es una buena idea mirar el cono después…, como diferencia de conos porque en la fórmula te sale la diferencia de los radios y cuando hagas la resta seguramente te va a salir yo creo que una

[36] Aunque no sea cierto que la diferencia que señala se produzca como consecuencia de la diferencia de las áreas.

diferencia.” (M, 96) V interrumpe de nuevo bruscamente el episodio con el ítem de transición 97, que dirige el proceso de nuevo a los problemas E_i, sin tener en cuenta que esos problemas se derivan del problema $L^1{}_T$, que a su vez se deriva del resultado de I que se acaba de descubrir que es erróneo. La constatación de que el resultado que se había obtenido para $L^1{}_T$ ya no puede mantenerse por lo que se ha descubierto del resultado de I —“¿Cuál es la base de este triángulo? (M, 112)— hace que vuelvan al problema L^1, pero no les hace abandonar el plan de resolverlo por partes, aunque ahora $L^1{}_{TB}$ sea un problema difícil.

Esa dificultad conduce a M, que ha hecho un cono con una hoja de papel, a volver al problema I y acabar averiguando que el desarollo es un sector circular en un ítem emocionante: “Lo que sí debe salir es que esto sea un sector circular o, yo que sé, no sé cómo se llama. O sea que esto resulte de hacer centro aquí. (Señala el vértice.) Así. (Hace centro en el vértice del cono de papel con un dedo y, girando, muestra con otro dedo que la base es un arco.) Que esto (prolonga la altura hasta el arco) valga también ele, vamos, que esto (señala el lado del sector y escribe L junto a él) vale ele, pero esto (señala la altura y escribe L junto a ella) también vale ele. Entonces también podemos verlo así, o sea, no dividirlo…, (borra la línea de división) sino calcularlo…” (M, 129)

Esta nueva solución del problema I hace que L^1 sea substituido por el nuevo problema L^2 “Hallar el área de un sector circular” (figura 5.19).

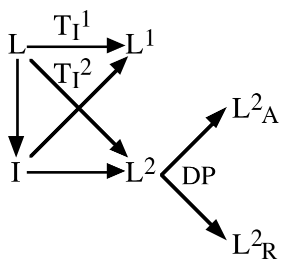


Figura 5.19

El episodio siguiente está naturalmente dedicado a explorar el problema L^2, pero la falta de ideas para abordarlo hace que acabe con sensación de desánimo —“Si supiéramos…, pero ahí…” (M, 151)— y M proponga un enfoque totalmente distinto para salvar la situación: “Podríamos hacer otra cosa y es ver la fórmula…, operar un poco con lo que hay dentro a ver si nos da una idea de qué es lo que nos tiene que salir. Tenemos idea de lo que nos tendría que salir…, pues igual…” (M, 152-154). Lo que M está proponiendo y lo que acaban haciendo puede describirse con el esquema del análisis teorético aplicado al problema original P, aunque ella no lo exprese de ese modo.

El examen de la fórmula conduce a fijarse en $\sqrt{(R-r)^2+h^2}$, “que esto podría salir perfectamente de Pitágoras, ¿no?” (M, 157) y dedicar gran parte del episodio —los ítem 158 a 168— a resolver el problema Q_1. Como se obtiene el resultado correcto —“[…] sería como la generatriz, más o menos…, del cono truncado.” (V, 168)—, el problema P queda transformado ahora en el problema P_1, o, lo que es equivalente, la generatriz del tronco de cono pasa a considerarse como un dato —“Que es una cosa que no habíamos pensado, que podemos conocer también ge.” (M, 175). Situados en el problema P_1, el resto del episodio 16 ha de dedicarse a explorar el problema Q_2, pero en este caso no se tiene ningún éxito (figura 5.20).

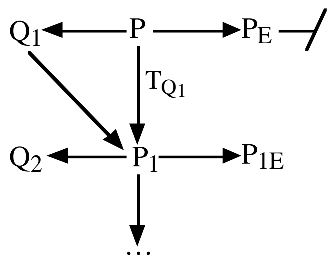


Figura 5.20

Los tres episodios con que concluye el protocolo oscilan entre dos reconsideraciones intempestivas del problema I, en las que aparecen nuevos errores y reaparecen algunos viejos, y una breve incursión en el problema L^2, buscando ideas para Q_2, que en conjunto muestran que se ha perdido el control de lo que se está haciendo.

5.4.3.3. *El espacio de problemas en la resolución de M y V y un diagrama de episodios.*

Ya hemos ido presentando fragmentos del espacio de problemas, acompañando los momentos de la reconstrucción del proceso de resolución en que se generaban. La figura 5.21, que presentamos aquí, es la que resulta de enlazar todos los fragmentos anteriores.

En el diagrama de episodios (figura 5.22), hemos agrupado algunos de los problemas del espacio que podían presentarse juntos. Hemos dejado sin señalar otros que tienen una presencia muy breve y tampoco hemos señalado los problemas generados por el análisis teorético, a los que se dedica el episodio 16. En esta ocasión hemos incluido también en el diagrama el tiempo empleado en cada episodio.

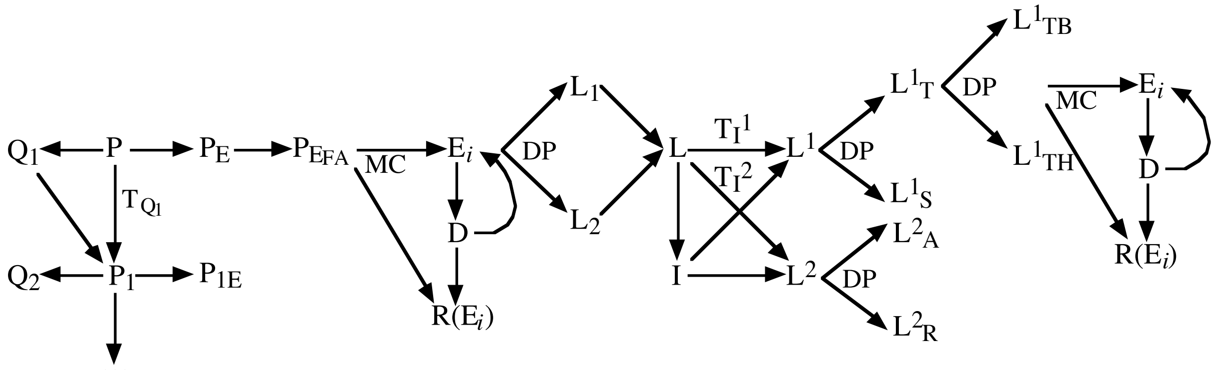


Figura 5.21

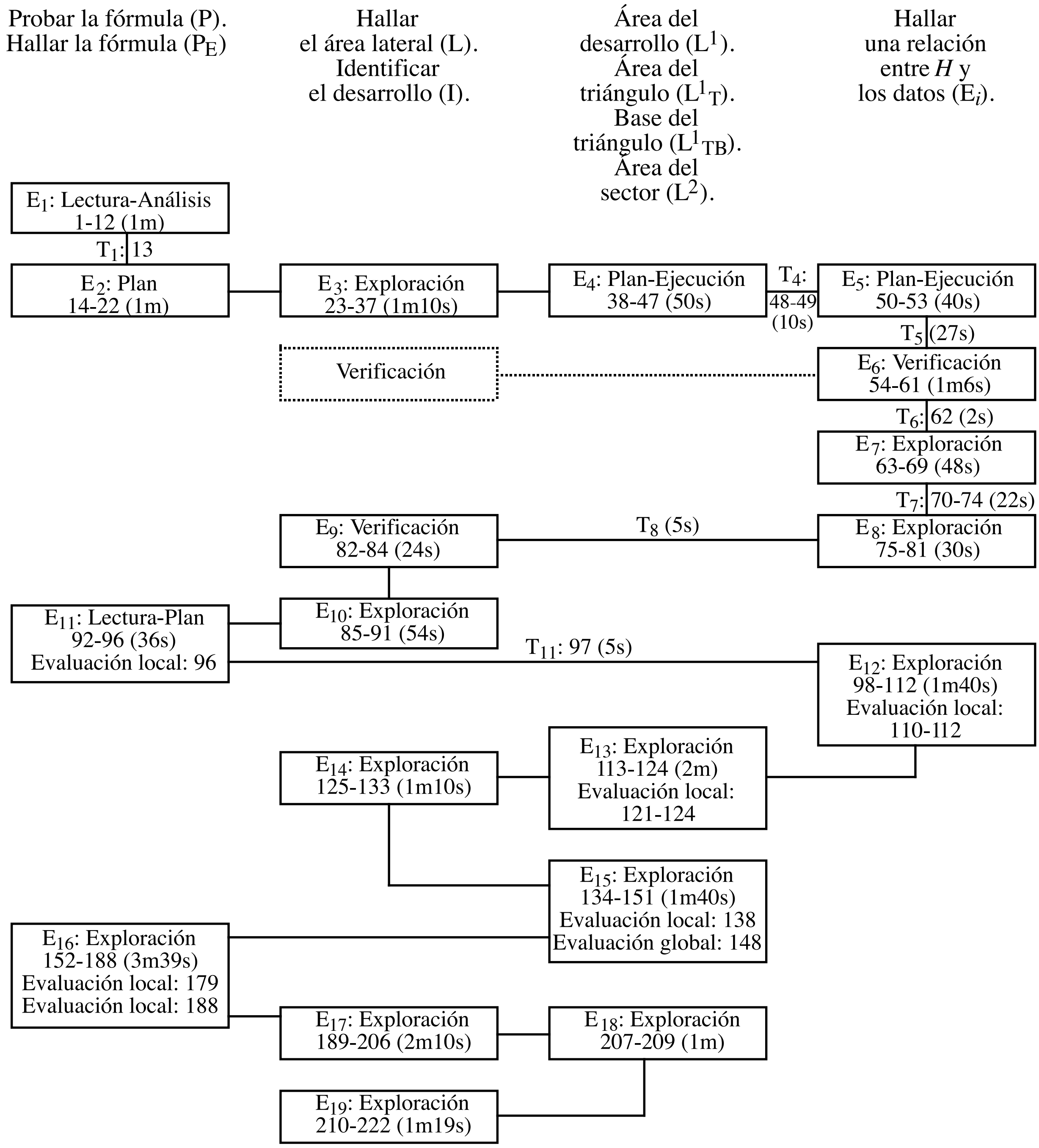


Figura 5.22

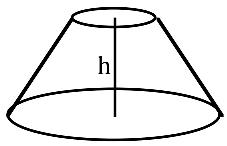
5.4.3.4. *El protocolo escrito*.

¿Es el área lateral del cono truncado $\pi(R+r)\sqrt{(R-r)^2+h^2}$

0:00 {1} M: ¿Es el área lateral del cono truncado…?

{2} V: Primero que nada, vamos a dibujar un cono truncado.

{3} V: Sí. (Dibuja un tronco de cono.)



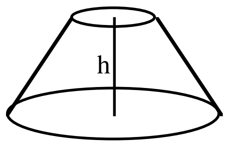
{4} M: (Dibuja un cono y el plano que lo trunca.)

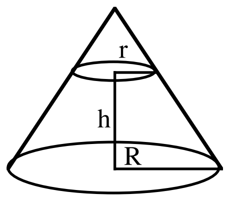
{5} V: El cono truncado. Otra cosa que hay que saber es la altura.

{6} M: ¿Para qué quieres la altura?

{7} V: Porque se puede cortar por aquí o un poco más para arriba.

{8} M: Eso te lo da erre pequeña.





(falta)

{9} M: Y son todas las variables que intervienen, ¿no?

{10} V: Sí.

1:00 {11} M: Te preguntan el área lateral, luego el área de…, de esto de aquí. (Señala el tronco de cono.)

{12} V: Sí.

{13} M: Yo de la fórmula, desde luego, no tengo ni idea.

{14} M: Podría calcularse como el área del…, lateral de un cono normal, menos la del otro cono pequeño.

{15} V: Sí, pero…

{16} M: Ahora el problema será buscar…

{17} V: …tú no sabes la altura de aquí…, arriba.

{18} M: No, pero se supone que si te dan esta fórmula, cuando te pregunten "Calcula el área de un cono, conocidas erre, erre y hache…", son necesarias… o sea, si tú no conoces erre…, o sea, te hace falta…

{19} V: Claro…

1:45 {20} M: …necesitas las dos erres y hache…, son tres datos que puedes dar por supuestos. El problema es encontrar…, es saber si realmente están relacionadas así, no depende de nada más, el cono ya queda determinado por esos tres datos.

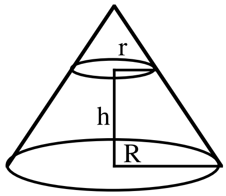
{21} V: ¿Cómo se saca…?

{22} M: A mí sólo se me ocurre empezar…, creo que será más fácil buscar el área lateral de un cono… Que no me sé la fórmula, desde luego, pero es probable que sea más fácil… No sé…, si es un área, una figura plana, la puedes desarrollar, ¿no? Podemos desarrollarla…, lo que no sé es cómo quedaría…

{23} V: Vamos a ver…

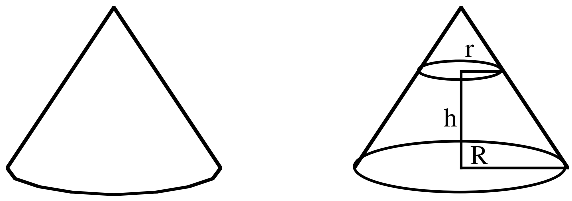
{24} M: Si lo abres, ¿…un triángulo?

{25} M: Espera, vamos a borrar uno de los… (Borra el tronco de cono.)



2:30 {26} M: Buscamos el área lateral del cono. Porque si sabemos la del cono, sabemos la del cono…, la del tronco de cono.

{27} V: Sí, si desarrollamos debía ser una cosa así. (Dibuja un sector circular.)



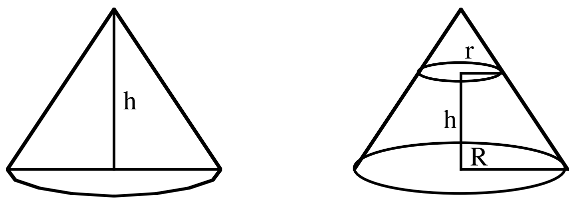
{28} M: Sí.

{29} V: Si gira…

{30} M: De manera…

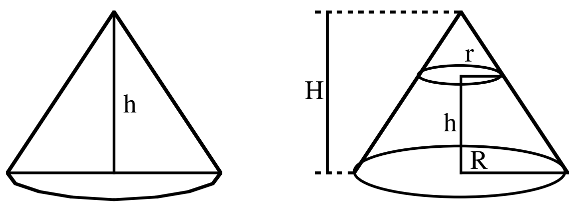
{31} V: Sí, bueno…

{32} M: De manera que la altura será esto, ¿no? (Traza la línea que divide el sector en un triángulo y un segmento circular, y la altura del triángulo.)



{33} V: Sí, ésta sería la altura total. (Escribe *h* en la altura.)

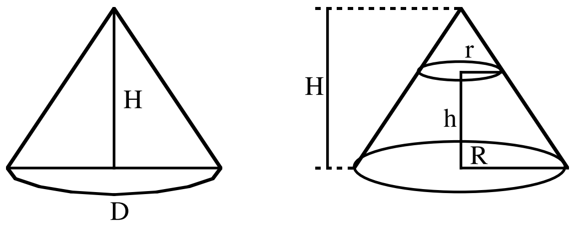
{34} M: ¿La altura es ésta? Aquí (señala el cono) la altura del cono… es… (Dibuja líneas discontinuas y una doble flecha para señalar la altura del cono y escribe *H*.)



{35} V: O sea…, hasta aquí. Ésta sería la altura total. Y luego… (Borra *h* y escribe *H* en el desarrollo.)

{36} M: Esto (señala en el desarrollo) es un triángulo.

3:20 {37} V: Y por aquí sería el diámetro. (Escribe *D* debajo del arco del desarrollo.) Todo el diámetro de la circunferencia de abajo.



{38} M: Luego si conocemos erre, conocemos de. La superficie sería la superficie de un triángulo, del que conocemos la base y la altura, más la del trocito éste, (señala el segmento circular) que es un segmento circular, me parece, no sé muy bien cómo se llama.

3:40 {39} V: Vamos a ver…, ¿y si lo hacemos por partes? O sea, cogemos primero el triángulo éste (señala el desarrollo) y luego…

{40} M: Sí, esto, la superficie es base por altura partido por dos.

{41} V: Sí, es base por altura partido por dos.

{42} M: Bueno, dos erre, lo ponemos en función de las…, de los datos que conocemos. Es dos erre por hache. (Escribe $S=2R\cdot H$)

{43} V: Por hache. La hache grande sí que la tenemos que poner porque aquí (señala la fórmula del enunciado) la tenemos en función de la pequeña.

{44} M: Sí.

{45} V: Falta partido por dos. (Escribe $S = \dfrac{2R \cdot H}{2}$)

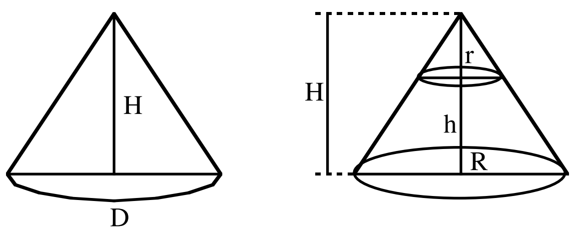
{46} M: …luego erre por hache. (Tacha los doses: $S = \dfrac{\cancel{2}R \cdot H}{\cancel{2}}$.)

{47} V: Luego el área es erre por hache. (Escribe $A=RH$.)

4:10 {48} M: ¿Buscamos hache o buscamos primero la superficie de esto? (Señala el segmento circular.)

{49} M: Buscamos hache, venga. Para hache usamos este triángulo. (Señala en el cono.)

4:20 {50} M: La relación nos puede salir de…, de triángulos. Sí, porque tenemos, mira, estos triángulos. Éstos son dos rectángulos: uno aquí… (traza con líneas gruesas el triángulo formado por el radio menor, la altura del cono pequeño y su generatriz) y éste. (Traza en grueso el trapecio formado por los dos radios, la altura del tronco y su generatriz.) ¿Qué relación hay entre hache y hache? Pues alguna proporción. La misma que con los radios. Sí, hache es a hache como erre es a erre. (Escribe $H = \dfrac{R \cdot h}{r}$.)



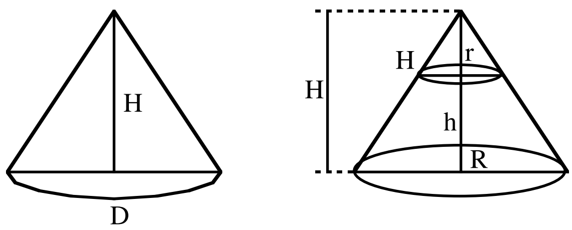
{51} V: Sí, porque son iguales.

{52} M: Luego hache es erre por hache, partido por erre.

5:00 {53} V: Sí, entonces ahora podemos cambiar la hache esta y ponerla en función de…, de lo que tenemos en la fórmula. (Escribe $A = R \cdot \frac{R \cdot h}{r}$.)

5:27 {54} M: No, esto que hay aquí (señala la relación entre las haches y las erres) no es verdad. No, la relación sería… esto de aquí (señala la generatriz del cono) es a esto (señala la generatriz del tronco de cono), como esto a esto (señala los radios), pero no…, no como las… verticales. (Señala la altura dibujada por el exterior del cono.)

{55} V: No, pero es que…, esto…, esto de aquí (señala *H* en el desarrollo) no es…, esto de aquí no es…, no es (señala en el cono) la altura grande. Esto es… es esto. (Señala la generatriz del cono y escribe *H* en ella.)



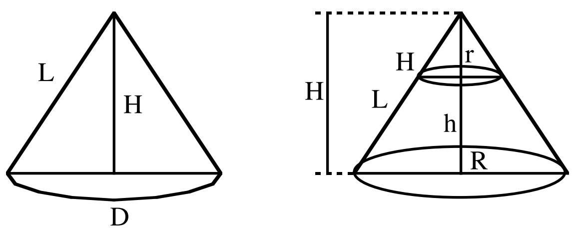
{56} M: Es la generatriz.

{57} V: Es la generatriz.

{58} M: ¿Seguro que es eso?

{59} V: Sí.

6:19 {60} M: No, esto de aquí (señala la generatriz en el cono) es esto (señala la generatriz en el desarrollo). Eso es el lado. (Escribe *L* en el desarrollo.) Son iguales, es esto. (Escribe *L* en la generatriz del cono.)



6:25 {61} M: El lado sí que es esto. Pero la altura del triángulo sí que es la altura del cono.

6:33 {62} V: Entonces, ¿cómo está la relación esa?

6:35 {63} M: Luego se trata de encontrar esta…, este (señala la altura del cono) valor. Que no lo conocemos. Pero conocemos éste. (Señala la altura del tronco de cono) Y éste de aquí. (Señala el radio mayor.) Bueno, sabemos que es un triángulo rectángulo. Tendrá que ser algo del teorema de Pitágoras…, pero no sé por qué.

{64} V: Sí, luego podemos intentar…

{65} M: Necesitamos un cateto. (Señala la altura del cono.)

{66} V: En el grande sí que se…, bueno, esto (señala la altura del tronco de cono) lo sabemos… ¿y esto de aquí? (Señala el radio mayor.)

{67} M: También.

{68} V: También.

{69} M: Y esto (señala el radio menor) también lo conocemos; que es erre pequeña.

7:23 {70} V: Lo que creo yo es que hay que sacar la fórmula del área lateral, pero en función de todos estos datos. (Señala el enunciado.)

{71} M: Sí, pero…

{72} V: Tiene que ser la fórmula; porque lo conocemos, pero lo conocemos en función de…

{73} M: Pero es que te va a salir en función de eso.

{74} M: El problema es…, si seguimos con esto es…, que hemos de hallar el área de un cono y sabes…, bueno, los radios de las circunferencias.

7:55 {75} V: ¿Y si cogiéramos primero el triángulo grande…, a ver…? O sea, por Pitágoras el triángulo grande.

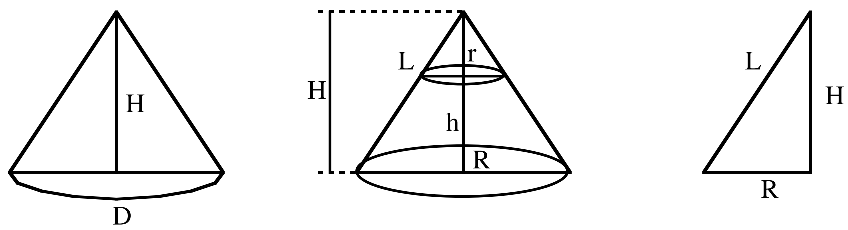
{76} M: No, si el triángulo grande lo tienes ahí.

{77} V: Sí, ya sé, pero, aplicar Pitágoras al triángulo grande, éste. (Señala en el cono.)

{78} M: Del que sólo conoces realmente uno…, un cateto. No puedes hallar los otros dos.

{79} V: Entonces, claro, sería que…, (borra *H*) esto (señala *L*) es…

{80} M: O sea… (Dibuja un triángulo rectángulo.)



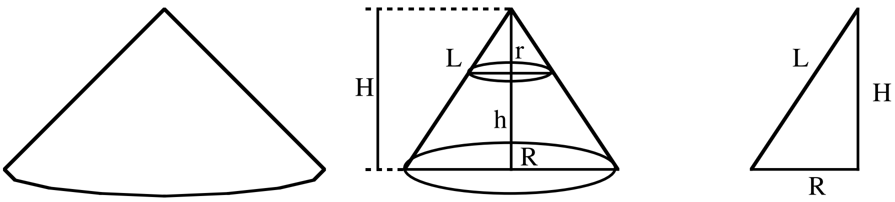
8:25 {81} V: Esto es ele. (Escribe *L* en la hipotenusa del triángulo.) Esto es la hache grande (escribe *H* en el cateto vertical) y esto de aquí la erre (escribe *R* en el cateto horizontal). Por “hipotenusa al cuadrado igual…”, ¿no? (Escribe $L^2 = H^2 + R^2$.)

8:36 {82} M: ¡Oye! Y aquí hay una cosa…, una cosa que hemos hecho mal aquí, (señala el desarrollo) ¿eh?, entonces… ¡Que esto (señala en el desarrollo la base del triángulo) no es el diámetro! Esto, la base del triángulo no es el diámetro. (Borra la *D* del desarrollo.)

{83} V: No, no, el diámetro era esto. (Señala el arco.)

{84} M: ¡Cómo, el diámetro no puede ser nunca un arco! Un diámetro es una recta.

9:00 {85} M: Claro…, la base del triáng…, del…, de este.., de este triángulo es la longitud de la circ…, del…, sí, de la circunferencia que tiene de base… porque tú lo que haces es…, partir por aquí (señala la generatriz del cono) y abres el cono. Entonces te queda como base todo esto. (Señala la circunferencia de la base del cono.) Todo lo que estaba cerrado. Luego…, espera, (borra el desarrollo) es que más grande creo que aún se vería mejor, porque quedaría bastante… (Dibuja un sector circular de ángulo mayor.)



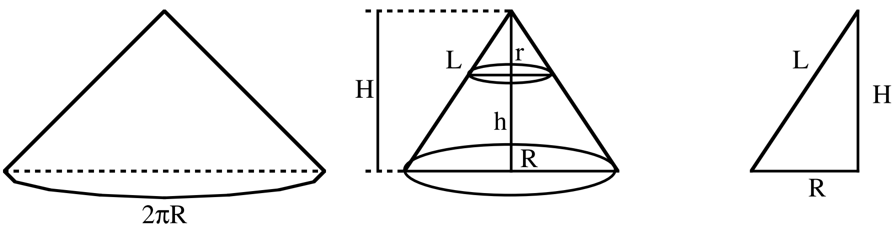
{86} M: De manera que esto de aquí… (Señala el arco.)

9:30 {87} V: Esto de aquí es esto. (Señala la base.)

{88} M: … eso de ahí, (señala el arco) la longitud de la circunferencia que es dos pi erre. (Escribe $2\pi R$ debajo del arco.)

{89} V: Y vamos sacando ya datos.

9:42 {90} M: Y esto no…, (dibuja en el desarrollo con línea discontinua la base del triángulo) no tiene por qué ser en absoluto el diámetro.



{91} M: En todo caso sería dos veces el diámetro. Pero, no sé…

9:54 {92} V: ¡Oye! Mira esta fórmula. (Señala la fórmula del enunciado.) Esta fórmula, ¿qué es?

{93} M: La fórmula del área lateral del cono.

{94} V: La fórmula del área lateral del cono.

{95} M: O sea de…, la fórmula de esta figura…, (señala en el cono) así, ¿no?

10:10 {96} M: Yo creo que es una buena idea mirar el cono después… como diferencia de conos porque en la fórmula te sale la diferencia de los radios y cuando hagas la resta seguramente te va a salir yo creo que una diferencia. Lo que ocurre es que encontrar el área lateral de un cono tampoco es…tá nada mal.

10:30 {97} V: ¿De aquí (señala $L^2 = H^2 + R^2$) podríamos sacar algo? ¿Y si continuamos con esto… a ver…?

{98} M: Ele cuadrado…

{99} V: Es que ele cuadrado…, ele no sabemos qué es. Es…, no sabemos cuánto…, cuánto vale… Y el hache cuadrado tampoco.

{100} M: (falta) Vamos a ver si se nos ocurre…

10:53 {101} V: Lo que debe de haber es una relación entre las alturas, entre la hache pequeña y la hache grande.

{102} M: En función de los radios.

11:00 {103} V: Claro. Porque si el cono…, si lo cortas por un sitio, o sea, te sale ésta (señala en el cono la altura del tronco) más pequeña, pero ésta (señala la altura del cono pequeño) más grande y lo cortas más hacia abajo…, ésta va bajando y…

{104} M: La suma de las dos.

{105} V: …la otra va subiendo.

{106} V: Mira estas dos (señala en el cono las dos alturas) han de estar en relación de acuerdo al…, al radio. (Señala el radio mayor.) Pero…, ¿y la relación?

{107} M: No, según el radio no. Lo que ocurre es que… si tú tomas hache… (Escribe $h -$)

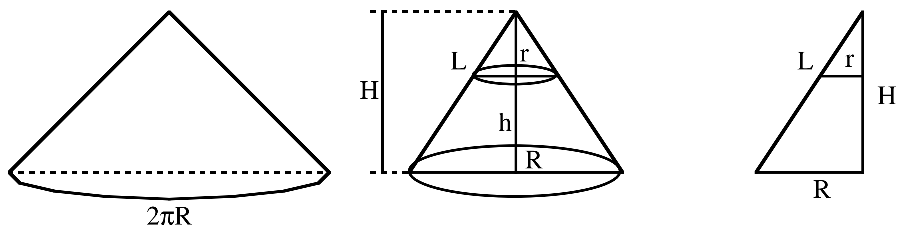
{108} V: El radio te va a determinar el cono.

11:30 {109} M: No, el radio no te va a determinar el cono. El cono te queda determinado por la raz…, por el radio y la altura suya. Por el radio… Y el tronco de cono por el radio, un segundo radio y la altura.

{110} M: Yo lo que creo es que de Pitágoras podríamos sacar algo…. pero no creo que… para el área.

11:58 {111} V: Sí, yo creo que el problema está aquí. (Traza, en el triángulo rectángulo, una paralela a la base y escribe *h* en ella; luego borra la *h* y escribe una *r*.)

{112} M: Está ahí para el triángulo este… y en la base… ¿Cuál es la base de este triángulo? (Señala el desarrollo.)



12:11 {113} M: Podríamos hacernos un cono con una hoja de papel… ¿Dónde hay…? ¿Tenéis una hoja de papel?

{114} M: Habría que tener… (Hace un cono con una hoja de papel, doblándola varias veces a partir del vértice y rasgando los trozos desiguales hasta que la base correspone a un cono recto.)

{115} V: Sí, sí, la figura está clara.

{116} M: Entonces tenemos esto.

{117} M: Esto es una circunferencia. Al abrirlo se te queda aquí (señala el arco) la longitud de la circunferencia… También puedes ver…

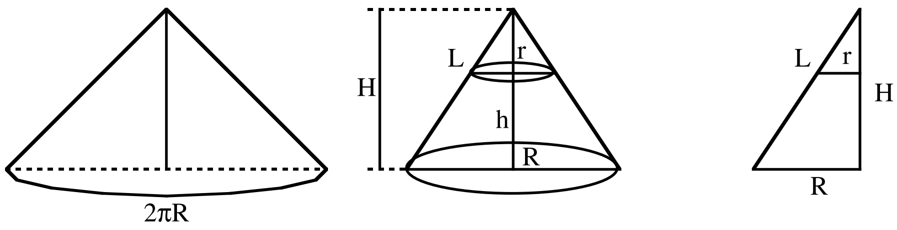
{118} V: (falta)

{119} M: Voy a quitarle un trozo porque si no esto parece que… (Despliega el cono de papel. Como le queda un ángulo llano en el vértice, corta un trozo por cada lado para que el ángulo sea agudo.)

{120} V: No, si la figura esta (señala el desarrollo) está clara que…, que…

13:55 {121} M: Sí, pero lo que no está claro es cuál es la base de este triángulo. (Señala el desarrollo.) Queremos calcular esta…, (señala el desarrollo) superficie.

{122} M: Pues la dividimos por aquí (señala, en el desarrollo, la base del triángulo) y hacemos "superficie de un triángulo y superficie…, bueno, de la figura esta". (Señala el segmento circular.) Pero…, es que es básico saber qué vale esta (señala la base y dibuja la altura) longitud.



{123} V: Sí, pero… esto lo de bajo creo que si…

14:10 {124} M: Porque si conocemos esta longitud y hallamos un modo de hallar hache, sabemos la de arriba y la de abajo, pues debe de ser…

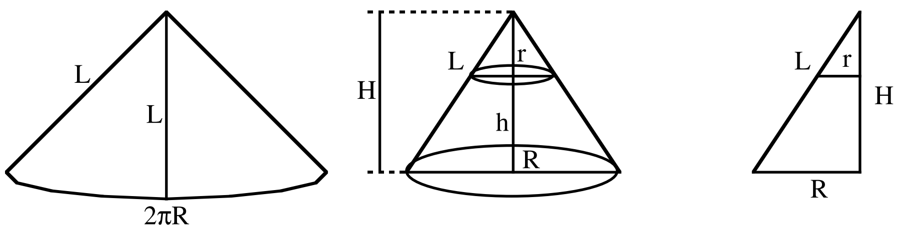
{125} V: Esto (señala el segmento circular) casi, casi… Si está hech…, si está bien hecho tiene que salir la forma de una semicircunferencia, ¡digo yo!

{126} M: ¿De una semicircunferencia?

{127} V: ¿O la vuelta no será exacta?

{128} M: Yo no lo sé, ¿eh? Podría ser así. (Abre el cono de papel y lo mira.)

14:45 {129} M: Lo que sí debe salir es que esto sea un sector circular o, yo que sé, no sé cómo se llama. O sea que esto resulte de hacer centro aquí. (Señala el vértice.) Así. (Hace centro en el vértice del cono de papel con un dedo y, girando, muestra con otro dedo que la base es un arco.) Que esto (prolonga la altura hasta el arco) valga también ele, vamos, que esto (señala el lado del sector y escribe *L* junto a él) vale ele, pero esto (señala la altura y escribe *L* junto a ella) también vale ele. Entonces también podemos verlo así, o sea, no dividirlo…, (borra la línea de división) sino calcularlo…



{130} V: Eso sólo si…, si esto es un…

{131} M: …como… ¡No, si tiene que ser preciso! Esto es, seguro, seguro…

{132} V: Sí, sí, esto es un sector circular.

{133} M: …un sector circular, que tiene de radio ele, que no lo conocemos, pero sí que sabemos el arco que abarca, que es dos pi erre. Entonces, si abarca… La fórmula del sector circular…

15:20 {134} V: Entonces el radio del…, el radio del sector circular tiene que ser lo mismo que la generatriz de aquí. (Señala el cono.)

{135} M: Sí.

{136} V: El radio tiene que ser…

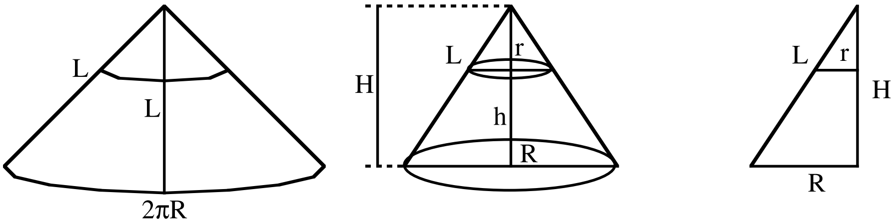
{137} M: Ele…, como…

15:33 {138} M: O sea que ahora pasamos de hache, no nos interesa la altura. Pero ese ele dependerá…, depende directamente de la altura del cono. Si supiéramos la altura sabríamos eso, (señala $L^2=H^2+R^2$) que ele cuadrado es igual a la raíz de hache más erre cuadrado.

15:57 {139} V: ¿Y basándonos en lo de aquí? (Señala el corte del tronco en el dibujo del cono.) Ten en cuenta también lo del…

{140} M: ¿El qué?

{141} V: …la figura que saldría… (Dibuja el arco del tronco en el desarrollo.)



{142} M: ¿Después?

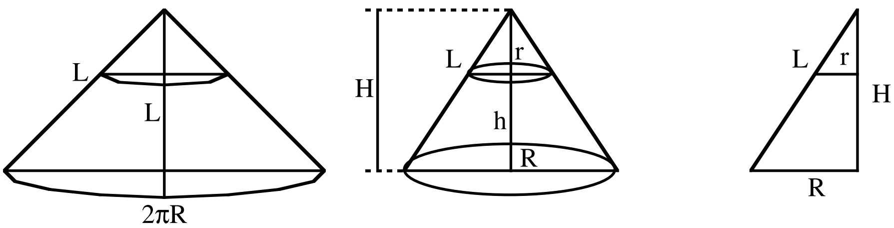
{143} V: …desplegando…

{144} M: Bueno, pero después se limita a…

{145} V: …el cono truncado.

{146} M: …a eso. Después la cosa se reduciría a restarle otro cono de distinta altura. De altura hache menos hache pequeña.

16:15 {147} V: ¡Una cosa! Igual como aquí (señala el cono) había relación entre los triángulos, si hacemos esto…, (traza sendas rectas sobre los arcos en el desarrollo) no sé…, ¿aquí no habrá también relación? ¿…entre este triángulo y este triángulo grande? (Señala los que acaba de dibujar en el desarrollo.)



16:32 {148} M: Pero eso ¿para qué nos va a servir? Es que eso es otra cosa; o lo hacemos como diferencia, que yo creo que es como, vamos, únicamente como veo que…, como veo un poco de camino o yo qué sé…, o atacar el cono y ya está.

{149} M: Pero es que es el mismo problema duplicado, porque vas a tener dos eso, dos conos, el que pones y el que restas.

16:53 {150} V: Vamos a ver…

17:00 {151} M: Si supiéramos…, pero ahí…

{152} M: Podríamos hacer otra cosa y es ver la fórmula…, {153} V: Sí.

17:20 {154} M: …operar un poco con lo que hay dentro a ver si nos da una idea de qué es lo que nos tiene que salir. Tenemos idea de lo que nos tendría que salir…, pues igual…

{155} V: Voy a ir borrando por aquí…

{156} M: Espera vamos a hacerlo por aquí. No borres esos dibujos por si acaso nos sirven luego.

{157} M: Pi por erre más erre por la raíz de erre menos erre cuadrado por hache cuadrado…, (Escribe $\pi(R+r)\sqrt{(R-r)^2+h^2}$) que esto (traza una llave debajo de lo que hay dentro de la raíz) podría salir perfectamente de Pitágoras, ¿no?

{158} V: Sí, eso sale…

{159} M: Podría salir…, o sea, porque podría ser…, si es la suma…, podría ser la hipotenusa de un triángulo… que tenga…

{160} V: Sí, que tenga de catetos estos dos.

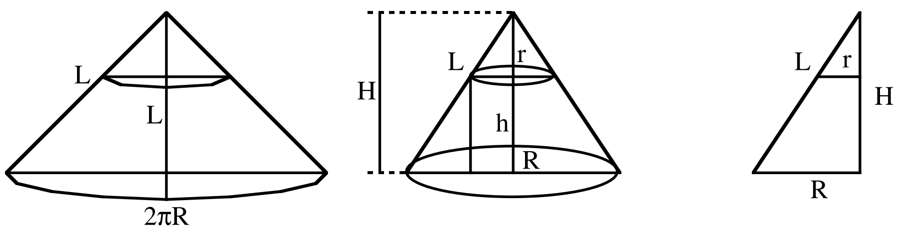
{161} M: …hache… ¿Qué triángulo nos da el dibujo? …hache… (Señala *h* en el cono.)

{162} V: Erre menos erre… Erre grande menos erre pequeña.

{163} M: …y erre, ¿no? (Señala *r* en el cono.)

{164} V: Tiene de cat…, de un cateto erre menos erre.

18:18 {165} M: Erre menos erre pequeña… (Señala el radio mayor y traza la línea que baja el radio menor sobre él.) No, es esto. Erre menos erre pequeña es esto de aquí (señala el trozo del radio mayor correspondiente), y de altura esto… Y de altura hache, luego eso de ahí…, (señala el la fórmula) es esto. (Señala la generatriz del cono truncado.) Luego, en esa fórmula…



{166} V: Luego esto…

{167} M: …podemos calcularla…

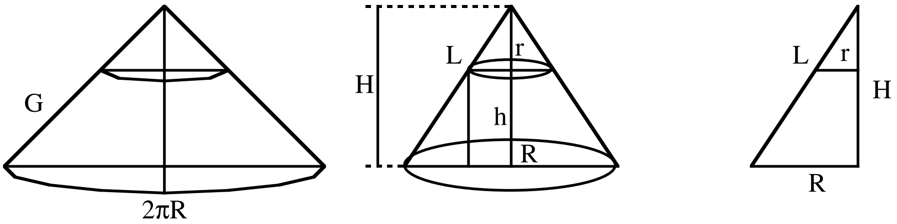
{168} V: …esto de aquí (señala en la fórmula) sería como la generatriz, más o menos…, del cono truncado.

{169} M: Sí.

{170} V: Esto de aquí es la generatriz del cono truncado.

{171} M: Espera, vamos a hacer…

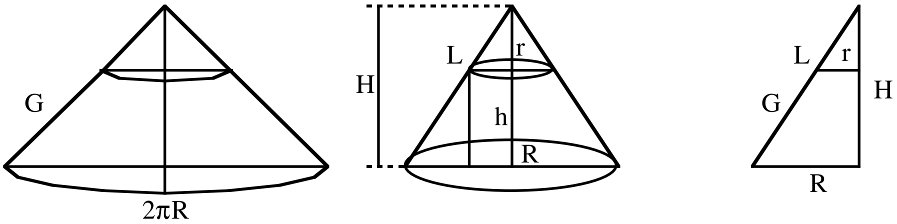
{172} V: Luego en este dibujo (el del desarrollo) sería esto. Desde aquí hasta aquí. (Repasa la generatriz del tronco y escribe *G*.)



18:47 {173} M: Luego conocemos hache, conocemos erre, erre pequeña, y conociendo esto podemos conocer este dato de aquí, (señala en el triángulo rectángulo el trozo de abajo de la hipotenusa y escribe *l*) que es… ¿Le llamamos ele? ¿Cómo le has llamado tú?

{174} V: Ge. Ge, por "generatriz".

19:00 {175} M: Bueno, pues la llamamos ge. (Borra *l* y escribe *G*.) Que es una cosa que no habíamos pensado, que podemos conocer también ge.



{176} V: ¿Y el pi este (señala la fórmula) no te suena a algo de circunferencia o algo?

19:08 {177} M: ¡Claro!, siempre que tengas un arco te va a salir pi si vas a calcular superficies. Luego realmente lo que tienes aquí es que el área del tronco truncad…., del cono truncado es el valor este de ge, por la suma de los radios y por pi.

{178} V: Vamos a ver, a mirar aquí (señala el desarrollo) que está desplegado. Tenemos esto, o sea…, la fórmula dice que tiene que ser esto…, por los dos radios. (Señala en el desarrollo.)

19:35 {179} M: Aquí hay una cosa además, las… las areas tienen que tener una dimensión doble, yo qué sé, si son metros, metros cuadrados; y aquí va a salir una dimensión, ¿no? Porque aquí (señala la fórmula) te va a salir… una superf…, aquí te va a salir una longitud y aquí te sale una longitud. ¡Ah, bueno, claro, que es el producto de las dos!

19:50 {180} V: Pero erre…

{181} M: Luego eso puede ser…

{182} V: Erre más erre no…, no puede ser… Bueno…, erre… (Señala en el cono.)

{183} M: No, erre más erre es la suma de los radios.

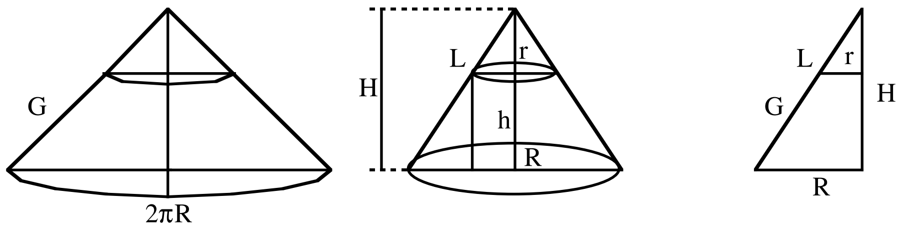
{184} V: Sí, claro.

20:07 {185} M: Luego es la suma de los radios por pi…, que podríamos verlo como un radio por la generatriz pequeña…, más eso mismo por el radio pequeño y pi. Como suma de esos dos, ¿no? (Escribe $GR\pi+Gr\pi$.)

{186} V: Hum.

{187} M: Lo que tienen en común es ge y pi. Sería erre más erre.

20:39 {188} M: La generatriz por un radio y por pi… Lo que ocurre es que aquí deben haberse simplificado cosas. Que es la generatriz (señala en el desarrollo) por el radio grande… Si esto es la alt…, estaría por aquí. (Marca más grueso el segmento desde el extremo del arco hasta la altura.)



{189} V: Esto es aquí…, (señala en el desarrollo) más o menos…

20:58 {190} M: ¿Seguro que es ahí?

{191} V: Sí, esto es el radio grande…

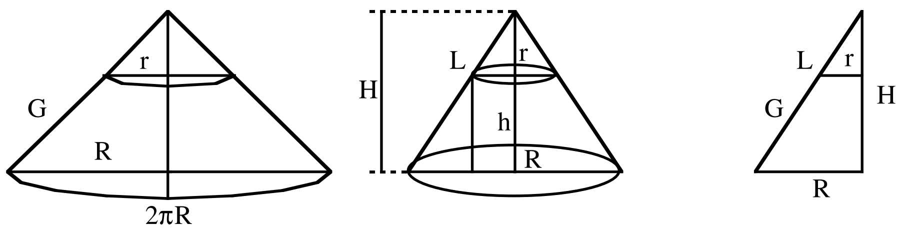
{192} M: La altura sale de unir los extremos…, luego ahí estaría la altura.

21:07 {193} M: No, es que no. ¿Qué valor tiene eso? No, piensa que esto no es un cono…, esto es el desarrollo de un cono.

{194} V: Ya lo sé que es el desarrollo del cono.

21:20 {195} M: Que nos puede liar.

21:27 {196} V: Esto es erre grande y esto es erre pequeña. (Escribe *R* y *r* en el desarrollo.)



21:30 {197} M: No, eso es en el cono, pero esto no es un cono, esto es un desarrollo del cono.

{198} V: Pero este valor es el…, el de erre…

{199} M: No, si tú abres un cono…, mira, (muestra el cono de papel y lo abre) si tú abres este cono, para empezar la altura no está en la línea que une los puntos, (señala en el papel una línea que une los extremos del arco) luego esto no es cierto, que aquí quede la altura.

21:45 {200} V: No, no es que esté ahí…, es que el valor éste (señala *R* en el desarrollo) es el mismo. Y tú imagínate ahora que…

{201} M: Y esto…

{202} V: …que cerramos el cono… Esto (señala el arco) no puede ser…, esto no puede ser porque esto es…

21:59 {203} M: ¿El qué no puede ser?

{204} V: Esto de aquí. Esto (señala la mitad del arco) no puede ser ele grande.

22:05 {205} M: Claro que no, eso…, eso es dos pi…, eso es…, bueno, eso es pi erre, eso es pi por erre, mira, además esto es pi por erre…, y por ge, y lo otro es…, más pi por erre, que es esto (señala el arco de arriba) pequeño, y por lo mismo. ¿Pi por erre qué es? La superficie de…, no, es la mitad de la longitud de la circunferencia. Si fuera dos pi erre…, sería la longitud de la circunferencia; partido por dos, la mitad de la circunferencia.

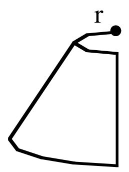
{206} V: (falta)

22:49 {207} M: ¿Tú sabes cuál es la… la superficie de un sector circular? ¿El área? ¿La fórmula? Yo creo que es el ángulo por pi y por el radio. A ver, sería el ángulo, que sería dos pi erre, (escribe $2\pi R\pi G$) por pi, o sea, el ángulo por pi y por la longitud, que en este caso sería ge. Sale dos pi cuadrado erre ge…, como área del sector circular…

22:36 {208} M: Espera, vamos a poner eso, a ver qué buscamos… (Escribe $\pi(R+r)G$.)

23:45 {209} M: ¿Seguro que es ge? ¡A ver si nos hemos equivocado! (Se va al triángulo y comprueba.) (murmullos)

24:06 {210} V: Ésta es la mitad de la superficie que buscamos. Ésta es la mitad. (Dibuja “medio” desarrollo de un tronco de cono.)



{211} V: Claro, claro, esta distancia sí que es erre pequeña. (Traza un segmento desde el extremo de arriba del dibujo hasta el “centro” y escribe *r*.)

{212} M: ¿Cuál?

{213} V: Ésta de aquí. La distancia que hay aquí…, (señala en el dibujo del “medio” desarrollo) del punto éste al punto éste. Ésta es erre pequeña, porque imagínate…

24:30 {214} M: Pero lo es cuando está…

{215} V: Sí, ya…

24:58 {216} M: …esto como cono, como circunferencia, pero no cuando lo extiendes… Si lo…, aquí… (Señala el cono.) Extendido esto no es; no, esto es mentira, esto no es erre pequeña, ¡extendido no es!, es… (Señala en el cono de papel.) ¡Es que no es…, es que éste es un caso más exagerado, ¿no?! ¡Esto no es erre! ¿O sí?

{217} V: Yo creo que sí. Tú imagínate que esto (señala el “medio” desarrollo) ahora lo cierras ahora. Entonces la distancia desde este punto, que quedaría…, este punto sería el que quedaría fuera…, hasta este punto, que sería el centro…, si esto continúa…

{218} M: Bueno, a ver cómo lo has hecho, ¿eh? ¿Qué te quedaría? ¿Así? (Dibuja un arco.)

{219} V: Claro…

{220} M: ¿Cómo te quedaría esto?

{221} V: …este punto de aquí, (señala el extremo izquierdo del arco) por ejemplo, sería este punto (señala el vértice de la izquierda del “medio” desarrollo) a la hora de cerrarlo.

25:25 {222} M: Bueno, te quedaría uno así (dibuja un tronco de cono a partir del arco) al abrir. ¿Sería algo así?